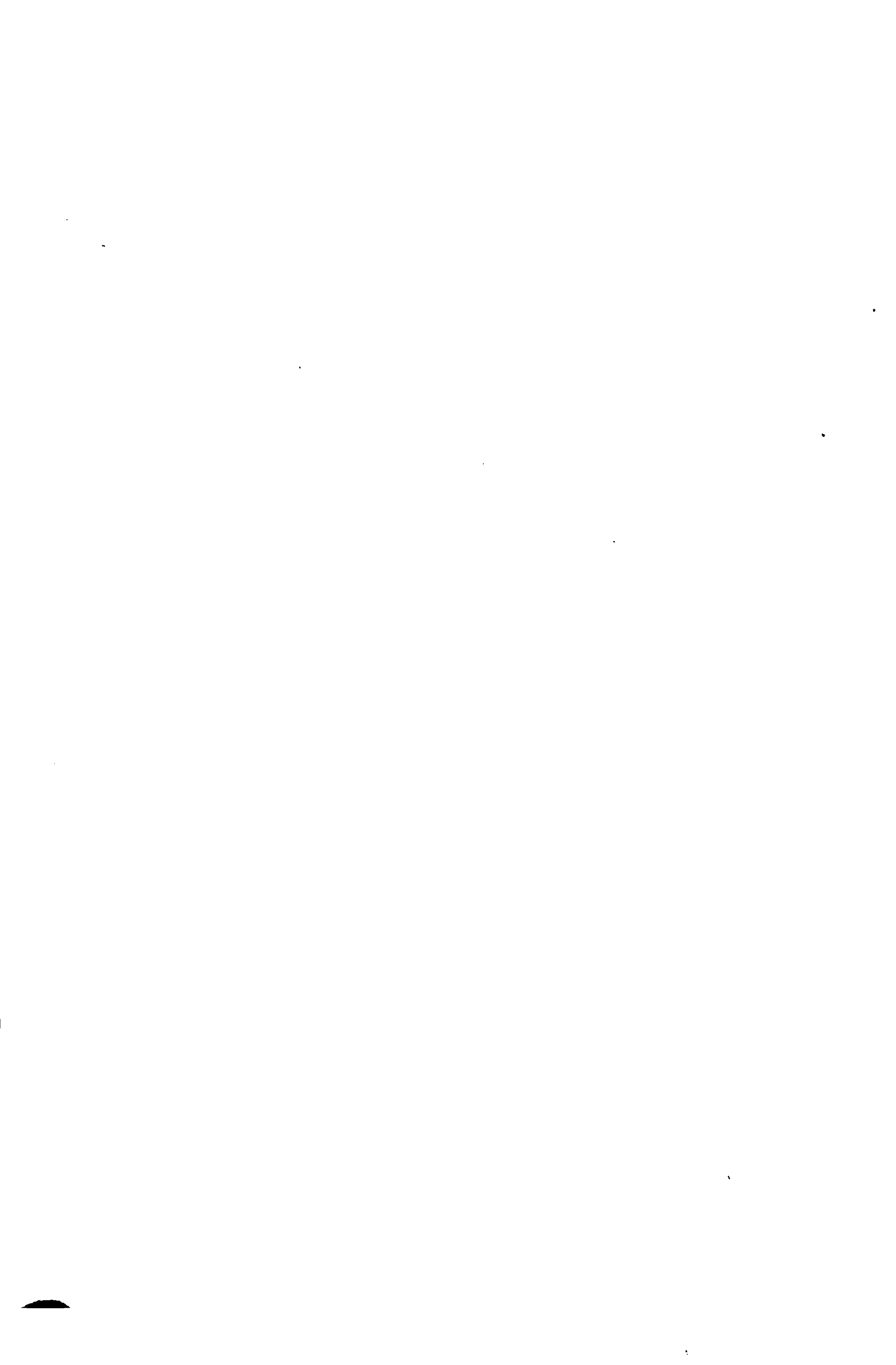

Phys 208.83
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
6 Feb., 1890.





COURS

DE

PHYSIQUE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

COURS
DE
PHYSIQUE
A L'USAGE
DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR
Henri
H. PELLAT

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND
ET A LA MAISON D'ÉDUCATION DE LA LÉGION D'HONNEUR
DE SAINT-DENIS

TOME DEUXIÈME
Première Partie. — CINÉMATIQUE,
DYNAMIQUE. — INSTRUMENTS DE MESURE.
CAPILLARITÉ



PARIS
SOCIÉTÉ D'IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ADMINISTRATIVES ET CLASSIQUES
Paul DUPONT, Éditeur
41, RUE JEAN-JACQUES-ROUSSEAU, 41

1885

COMPLÉMENT AU LIVRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE

CINÉMATIQUE

1. MOUVEMENT. — Quand les distances entre les points de différents corps restent les mêmes, on dit que ces corps sont en *repos* les uns par rapport aux autres. Si les distances entre les points d'un corps et les points au repos varient, ce corps est dit en *mouvement*, et est appelé *mobile*.

L'étude du mouvement, abstraction faite des causes qui le produisent, a reçu le nom de *cinématique* (de κίνημα, mouvement). Cette science, n'empruntant au monde physique que les idées d'*espace* et de *temps*, est, comme la géométrie, une science mathématique. Nous allons en présenter les éléments, qui sont indispensables à connaître pour l'étude de la Physique.

Il suffira, dans ce qui va suivre, d'étudier le mouvement d'un point (*point mobile*), puisqu'un corps peut toujours être considéré comme formé d'un grand nombre de parties assez petites pour être assimilées à des points.

2. TRAJECTOIRE. — On nomme *trajectoire* d'un point mobile la ligne que décrit ce point, pendant son mouvement.

Si la trajectoire d'un point mobile est une ligne droite, on dit que le mouvement est *rectiligne*; le mouvement est dit *curviligne* si la trajectoire est une ligne courbe.

3. ESPACE PARCOURU. — *L'espace parcouru* est la longueur de la trajectoire comprise entre le mobile et un point fixe O (fig. 1) appelé *origine*.

Dans une relation algébrique qui lie l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, une quantité *positive* représente l'espace parcouru d'un côté de l'origine (par exemple du côté OX) et une quantité *négative* l'espace parcouru de l'autre côté de l'origine (dans l'exemple choisi, du côté OX').

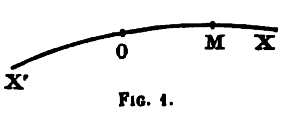


Fig. 1.

Ainsi supposons que l'espace parcouru e soit lié au temps t employé à le parcourir par la relation

$$e = (a - bt)\,t$$

dans laquelle a et b sont deux constantes; tant que $(a - bt)$ est positif, c'est-à-dire tant que t est plus petit que $\frac{a}{b}$, l'espace parcouru e est positif et, d'après la convention faite, le mobile se trouve du côté OX; pour $t = \frac{a}{b}$ l'espace parcouru est nul, c'est-à-dire que le mobile est revenu à l'origine O; enfin, à partir de ce moment, t devenant plus grand que $\frac{a}{b}$, l'expression $(a - bt)$ et, par conséquent, e sont négatifs; ce qui indique que le mobile est passé de l'autre côté OX' de l'origine O.

Quand on connaît la trajectoire d'un mobile, l'origine du mouvement et la relation qui lie l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, le mouvement est entièrement déterminé puisqu'on sait à chaque instant où est le mobile.

4. MOUVEMENT UNIFORME. — Un mouvement est dit *uniforme* quand *l'espace parcouru augmente proportionnellement au temps.*

Si nous prenons l'origine d'un pareil mouvement à l'endroit où se trouve le mobile à l'origine du temps, la formule qui lie l'espace au temps est, d'après la définition ci-dessus :

$$(1) \qquad e = at$$

e représentant l'espace parcouru pendant le temps t et a une constante.

On voit que dans un mouvement uniforme *les espaces parcourus dans des intervalles de temps égaux sont égaux entre eux, quelque petits que soient les intervalles de temps considérés.* Cette propriété est souvent prise comme définition du mouvement uniforme.

La constante a représente la quantité dont s'avance le mobile dans chaque unité de temps, car, si dans la formule ci-dessus t augmente d'une unité, l'espace e augmente de a. On appelle cette quantité a la *vitesse* du mouvement uniforme.

On tire de la relation (1) :

$$(2) \qquad a = \frac{e}{t}$$

La vitesse est égale au rapport constant qui existe entre l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir.

Pour un mouvement uniforme déterminé, le nombre qui exprime la vitesse dépend évidemment du choix des unités de longueur et de temps. Ainsi, si un mobile parcourt 8 mètres par seconde, sa vitesse est 8, en adoptant le mètre et la seconde comme unités; mais, comme le mobile parcourt 800 centimètres par seconde, la vitesse serait 800, en adoptant le centimètre et la seconde comme unités. Si nous prenions la minute comme unité de temps, tout en conservant le centimètre comme unité de longueur, le mobile parcourant 60 fois 800 centimètres par minute, la vitesse serait représentée par le nombre 48 000.

On adopte aujourd'hui en Physique le centimètre comme unité de longueur, la seconde comme unité de temps (voir T. 1er L. I Chap. II).

Tout mouvement qui n'est pas uniforme est appelé *mouvement varié.*

5. **DIRECTION DE LA VITESSE.** — Nous allons maintenant généraliser la notion de *vitesse* pour la rendre applicable à un mouvement quelconque, en commençant par définir ce qu'on entend par *direction de la vitesse.*

Dans un mouvement rectiligne, la *direction de la vitesse* est celle de la ligne droite suivant laquelle se fait le mouvement. Mais, dans un mouvement curviligne, cette difinition ne peut plus convenir, et pourtant, à chaque instant, le mouvement a une certaine direction qu'il convient de préciser, en prenant une définition générale, contenant, comme cas particulier, celle donnée pour le mouvement rectiligne.

Soit AB un arc de trajectoire décrit par un point mobile (fig. 2); nous appellerons *direction de la vitesse moyenne*, la direction ABK de la corde AB de cet arc. C'est la direction d'un mouvement rectiligne allant de A en B : elle dépend de la position des deux points A et B.

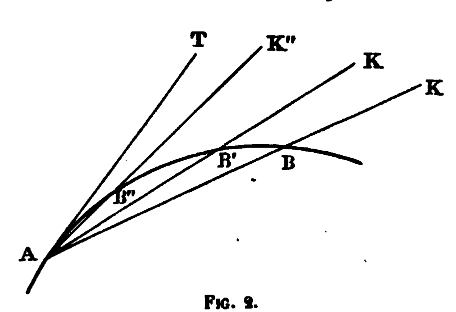


Fig. 2.

Si, au lieu de AB, nous considérons, à partir du même point A, des arcs AB', AB'',... de plus en plus courts, la direction de la vitesse moyenne varie un peu et devient AB'K', AB''K''... ; et, quand la longueur de l'arc considéré tend vers zéro, la seconde extrémité se rapprochant indéfiniment du point A, la direction de la vitesse moyenne devient la direction d'une corde dont les deux extrémités se confondent, ce qui, par définition, est la direction de la tangente : elle ne dépend plus que de la position du point A sur la trajectoire. On est amené par là à prendre la définition suivante :

La direction de la vitesse d'un point mobile est la direction de la tangente à la trajectoire au point où se trouve le mobile.

Ainsi, dans un mouvement *circulaire*, la direction de la vitesse,

étant celle de la tangente au cercle, est constamment perpendiculaire au rayon.

6. VALEUR DE LA VITESSE DANS UN MOUVEMENT VARIÉ. — Dans un mouvement uniforme, le rapport entre la longueur de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir est une quantité constante qui est la valeur de la vitesse. Dans un mouvement varié, ce rapport n'est plus constant et dépend du temps considéré ; il ne peut donc représenter la valeur de la vitesse à un instant donné. Pourtant nous concevons qu'à chaque moment le mouvement varié peut être plus ou moins rapide : il convient donc de chercher une définition précise de la valeur de la vitesse, définition générale qui comprenne, comme cas particulier, celle donnée pour le mouvement uniforme. Nous allons procéder pour y arriver, comme nous l'avons fait pour arriver à une définition générale de la direction de la vitesse.

Soit un mobile possédant un mouvement varié suivant une trajectoire quelconque (fig. 2). Appelons Δt le temps employé par ce mobile pour décrire un arc AB, et s la longueur de la corde AB de cet arc. On appelle *valeur de la vitesse moyenne* ou simplement *vitesse moyenne*, la valeur du rapport $\frac{s}{\Delta t}$; en désignant par V_m la vitesse moyenne, on a donc :

$$V_m = \frac{s}{\Delta t} \qquad (1)$$

Cette vitesse moyenne est la vitesse d'un mobile, animé d'un mouvement uniforme, qui parcourerait la corde AB dans le temps que le mobile animé du mouvement varié met à parcourir l'arc AB.

La vitesse moyenne dépend à la fois de la position des points A et B. Si, au lieu de considérer la vitesse moyenne dans la portion AB de la trajectoire, on la considère dans les portions de plus en plus courtes AB′, AB″..., sa valeur varie un peu ; et, si la longueur de ces arcs tend vers zéro, la seconde extrémité se rapprochant indéfiniment du point A, la vitesse moyenne tend vers une valeur limite, bien définie, qui ne dépend plus que

de la position du point A et de la nature du mouvement. On est amené par là à la définition suivante :

La valeur de la vitesse d'un mobile au point A *de sa trajectoire est la limite de la valeur de la vitesse moyenne dans une portion* AB *de la trajectoire, quand cette portion* AB *devient de plus en plus courte, le point* B *tendant vers le point* A.

Au lieu de prendre comme définition de la valeur de la vitesse « la limite du rapport de la longueur de la *corde* au temps employé pour parcourir l'arc, quand celui-ci devient de plus en plus petit », il revient au même de définir la valeur de la vitesse comme, « la limite du rapport de la longueur de *l'arc* au temps employé pour parcourir cet arc, quand celui-ci devient de plus en plus petit ». Désignons, en effet, par Δe la longueur d'un arc dont la corde a une longueur ε, et soit Δt le temps employé pour parcourir cet arc ; la première définition de la vitesse donne :

$$v = \lim. \frac{\varepsilon}{\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad v = \lim. \frac{\varepsilon}{\Delta e} \cdot \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim. \frac{\varepsilon}{\Delta e} \times \lim. \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Or, la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{\Delta e}$ de la longueur d'une corde à la longueur de l'arc est l'unité, quand l'arc tend vers zéro. On a donc :

$$v = \lim. \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

ce qui est la seconde définition donnée.

En considérant l'espace parcouru e comme une fonction du temps t, on voit que la longueur Δe de l'arc AB est l'accroissement de la fonction e quand la variable t croît de la valeur Δt. La limite du rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, quand Δe et Δt tendent vers zéro, est donc la dérivée de l'espace parcouru par rapport au temps. En désignant par e'_t cette dérivée et par v la vitesse, on a donc :

$$v = \lim. \frac{\Delta e}{\Delta t} = e'_t \tag{2}$$

La valeur de la vitesse est la dérivée de l'espace par rapport au temps; ce n'est encore qu'une autre manière d'énoncer la définition donnée plus haut.

Pour bien faire comprendre la définition de la vitesse moyenne et de la vitesse vraie, donnons un exemple. Supposons que dans un mouvement rectiligne la relation qui existe entre l'espace parcouru et le temps soit la suivante:

$$(3) \qquad e = at + bt^2$$

a et b étant deux constantes.

Cherchons la valeur, au bout du temps t, de la vitesse moyenne pendant le temps Δt. Le mouvement étant rectiligne, la corde se confond avec l'arc ($\Delta e = \varepsilon$); aussi convient-il d'abord de chercher la longueur Δe parcourue pendant ce temps Δt. Or, l'espace parcouru depuis l'origine étant $e + \Delta e$ pendant le temps $t + \Delta t$, on a, d'après la formule générale (3):

$$(4) \qquad e + \Delta e = a(t + \Delta t) + b(t + \Delta t)^2$$

d'où, en retranchant membre à membre (3) de (4), il vient:

$$(5) \qquad \Delta e = a\Delta t + b\left[(t + \Delta t)^2 - t^2\right] = a\Delta t + b\left[2t\Delta t + (\Delta t)^2\right]$$

Formons maintenant le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ pour avoir la valeur de la vitesse moyenne V_m:

$$(6) \qquad V_m = \frac{\Delta e}{\Delta t} = a + b(2t + \Delta t)$$

Comme on le voit, la valeur de cette vitesse moyenne dépend du temps Δt pendant lequel on la considère.

En faisant tendre le temps Δt et, par conséquent, l'arc Δe vers zéro, la valeur de V_m devient la valeur de la vitesse v au bout du temps t; on obtient ainsi la relation:

$$(7) \qquad v = a + 2bt$$

Par ce calcul nous avons, en réalité, déterminé la dérivée de e par rapport à t; les règles connues de la dérivation nous auraient permis d'avoir immédiatement cette relation :

$$v = e'_t = a + 2bt$$

Telle est la formule générale qui représente la vitesse dans un mouvement pour lequel les espaces parcourus sont représentés par la formule (3). Nous nous servirons plus loin de ce résultat important.

Pour indiquer les unités qui servent dans l'évaluation de la vitesse, on dit, par exemple, qu'un corps est animé d'une vitesse *de 30 mètres par seconde.* Si le mouvement est uniforme, cela signifie qu'il s'avance de 30 mètres dans chaque seconde sur sa trajectoire; mais, si le mouvement est varié, cela ne veut plus dire qu'il s'avance de 30 mètres par seconde, mais bien qu'au moment considéré il possède une vitesse numériquement égale à celle d'un mobile animé d'un mouvement uniforme qui s'avancerait de 30 mètres par seconde ; ou encore, ce qui revient au même, que la vitesse de ce mobile est 30, en mesurant les espaces en mètres et les temps en secondes.

7. Sens de la vitesse. — Suivant une ligne droite ou courbe, on peut marcher dans deux sens différents, le sens X'OX (fig. 3) ou le sens XOX'.

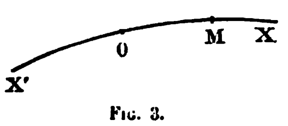


Fig. 3.

La convention faite plus haut de regarder les espaces parcourus à partir d'une origine O comme des quantités positives s'ils sont du côté OX et comme des quantités négatives s'ils sont du côté OX', nous amène à distinguer le sens du mouvement (*sens* de la vitesse) par le signe de la valeur de la vitesse.

En effet, supposons que le mobile M marche dans le sens X'OX ; alors, pour un accroissement Δt du temps, il y a un accroissement *positif* de l'espace parcouru OM; le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ est positif et,

comme la limite de ce rapport, quand Δe et Δt tendent vers zéro, représente la vitesse, dans ce cas, *la vitesse est une quantité positive.*

Au contraire, supposons que le mobile M marche dans le sens XOX'; alors, pour un accroissement Δt du temps, il y a un accroissement *négatif* de l'espace parcouru; Δe étant une quantité négative, le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ est négatif, et, comme sa limite est la vitesse, dans ce cas, *la vitesse est une quantité négative.*

Un exemple fera bien comprendre l'usage du signe de la vitesse. Supposons que la formule qui représente la vitesse du mobile M soit :

$$v = a - \gamma t$$

a et γ étant deux constantes positives. Pour $t=0$ on a $v=a$, la vitesse est positive, le mobile se dirige dans le sens X'OX; elle reste positive et le mobile se dirige dans le même sens tant qu'on a $a - \gamma t > 0$ ou $t < \frac{a}{\gamma}$. Pour $t = \frac{a}{\gamma}$, la vitesse devient nulle, le mobile cesse de s'avancer. Pour $t > \frac{a}{\gamma}$, on a $a - \gamma t < 0$, la vitesse devient négative; ce qui nous indique que le mobile rétrograde et se dirige maintenant dans le sens XOX'. A partir de ce moment, $a - \gamma t$ reste toujours plus petit que zéro et prend des valeurs absolues de plus en plus grandes, ce qui veut dire que le mobile continue toujours à s'avancer dans la direction XOX' et avec une vitesse absolue de plus en plus grande.

Le résultat de cette discussion nous sera utile plus loin.

8. Représentation graphique des vitesses. — Nous venons de voir que la vitesse est une grandeur qui possède une *direction*, un *sens* et une *valeur numérique*. Dans les problèmes de mécanique, il est commode de représenter graphiquement ces trois qualités.

Pour cela, on convient de figurer chaque vitesse par une ligne droite A*a* (fig. 4) dans la direction de la vitesse, terminée par une

flèche suivant son sens et ayant une longueur A*a*, contenant autant de fois une longueur déterminée (la même pour toutes les vitesses considérées dans le problème) qu'il y a d'unités dans la valeur numérique de la vitesse.

A a *nord* *sud*

Fig. 4. Fig. 5.

Ainsi, supposons qu'après aoior fait choix du millimètre pour représenter graphiquement l'unité de vitesse, nous ayons à figurer une vitesse dirigée horizontalement du Sud au Nord et ayant une valeur numérique de 18,1 ; nous mènerons une droite dirigée horizontalement du Sud au Nord et ayant une longueur de $18^{mm},1$ que nous terminerons par une flèche du côté du Nord (fig. 5).

9. **MOUVEMENT DE TRANSLATION.** — On appelle *mouvement d'ensemble* d'un système un mouvement dans lequel les divers points de ce système conservent la même distance entre eux. Parmi ces mouvements, il en est deux, le *mouvement de translation* et *le mouvement de rotation*, qui sont intéressants par leur simplicité et par l'utilité que présente leur considération ; nous allons en dire quelques mots.

Quand un système de points A, B, C,... K (fig. 6) se meut d'un mouvement d'ensemble tel que les positions successives AB et A'B', AC et A'C', CK et C'K', etc., des droites qui joignent les points deux à deux soient toujours parallèles entre elles, le mouvement est dit de *translation*, que le mouvement des points soit rectiligne ou curviligne, qu'il soit uniforme ou varié.

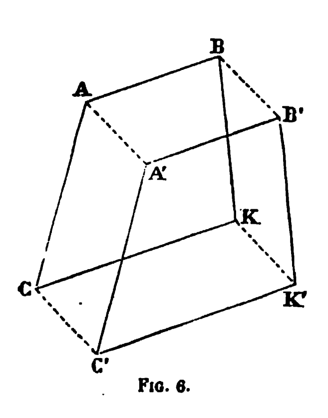


Fig. 6.

Il est aisé de voir que, dans un pareil mouvement, les vitesses des divers points A, B, C...K sont, à un même moment, toujours égales et parallèles.

En effet, soit Δt, le temps employé par le système pour passer de la position A. B, C,... K à la position A', B', C',... K'. Joignons

A et A', B et B', C et C'... K et K' ; les droites AA', BB', CC ... KK', qui représentent les déplacements des différents points sont toutes égales et parallèles, car les divers quadrilatères ABB'A', ACC'A', KCC'K' etc., sont des parallélogrammes, comme ayant leurs côtés opposés AB et A'B', ou AC et A'C'... égaux et parallèles.

Or, les directions AA', BB', CC',... sont précisément les directions des vitesses moyennes des points A, B, C,... pendant le temps Δt, et les rapports égaux $\frac{AA'}{\Delta t}$, $\frac{BB'}{\Delta t}$, $\frac{CC'}{\Delta t}$,... sont les valeurs de ces vitesses moyennes pendant le même temps Δt. Les vitesses moyennes des divers points A, B, C,... ayant même direction et même valeur, quelque petit que soit le temps Δt, il en est de même à la limite quand le temps Δt tend vers zéro et que les vitesses moyennes deviennent les vitesses vraies.

Réciproquement, si différents points A, B, C,... sont animés de vitesses constamment égales et parallèles, le mouvement est de translation. En effet, les vitesses moyennes pendant un temps Δt infiniment petit étant les mêmes en direction et en valeur numérique, les déplacements AA', BB', CC'... des points pendant ce temps sont des droites égales et parallèles; or, les divers quadrilatères AA'B'B, AA'C'C, etc..., ayant leurs côtés opposés AA' et BB' ou AA' et CC', etc..., égaux et parallèles, sont des parallélogrammes, et les autres côtés opposés AB et A'B' ou AC et A'C' etc..., étant égaux et parallèles, le mouvement est de translation.

10. MOUVEMENT DE ROTATION. — VITESSE ANGULAIRE. — Quand un système possède un mouvement d'ensemble tel que la distance de chacun de ses points à une droite fixe XY demeure invariable, chaque point restant dans un plan perpendiculaire à cette droite, on dit que le système est animé d'un *mouvement de rotation* autour de *l'axe* XY.

Dans ce cas, chaque point décrit un cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe, le centre du cercle étant le point où l'axe perce le plan.

La vitesse d'un point est toujours dirigée dans le plan du cercle perpendiculairement au rayon qui joint ce point à l'axe. Tous les points situés à une même distance de l'axe, décrivant

des arcs égaux dans le même temps, ont des vitesses dont la valeur est la même à un même moment.

On appelle *vitesse angulaire* la valeur de la vitesse des points situés à l'unité de distance de l'axe. Soient (fig. 7) A un de ces points, O le centre du cercle qu'il décrit et B un second point situé sur le même rayon OA à une distance r (=OB) de l'axe. Supposons qu'au bout du temps Δt, le rayon que nous venons de considérer ait pris la position OA'B', les deux points ayant respectivement décrit les arcs AA' et BB'. Menons les cordes de ces arcs; les vitesses moyennes V_A et V_B des deux points pendant le temps Δt sont données par les relations :

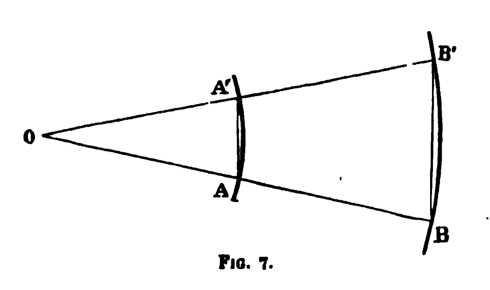


Fig. 7.

$$V_A = \frac{AA'}{\Delta t} \qquad V_B = \frac{BB'}{\Delta t}$$

or, les triangles semblables AOA' et BOB' fournissent la relation :

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{OB}{OA} = \frac{r}{1}$$

En divisant les deux termes du premier rapport par Δt on tire de là :

$$\frac{V_B}{V_A} = r \quad \text{ou} \quad V_B = V_A \times r$$

Cette relation subsistant, quelque petit que soit le temps Δt, est encore exacte à la limite quand, ce temps devenant nul,

V_B devient la vitesse v du point B et V_A la vitesse ω du point A, c'est-à-dire la vitesse angulaire. On a donc :

$$v = \omega r$$

On obtient la vitesse d'un point en multipliant la vitesse angulaire par la distance de ce point à l'axe.

La vitesse angulaire est fournie par la relation $\omega = \frac{v}{r}$, quand on connait v et r. Cette relation fait voir que le nombre qui représente une vitesse angulaire déterminée est indépendant du choix de l'unité de longueur. Si, en effet, nous choisissons dans un second cas une unité de longueur n fois plus grande que celle adoptée dans un premier cas, les nombres qui expriment v et r dans le second cas sont la fraction $\frac{1}{n}$ des nombres qui exprimaient ces mêmes grandeurs dans le premier : le rapport de ces nombres conserve la même valeur.

Si le mouvement de l'un des points B du système est uniforme, le mouvement de chaque point est uniforme, puisque la vitesse v du point B étant constante, il en est de même de la vitesse angulaire ω : le mouvement de rotation est *uniforme*. Dans ce cas, la vitesse angulaire représente l'angle dont tourne le système pendant l'unité de temps. Si nous désignons par T la durée d'une révolution complète, tout point situé à l'unité de distance de l'axe décrit pendant ce temps une circonférence de rayon unité ; on a donc, pour la vitesse constante de ce point, c'est-à-dire pour la vitesse angulaire ω, la relation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Ainsi, la Terre fait un tour complet sur elle-même en 23,879 42 heures solaires moyennes ou 85 966 secondes. En prenant la seconde comme unité de temps, sa vitesse angulaire ω est donnée par

$$\omega = \frac{2\pi}{85966} = 0,000 073 09$$

11. MOUVEMENT RELATIF. — Le mouvement *relatif* d'un corps est le mouvement de ce corps par rapport à des points animés d'un mouvement d'ensemble, quelconque du reste.

Ainsi, un homme se promène sur le pont d'un bateau en marche; il est animé, par rapport au bateau, d'un mouvement relatif dont la trajectoire et la vitesse peuvent être complètement différentes de celles du mouvement de cet homme par rapport aux rives du fleuve sur lequel s'avance le bateau.

Le mouvement *absolu* serait le mouvement par rapport à des points de repère absolument fixes. Or, de pareils points de repère nous font défaut : nous ne constatons dans la nature que des mouvements relatifs. Le plus habituellement, nous rapportons le mouvement des mobiles aux objets fixés à la surface du sol; mais ces objets ne sont pas fixes; ils sont animés d'un mouvement de rotation autour de l'axe de la Terre, ainsi que du mouvement de rotation de la Terre autour du Soleil. Les astronomes rapportent le mouvement des planètes, des comètes, etc., aux étoiles dites *fixes*, mais rien ne nous prouve que ces étoiles, qui nous semblent en repos (ou à peu près) les unes par rapport aux autres, ne sont pas animées d'un mouvement d'ensemble à travers l'espace, impossible à constater, puisque les points de repère nous font défaut.

12. COMPOSITION DES MOUVEMENTS. — COMPOSITION DES VITESSES. — Supposons qu'un point mobile M soit animé d'un mouvement relatif par rapport à un système A de points animés eux-mêmes d'un mouvement d'ensemble par rapport à un système B d'autres points; nous appellerons *mouvement d'entraînement* le mouvement du système A dans le système B.

Soit XY (fig. 8) la position dans le système B de la trajectoire du mouvement relatif de M dans le système A au temps t; et soit X'Y' la nouvelle position que prendra dans le système B cette trajectoire au temps t'. Désignons par O le point de la trajectoire XY où se trouve le mobile M au temps t et par O_1 le point de cette trajectoire où le mobile M se trouvera au temps t'. La trajectoire étant transportée, par le mouvemement d'entraînement, dans la position X'Y' au temps t', les deux points O et O_1 prendront alors dans le système B les positions O' et O'_1,

ce qui fait que le mobile M, qui, dans le système B, occupe au temps t la position O, occupera au temps t' la position O'_1 : le mobile M décrit dans ce système une certaine trajectoire UV qui passe par les points O et O'_1.

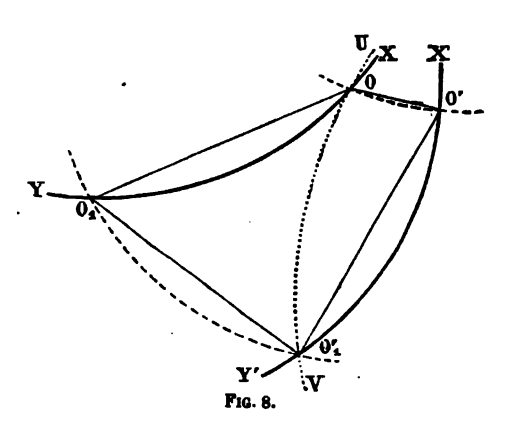


Fig. 8.

Si nous menons les droites OO_1, $O_1O'_1$, O'_1O', $O'O$, nous formons un quadrilatère qui, dans le cas d'un mouvement d'entraînement quelconque, ne présente d'autres particularités que d'avoir les côtés opposés OO_1 et $O'O'_1$ égaux entre eux, puisque ces côtés représentent les deux positions d'une même droite à deux époques différentes.

Mais, dans le cas particulier où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, chaque droite du système A se déplaçant parallèlement à elle-même, les côtés opposés OO_1 et $O'O'_1$ du quadrilatère $OO_1O'_1O'$, non seulement sont égaux entre eux, mais, en outre, sont parallèles; dans ce cas, ce quadrilatère est un parallélogramme (fig. 9).

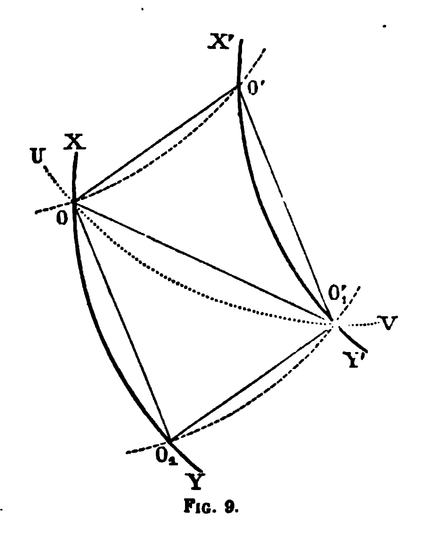


Fig. 9.

Ainsi, quand le mouvement d'entraînement est de translation, on obtient la position qu'aura le point mobile dans le système B au temps en construisant un parallélogramme ayant pour sommet O la

position du mobile au temps t et, pour côtés adjacents 1° la corde OO_1 de l'arc décrit pendant le temps $t'-t$ dans le mouvement relatif du mobile, 2° la corde OO' de l'arc décrit pendant le même temps par un point du système A dans le mouvement d'entraînement : le sommet O'_1 opposé à O est la position qu'aura le mobile dans le système B au temps t'. Par conséquent, la diagonale OO'_1 de ce parallélogramme est la corde de l'arc décrit par le point M pendant le temps $t'-t$ dans le système B. Appliquer cette règle s'appelle *composer* les deux mouvements.

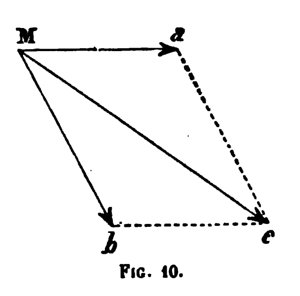


Fig. 10.

Quelle est la vitesse du mobile M par rapport au système B ?

Quel que soit le mouvement d'entraînement, cette vitesse est représentée (en valeur, direction et sens) *par la diagonale* Mc *du parallélogramme ayant pour côtés adjacents la vitesse relative* Mb *de* M *dans le système* A *et la vitesse* Ma, *par rapport au système* B, *du point du système* A *coincidant avec* M (fig. 10) (1).

Appliquer cette règle, s'appelle *composer* les deux vitesses

(1) Voici la démonstration de ce théorème important.

Soit O le point du système A où le mobile M se trouve au temps t (fig. 11), et soit O_1 le point du système A où M se trouvera au temps $t+\Delta t$, O et O_1 représentant aussi sur la figure les positions de ces deux points dans le système B au temps t. OO_1 est la direction de la vitesse moyenne relative du point M dans le système A pendant le temps Δt et $\frac{OO_1}{\Delta t}$ est la valeur de cette vitesse moyenne; représentons-la par la ligne OO_1K_1, dont la longueur OK_1 contient autant de millimètres qu'il y a d'unités dans la valeur $\frac{OO_1}{\Delta t}$ de la vitesse moyenne $\left(OK_1 = \frac{OO_1}{\Delta t}\right)$. Soient maintenant O' et O'_1 les positions dans le système B des points O et O_1 du système A, au temps $t+\Delta t$, ce qui fait que O'_1 est précisément la position du mobile M dans le système B au temps $t+\Delta t$; OO' est la direction de la vitesse moyenne de O dans le système B pendant le temps Δt, et $\frac{OO'}{\Delta t}$ est la valeur de cette vitesse

M*a* et M*b*, qui sont appelées vitesses *composantes*; la vitesse M*c* (résultat de l'opération) s'appelle vitesse *résultante*.

Par exemple, un train de chemin de fer est animé, à un moment donné, d'une vitesse horizontale dirigée du Sud au Nord, de 5 mètres par seconde; au même moment une bille tombant dans un wagon, a, par rapport au train, une vitesse relative parallèle aux parois verticales du wagon de 3 mètres par

moyenne; représentons-la par OO'K' $\left(OK' = \frac{OO'}{\Delta t}\right)$. Enfin, OO'_1 est la direction de la vitesse moyenne du mobile M dans le système B et $\frac{OO'_1}{\Delta t}$ est la valeur de cette vitesse moyenne; représentons-la par $OO'_1K'_1$ $\left(OK'_1 = \frac{OO'_1}{\Delta t}\right)$.

On voit que les trois longueurs OK_1, OK'_1 et OK' sont respectivement proportionnelles aux trois longueurs OO_1, OO'_1 et OO'. Menons les droites $O_1O'_1$, O'_1O', $K_1K'_1$ et K'_1K'; les triangles $OO_1O'_1$ et $OK_1K'_1$ sont semblables, comme ayant même angle compris entre côtés respectivement proportionnels; il en résulte que $K_1K'_1$ est parallèle à $O_1O'_1$; pour la même raison K'_1K' est parallèle à O'_1O'.

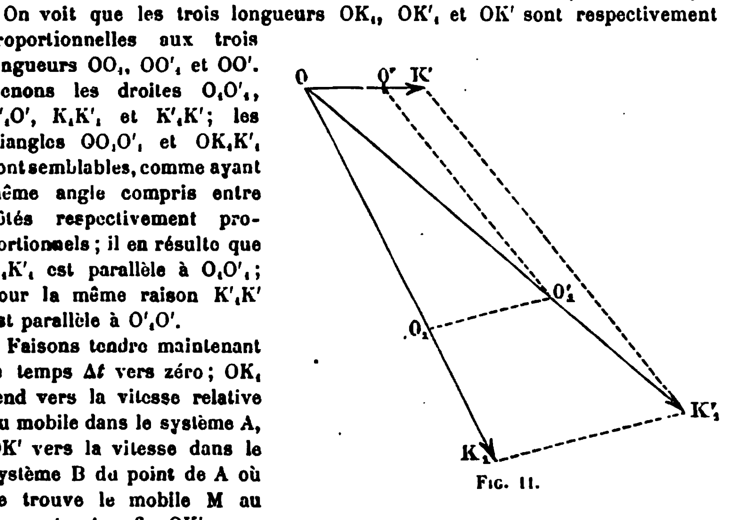


Fig. 11.

Faisons tendre maintenant le temps Δt vers zéro; OK_1 tend vers la vitesse relative du mobile dans le système A, OK' vers la vitesse dans le système B du point de A où se trouve le mobile M au temps *t*, et enfin OK'_1 vers la vitesse du mobile dans le système B. Or, à la limite, les directions des lignes O_1O_1' et OO'K' se confondent, comme déplacements dans le système B de deux points du système A de plus en plus voisins; il en résulte que $K_1K'_1$ constamment parallèle à $O_1O'_1$ devient parallèle à OK'; en outre, les lignes OO_1 et $O'O'_1$ se confondent aussi, puisque $O'O'_1$ et OO_1 sont les positions d'une même droite au temps $t+\Delta t$ et au temps *t*; il en résulte que $K'K'_1$ constamment parallèle à $O'O'_1$, devient parallèle à OK_1: le quadrilatère $OK_1K'_1K'$ se transforme ainsi en un parallélogramme. C.Q.F.D

seconde. Pour avoir la vitesse de la bille par rapport au sol, menons horizontalement et du Sud au Nord, une ligne Mb (fig. 12) égale à 5 centimètres (en prenant le centimètre pour représenter l'unité de vitesse). Cette droite Mb représente en grandeur et en direction la vitesse du train; menons une seconde droite Ma verticale dirigée de haut en bas et égale à 3 centimètres; elle représente la vitesse relative de la bille par rapport au train. La diagonale Mc du parallélogramme (ici rectangle) Macb représente, en grandeur et en direction, la vitesse de la bille par rapport au sol. On voit, par la construction graphique, que cette vitesse est contenue dans le plan vertical dirigé du Sud au Nord, qu'elle est inclinée au-dessous de l'horizon d'un angle bMc égal à 30° 57′ 40″ et qu'elle a une valeur égale à 5^{m},831 par seconde (1).

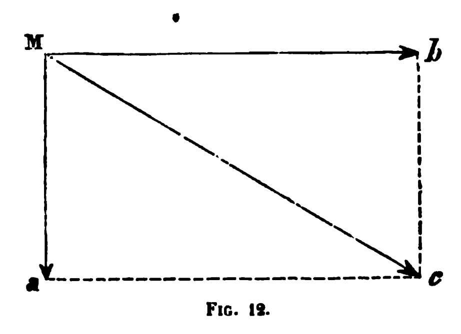


Fig. 12.

Il est évident que cette règle suffit, quel que soit le nombre des vitesses que l'on ait à composer; car, si les points du système B, dans lequel Mc représente la vitesse de M, sont animés d'une vitesse Md (fig. 13) par rapport aux points d'un troisième système D, on obtiendra la vitesse de M dans ce système en composant, suivant la règle du parallélogramme, Mc et Md; la vitesse résultante sera Me; et ainsi de suite, dans le cas de plus de trois systèmes.

La règle que nous venons de donner pour composer plusieurs vitesses revient évidemment à mener par l'extrémité a de l'une

(1) Pour faire le calcul, remarquons que l'angle aMb étant droit, le parallélogramme est ici un rectangle, comme bc = Ma = 3 et que Mb = 5, on a $\text{tang}\, b\text{M}c = \frac{bc}{b\text{M}} = \frac{3}{5}$; d'où : $b\text{M}c = 30°\ 57'\ 40''$. D'un autre côté, $\text{M}c = \sqrt{\overline{\text{M}b}^2 + \overline{bc}^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5{,}831$.

des vitesses Ma une droite ac égale et parrallèle à la seconde vitesse Mb, par l'extrémité c de cette droite, une droite ce égale

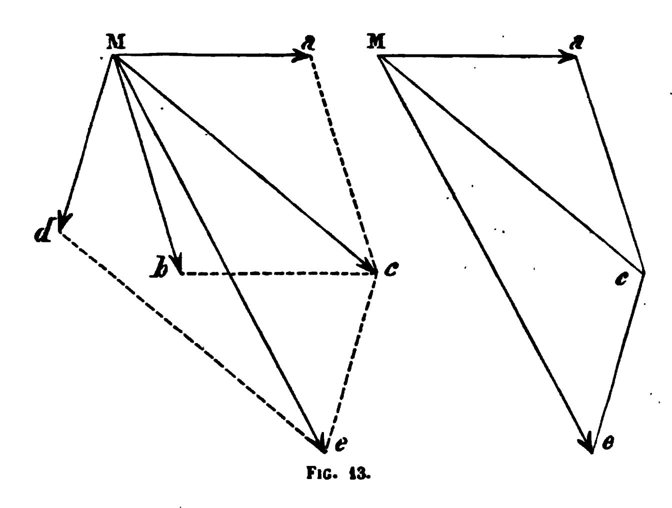


FIG. 13.

et parallèle à la troisième vitesse, et ainsi de suite, s'il y a plus de trois vitesses. La droite qu'on obtient en joignant l'extrémité du dernier côté de cette ligne polygonale, au commencement M du premier, représente la vitesse résultante (Mc est la résultante des deux premières vitesses, Me la résultante des trois premières, etc...). Cette règle est connue sous le nom de *polygone des vitesses.*

Dans le cas où toutes les vitesses à composer ont même direction, la règle précédente montre que la résultante possède aussi cette direction et est égale à la somme algébrique des vitesses composantes, en considérant comme positives les vitesses d'un certain sens et comme négatives celles de sens inverse.

Si les deux mouvements que l'on compose sont rectilignes et uniformes, les vitesses composantes étant l'une et l'autre constantes en grandeur et en direction, il en est de même de leur résultante : le mouvement résultant est rectiligne et uniforme.

13. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ. — Parmi les mouve-

ments variés, en nombre infini, il en est un, *le mouvement uniformément varié*, qui présente un intérêt spécial par sa simplicité et, surtout, parce que c'est le mouvement d'un corps qui tombe en chute libre en partant de l'état de repos.

DÉFINITION. — *Le mouvement uniformément varié est celui dans lequel la valeur de la vitesse varie proportionnellement au temps.*

Deux cas doivent être distingués :

1° — Cette variation de la vitesse peut être une *augmentation ;* le mouvement est dit alors *uniformément accéléré.*

2° — Cette variation de la vitesse peut être une *diminution ;* le mouvement est dit alors *uniformément retardé.*

Soient a la vitesse d'un mouvement uniformément accéléré à l'origine du temps et v sa vitesse au bout du temps t, on a, d'après la définition même :

$$(1) \qquad v - a = \gamma_1 t \qquad \text{ou} \qquad v = a + \gamma_1 t$$

γ_1 étant une quantité constante, qui est l'augmentation de vitesse dans l'unité de temps.

Dans un mouvement uniformément retardé, si a est la vitesse à l'origine du temps et v la vitesse au bout du temps t, la définition donne la relation

$$(2) \qquad a - v = \gamma_2 t \qquad \text{ou} \qquad v = a - \gamma_2 t$$

γ_2 étant une constante qui est la diminution de vitesse dans l'unité de temps.

On peut comprendre les deux cas précédents dans une seule formule.

$$(3) \qquad v = a + \gamma t$$

γ étant une constante *positive* si le mouvement est uniformément *accéléré*, et une constante *négative* si le mouvement est uniformément *retardé.*

Cette quantité constante γ s'appelle *l'accélération*, si le mouvement est rectiligne [1].

De la formule (3) on tire :

$$(4) \qquad \gamma = \frac{v-a}{t}$$

ce qui montre qu'on obtient la valeur de l'accélération en divisant l'accroissement (positif ou négatif) ($v - a$) de la vitesse, par le temps t, employé à l'obtenir.

Espace parcouru. — Nous avons vu (page 7) qu'un mouvement dans lequel l'espace parcouru est donné par la formule

$$(5) \qquad e = at + bt^2$$

a ses vitesses représentées par

$$(6) \qquad v = a + 2bt$$

ce mouvement est donc un mouvement uniformément varié dans lequel l'accélération est égale à $2b$.

Posons $\gamma = 2b$; d'où : $b = \frac{1}{2}\gamma$; les formules deviennent :

$$(7) \qquad \begin{cases} e = at + \frac{1}{2}\gamma t^2 \\ v = a + \gamma t \end{cases}$$

Ce sont là les deux formules fondamentales du mouvement uniformément varié. La première fait connaître l'espace parcouru au bout du temps t; la seconde, la vitesse acquise au bout de ce temps, quand la vitesse initiale a est connue ainsi que l'accélération γ.

(1) Nous verrons plus loin que, si le mouvement uniformément varié est curviligne, la quantité γ doit porter le nom d'*accélération tangentielle*.

L'une de ces deux formules est une conséquence forcée de l'autre ; car, si plus haut nous avons déduit la seconde de la première, réciproquement on peut déduire la première de la seconde ([1]).

Discussion. — Supposons que dans un mouvement uniformément accéléré, la vitesse initiale a soit nulle, c'est-à-dire que le temps soit compté à partir d'un moment où la vitesse du mobile est nulle. Dans ce cas, les formules générales (7) deviennent :

$$(8) \qquad \begin{cases} e = \frac{1}{2}\gamma t^2 \\ v = \gamma t \end{cases}$$

Ce qui montre :

1° *Que les espaces sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir;*

2° *Que les vitesses sont proportionnelles aux temps employés à les obtenir.*

([1]) La vitesse v étant la dérivée e'_t de l'espace par rapport au temps, on peut écrire la deuxième relation (7) sous la forme:

$$e'_t = a + \gamma t$$

En égalant les onctions primitives des deux membres on a :

$$e = e_0 + at + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

On voit qu'en faisant $t = 0$ dans cette formule, on a $e = e_0$: la constante e_0 représente, à l'origine du temps, la distance du mobile à l'origine du mouvement. Si, comme nous l'avons supposé plus haut, on prend pour origine des espaces parcourus le point où se trouve le mobile à l'origine du temps, on a $e_0 = 0$, et la relation devient :

$$e = at + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

Faisons $t=1$ dans les formules (8), il vient $e=\frac{1}{2}\gamma$ et $v=\gamma$ ce qui montre :

3° *Que l'espace parcouru dans la première unité de temps est numériquement égal à la moitié de la vitesse acquise dans ce temps (accélération).*

Quelle est, dans ce cas, la vitesse acquise par un mobile qui a parcouru un espace e?

Pour résoudre ce problème, on tire de la première des formules (8) la valeur inconnue du temps : $t=\sqrt{\frac{2e}{\gamma}}$, et l'on porte cette valeur dans la formule qui donne la vitesse ; d'où :

$$(9) \qquad v=\gamma\sqrt{\frac{2e}{\gamma}}=\sqrt{2\gamma e}$$

Faisons une étude particulière du mouvement uniformément retardé. Soit un mobile primitivement en O (fig. 14) et alors animé d'une vitesse a, se dirigeant suivant X'OX d'un mouvement uniformément retardé avec une accélération négative $-\gamma'$ (γ' étant une quantité positive) les formules (7) deviennent :

X' O A X

Fig. 14.

$$(10) \qquad \begin{cases} e=at-\frac{1}{2}\gamma' t^2 \\ v=a-\gamma' t \end{cases}$$

Tant que $(a-\gamma' t)$ reste plus grand que zéro, par conséquent tant que t reste plus petit que $\frac{a}{\gamma'}$, la vitesse est positive ; c'est-à-dire que le mobile continue à s'avancer dans la direction X'OX. Pour $a-\gamma' t=0$ ou $t=\frac{a}{\gamma'}$, la vitesse devient nulle : le mobile cesse

de s'avancer; et, dès que t devient plus grand que $\frac{a}{\gamma'}$, le binôme $a-\gamma' t$ devenant plus petit que zéro, la vitesse est négative : le mobile rétrograde et se dirige dans le sens XOX'. C'est donc pour la valeur $t=\frac{a}{\gamma}$ que le mobile est le plus loin de O dans le sens OX. Pour trouver cette distance *maximum* OA, il suffit de porter la valeur correspondante du temps $\frac{a}{\gamma'}$ dans la première des formules (10); il vient :

$$e=\frac{1}{2}\frac{a^2}{\gamma'} \tag{11}$$

A partir de ce moment, la vitessse reste négative et devient de plus en plus grande en valeur absolue, quand le temps augmente; c'est-à-dire que le mobile se dirige de plus en plus rapidement dans la direction XOX' (1).

Au bout de combien de temps le mobile repasse-t-il à son point de départ O?

Pour trouver ce temps, comme l'espace parcouru e est redevenu nul à ce moment, posons :

$$at-\frac{1}{2}\gamma' t^2=0$$

Deux valeurs de t satisfont cette équation : $t_1=0$ et $t_2=\frac{2a}{\gamma'}$ la première solution correspond au moment du départ, la seconde au moment du retour en O. On voit que le temps pour aller de O en A et y revenir est le double du temps $\left(\frac{a}{\gamma'}\right)$ nécessaire pour aller de O en A seulement.

(1) Si, à partir du moment où le mobile rétrograde, on compte les vitesses positivement dans le sens de son nouveau mouvement, le mobile doit être considéré comme animé d'un mouvement uniformément accéléré.

Quelle est la vitesse du mobile quand il repasse par son point de départ?

Pour trouver cette vitesse, portons la valeur $\frac{2a}{\gamma'}$ du temps dans la formule qui donne la vitesse; il vient :

$$v = a - \gamma' \times \frac{2a}{\gamma'} = -a$$

ce qui montre que *quand le mobile revient à son point de départ, la vitesse reprend la même valeur absolue.*

Enfin, si l'on dépasse le moment où le mobile est revenu en O (si $t > \frac{2a}{\gamma'}$), l'expression $at - \frac{1}{2}\gamma t^2$ devenant négative, les espaces parcourus sont négatifs, c'est-à-dire qu'ils sont situés du côté OX'. A partir de ce moment, le mobile s'écarte de plus en plus de O du côté de OX'.

14. ACCÉLÉRATION DANS UN MOUVEMENT QUELCONQUE. — Comme nous l'avons fait pour la vitesse, nous allons maintenant généraliser la notion d'accélération pour la rendre applicable à un mouvement quelconque.

Considérons un mouvement varié quelconque, que, pour plus de généralité, nous supposerons curviligne. Soient A*a* (fig. 15) la

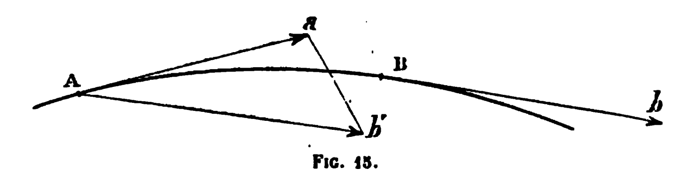


FIG. 15.

vitesse, quand le mobile est au point A, et B*b* la vitesse quand il est en un autre point B; menons par le point A une droite A*b'* égale et parallèle à B*b*. Joignons *ab'*; nous savons que cette droite *ab'* représente en grandeur et en direction la vitesse qu'il faudrait composer avec la vitesse A*a*, pour avoir, d'après la règle du polygone des vitesses, la vitesse A*b'* du mobile

en B. Nous appellerons la vitesse ab' la *variation de vitesse* du mobile pendant qu'il parcourt l'arc AB.

Le rapport de la valeur numérique de la variation de vitesse ab' au temps Δt employé par le mobile pour parcourir l'arc AB est ce qu'on appelle *la valeur de l'accélération moyenne* pendant l'arc AB, parce que, si le mouvement était rectiligne et uniformément varié, ce rapport serait la valeur même de l'accélération; en outre, on appelle *direction de l'accélération moyenne* la direction de la variation de vitesse ab'.

Si nous faisons tendre l'arc AB vers zéro, le point B se rapprochant indéfiniment de A, et, par conséquent, si nous faisons tendre le temps Δt vers zéro, la direction de l'accélération moyenne tend vers une limite que l'on appelle *la direction de l'accélération* en A et sa valeur tend aussi vers une limite qui est, par définition, *la valeur de l'accélération* en A.

Faisons remarquer que, si la courbe décrite par le point mobile est plane, la variation de vitesse ab' et, par conséquent, l'accélération, est située dans le plan de la courbe. Si la courbe est gauche, le plan Aab', qui passe par la direction de la tangente en A et par la direction Ab' d'une tangente en un point B voisin, tend, quand le point B se rapproche indéfiniment du point A vers une position limite, qu'on appelle en géométrie le *plan osculateur* de la courbe en A; l'accélération est dirigée, par conséquent, dans le plan osculateur de la courbe au point A.

Ainsi l'accélération est une grandeur qui a une *valeur*, une *direction* et un *sens*; on représente graphiquement ces trois qualités d'une accélération comme on représente ces trois qualités pour une vitesse.

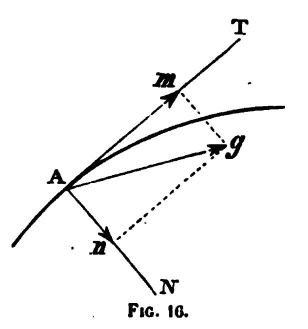


Fig. 16.

15. ACCÉLÉRATION TANGENTIELLE. — ACCÉLÉRATION CENTRIPÈTE. — Menons en un point A (fig. 16) de la trajectoire d'un point mobile la tangente AT et menons aussi la normale principale AN (perpendiculaire dans le plan osculateur à la tangente AT). L'accélération Ag du

mobile est située dans le plan TAN, qui est le plan osculateur à la courbe.

On appelle *accélération tangentielle* l'accélération représentée par la projection A*m* de A*g* sur la tangente AT, et *accélération centripète* l'accélération représentée par la projection A*n* de A*g* sur la normale principale AN.

L'importance des deux définitions que nous venons de donner tient à ce que, si l'on connaît la valeur de l'accélération tangentielle et celle de l'accélération centripète, l'accélération totale A*g* s'obtient en grandeur et en direction par un calcul géométrique des plus simples (1).

Or, nous allons voir qu'il est facile de trouver des formules générales qui permettent d'obtenir les valeurs de l'accélération centripète et de l'accélération tangentielle, d'après la connaissance du mouvement.

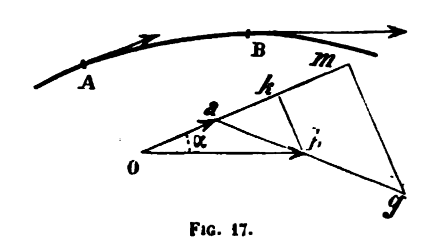


FIG. 17.

Soient O*a* et O*b* deux droites respectivement égales et parallèles aux vitesses du mobile en deux points voisins A et B de la trajectoire (fig. 17), de façon que *ab* représente la variation de vitesse pendant l'arc AB. Abaissons de *b* une perpendiculaire *bk* sur O*a*. En désignant par v et $v+\Delta v$ les valeurs des vitesses O*a* et O*b* et par α l'angle *b*O*a* qu'elles forment entre elles, on a :

$$bk = (v + \Delta v) \sin \alpha$$

$$ak = Ok - Oa = (v + \Delta v) \cos \alpha - v$$

(1) En appelant G, T, C les valeurs de l'accélération totale, de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète, on a :

$$G^2 = T^2 + C^2$$

et en désignant par x l'angle que fait l'accélération totale avec la tangente à la courbe :

$$\text{tang}\, x = \frac{C}{T}$$

Portons suivant les droites ab et ak des longueurs ag et am respectivement égales à $\frac{ab}{\Delta t}$ et à $\frac{ak}{\Delta t}$, en appelant Δt le temps employé par le mobile pour parcourir l'arc AB. Joignons gm; la ligne gm est parallèle à bk, et l'on a : $gm = \frac{bk}{\Delta t}$. Or, quand Δt tend vers zéro, ag devient en grandeur et en direction l'accélération totale en A, et am et gm deviennent l'une l'accélération tangentielle, l'autre l'accélération centripète. On a donc, en appelant T et C les valeurs de celles-ci :

$$C = \lim. \frac{bk}{\Delta t} = \lim. \frac{(v + \Delta v) \sin \alpha}{\Delta t} = \lim. (v + \Delta v) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\Delta e} \cdot \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

en appelannt Δe la longueur de l'arc AB. Or, quand cet arc tend vers zéro

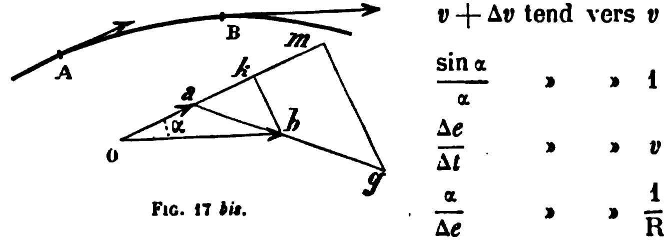


FIG. 17 *bis*.

$v + \Delta v$ tend vers v

$\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ » » 1

$\frac{\Delta e}{\Delta t}$ » » v

$\frac{\alpha}{\Delta e}$ » » $\frac{1}{R}$

en appelant R le rayon de courbure en A.

On a donc :

$$C = \frac{v^2}{R}$$

D'autre part :

$$T = \lim \frac{ak}{\Delta t} = \lim \frac{(v + \Delta v) \cos \alpha - v}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \alpha - \lim \frac{v(1 - \cos \alpha)}{\Delta t}$$

Le premier terme $\left(\lim. \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \alpha\right)$ tend vers la dérivée v'_t de la

vitesse considérée comme fonction du temps, puisque $\cos \alpha$ tend vers l'unité. Le second terme qui peut s'écrire :

$$\lim. v \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\Delta t} = \lim. v \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\Delta e} \cdot \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

tend vers zéro, puisque $\sin \frac{\alpha}{2}$ tend vers zéro et que les autres facteurs tendent vers des valeurs finies. On a donc :

$$T = v'_t$$

Si la trajectoire est rectiligne, le rayon de courbure R étant infini, l'accélération centripète, qui a pour valeur $\frac{v^2}{R}$, est nulle. L'accélération totale se réduit alors à l'accélération tangentielle, dont la valeur est v'_t, et qui est dirigée suivant la ligne droite décrite par le mobile. Si, en outre, le mouvement est uniformément varié ($v = a + \gamma t$), l'accélération totale v'_t est égale à la constante γ, ce qui est bien d'accord avec la définition particulière que nous avons donnée dans ce cas. Mais il est bon de faire remarquer que, si le mouvement uniformément varié était curviligne, ce ne serait que l'accélération tangentielle qui serait constante et égale à γ : l'accélération centripète $\frac{v^2}{R}$ n'étant pas nulle et généralement variable, l'accélération totale serait aussi variable en grandeur et en direction.

La trajectoire étant quelconque, si le mouvement est uniforme, la vitesse v est constante et l'on a $v'_t = 0$: l'accélération tangentielle est nulle, et l'accélération totale se réduit à l'accélération centripète.

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est constamment dirigée vers le centre du cercle et possède une valeur constante, puisque v et R sont invariables.

D'après les expressions générales que nous venons de donner de l'accélération tangentielle, centripète et totale, on voit que l'unité de vitesse et l'unité de temps étant déterminées, il en résulte que l'unité d'accélération est déterminée aussi.

16. COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS. — Supposons un point mobile M se déplaçant d'un mouvement relatif par rapport à un système de points A ; supposons en outre que le système A soit animé d'un mouvement de translation par rapport à un second système de points B. On obtient l'accélération du mouvement de M dans le système B, en composant, suivant la règle du parallélogramme indiquée pour les vitesses, l'accélération OA (fig. 18) du mouvement relatif de M dans A avec l'accélération OB commune à tous les points du système A dans le système B : la diagonale OC du parallélogramme construit sur OA et OB donne en grandeur et en direction l'accélération résultante (1).

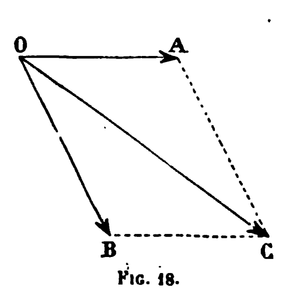


Fig. 18.

(1) Nous nous bornerons à démontrer ce théorème dans le cas simple où les deux mouvements composants sont rectilignes, uniformément accélérés et sans vitesses initiales. C'est surtout, en effet, pour pouvoir démontrer plus loin la règle de la composition des forces que nous parlons ici de la composition des accélérations, et pour cela il suffit de s'appuyer sur le cas simple que nous venons d'indiquer.

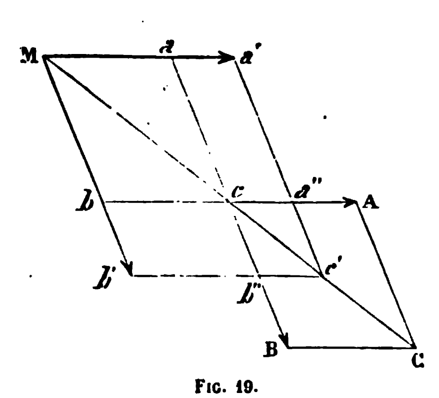


Fig. 19.

Soient $v = \gamma t$ la formule exprimant la vitesse relative au bout du temps t de M dans A, et $v' = \gamma' t$ la formule exprimant la vitesse au bout du temps t des points de A dans le système B. Soient (fig. 18) M*a* et M*b* les

Cette règle se trouverait en défaut si le mouvement du système A dans le système B n'était pas un mouvement de transla-

droites représentant ces deux vitesses. La diagonale Mc du parallélogramme $Macb$ représente la vitesse du mobile M dans le système B. Soient, au bout du temps $(t+\Delta t)$, Ma' la vitesse de M dans A et Mb' la vitesse des points de A dans B. La diagonale Mc' du parallélogramme $Ma'c'b'$ donne la vitesse de M dans B au temps $(t+\Delta t)$. Or les triangles Mbc et $Mb'c'$ sont semblables, car, les lignes bc et $b'c'$ étant parallèles entre elles, comme parallèles toutes deux à Ma, les angles en b et b' sont égaux; d'ailleurs les côtés Mb et bc sont respectivement proportionnels à Mb' et $b'c'$, car on a :

$$Mb=\gamma' t,\quad bc=Ma=\gamma t,\qquad Mb'=\gamma'(t+\Delta t)\quad \text{et}\quad b'c'=Ma'=\gamma(t+\Delta t$$

d'où :

$$\frac{Mb}{Mb'}=\frac{t}{t+\Delta t}=\frac{bc}{b'c'}\ .$$

Il en résulte que les angles en M étant les mêmes pour ces deux triangles les côtés Mc et Mc' coïncident en direction. Ainsi, la direction de la vitesse du mobile M dans B étant toujours la même quels que soient les temps t et Δt, le mouvement est rectiligne.

En outre, on a :

$$\frac{Mc}{Mc'}=\frac{Mb}{Mb'}=\frac{t}{t+\Delta t}\qquad \text{ou}\qquad \frac{Mc}{t}=\frac{M'c'}{t+\Delta t}$$

quels que soient t et Δt; il en résulte que la vitesse de M dans B étant proportionnelle au temps, le mouvement est uniformément accéléré sans vitesse initiale.

Prenons maintenant à partir du point c dans les directions bca'', Mcc' et acb'' des longueurs cA, cC et cB respectivement égales à $\frac{aa'}{\Delta t}$, $\frac{cc'}{\Delta t}$, $\frac{bb'}{\Delta t}$, c'est-à-dire représentant précisément en grandeur et en direction pour cA et cB les accélérations composantes et pour cC l'accélération résultante, puisque aa', bb' et cc' sont les augmentations de vitesse dans les temps Δt.

Joignons BC et CA le quadrilatère $cACB$ est un parallélogramme. Pour le voir remarquons que $cb''c'$ et cBC sont deux triangles semblables, comme ayant même angle en c compris entre côtés respectivement proportionnels. On a, en effet, $cB=\frac{bb'}{\Delta t}$ et, d'autre part, $cC=\frac{cc'}{\Delta t}$ d'où: $\frac{cB}{bb'}=\frac{1}{\Delta t}=\frac{cC}{cc'}$; or, comme bb' est égale a cb'', on a $\frac{cB}{cb''}=\frac{cC}{cc'}$. Il en résulte que BC est paral-

tion, si c'était, par exemple, un mouvement de rotation ou un mouvement encore plus complexe.

Dans le cas particulier où les deux accélérations composantes ont même direction, cette règle donne une résultante qui a même direction que les composantes et qui est égale à leur somme ou à leur différence suivant qu'elles sont de même sens ou de sens inverse.

17. PROJECTION D'UN MOUVEMENT SUR UN AXE. — Considérons un point A en mouvement (fig. 20); menons une droite X'X quelconque et du point A abaissons une perpendiculaire AA' sur la droite X'X : le pied A' de cette perpendiculaire est la projection de A sur l'axe X'X.

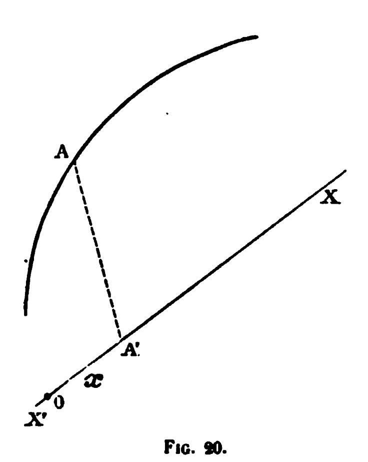


Fig. 20.

Cette projection A' se déplace en même temps que le point A. Prenons sur X'X un point O pour origine du mouvement, et appelons x la distance de A' à l'origine O. Cette quantité x est une fonction du temps t; sa dérivée première x'_t est la vitesse de la projection A', qui décrit l'axe X'X, et sa dérivée seconde x''_t (dérivée de la vitesse x'_t) est l'accélération de la projection A'.

On démontre aisément que la droite représentative de la vitesse de la projection A' est la projection sur l'axe de la droite représentative de la vitesse du point mobile A. En désignant par v la valeur de cette dernière et par α l'angle que fait sa ligne

lèle à $b''c'$ et, par conséquent, à ca''A. On démontre de même que AC est parallèle à $a''c'$ et, par conséquent à cb''B.

Ainsi l'accélération résultante se trouve être la diagonale cC du parallélogramme construit sur les deux accélérations composantes cA et cB.

représentative avec la direction positive de l'axe X'X, on a donc :

(1) $$x'_t = v \cos \alpha$$

On démontre aussi que la droite représentative de l'accélération de la projection A' est la projection sur l'axe de la droite représentative de l'accélération du point mobile A. En désignant par G la valeur de cette dernière et par λ l'angle que fait sa ligne représentative avec la direction positive de l'axe X'X, on a donc :

(2) $$x''_t = G \cos \lambda$$ [1]

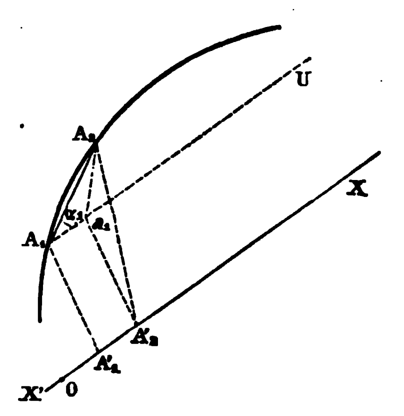


Fig. 21.

(1) Pour démontrer la première de ces deux propositions, remarquons d'abord que, A_1 désignant la position du mobile au temps t et A_2 sa position au temps $(t + \Delta t)$ (fig. 21), la corde A_1A_2 de l'arc décrit par le point mobile pendant le temps Δt a pour projection sur l'axe X'X la droite $A_1'A_2'$ dont la longueur est $x_2 - x_1$. En appelant α_1 l'angle A_2A_1U que fait A_1A_2 avec une parallèle A_1U à X'X menée dans le sens positif, c'est-à-dire l'angle de A_1A_2 avec X'X, et on désignant par a_1 le point ou A_1U perce le plan perpendiculaire à X'X mené par A_2, on a :

$$x_2 - x_1 = A'_1A'_2 = A_1a_1 = A_1A_2 \cos \alpha_1$$

En divisant les deux membres extrêmes de cette égalité par Δt, il vient :

$$\frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{A_1A_2}{\Delta t} \cos \alpha_1$$

Faisons tendre vers zéro le temps Δt ; $\frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$, valeur de la vitesse moyenne de la projection pendant le temps Δ', tend vers la vitesse x'_t de

Considérons trois axes de coordonnées rectangulaires entre eux OX, OY, OZ. Les distances x, y et z à l'origine O des pro-

la projection au temps t; $\frac{A_1A_2}{\Delta t}$, valeur de la vitesse moyenne du mobile pendant le temps Δt, tend vers sa vitesse v au temps t, et, en désignant par α la limite de l'angle α_1, c'est-à-dire l'angle que forme la ligne représentative de la vitesse avec la direction positive de l'axe, il vient:

$$x'_t = v \cos \alpha$$

ce qui est la formule (1) du texte.

Pour démontrer la deuxième proposition, menons par un point M quelconque de l'axe deux droites Ma et Mb, représentant les vitesses du mobile aux temps t et $t + \Delta t$ (fig. 22). Joignons ab; cette droite est l'accroissement de la vitesse pendant le temps Δt. Or, soient a' et b', les projections sur X'X des points a et b; Ma' projection de Ma et Mb' projection de Mb sont les lignes représentatives des vitesses de la projection du mobile aux temps t et $t + \Delta t$, et, par conséquent, $a'b'$ est la ligne représentative de l'accroissement de vitesse de la projection du mobile; or, $a'b'$ est la projection de ab et en appelant λ_1 l'angle que forme ab avec la direction positive de l'axe, on a:

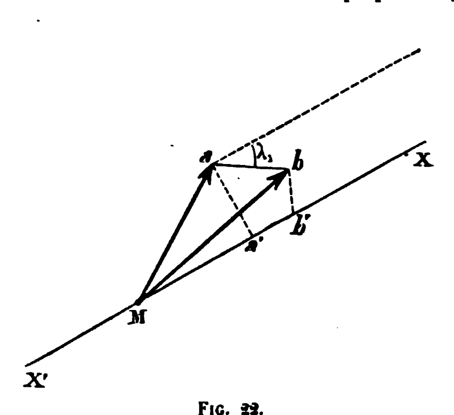


FIG. 22.

$$a'b' = ab \cos \lambda_1$$

en divisant les deux membres de cette égalité par Δt, il vient:

$$\frac{a'b'}{\Delta t} = \frac{ab}{\Delta t} \cos \lambda_1$$

Or, faisons tendre Δt vers zéro; $\frac{a'b'}{\Delta t}$, valeur de l'accélération moyenne pendant le temps Δt de la projection du mobile, tend vers l'accélération de

jections du point A sur ces trois axes sont les coordonnées de ce point. Si les fonctions du temps x, y et z sont connues, le mouvement du point A est complètement déterminé.

En désignant par α, β, γ les angles que forme avec la direction positive des trois axes la ligne représentative de la vitesse du mobile, en appelant v la valeur de celle-ci, et enfin en désignant par x_t', y_t', z_t' les dérivées par rapport au temps des fonctions x, y et z, on a, d'après la formule (1) :

$$(3) \qquad x_t' = v \cos\alpha \qquad y_t' = v\cos\beta \qquad z_t' = v\cos\gamma$$

En appliquant la relation connue

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

on tire de là :

$$(4) \qquad v^2 = x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2.$$

De même, en désignant par λ, μ, ν, les angles que forme avec la direction positive des trois axes la ligne représentative de l'accélération du mobile, en appelant G la valeur de celle-ci, et enfin en désignant par x_t'', y_t'', z_t'' les dérivées secondes par rapport au temps des fonctions x, y, z, on a, d'après la formule (2) :

$$(5) \qquad x_t'' = G\cos\lambda \qquad y_t'' = G\cos\mu \qquad z_t'' = G\cos\nu$$

celle-ci au temps t, dont la valeur, comme nous le savons, est égale à x''_t; d'autre part $\frac{sb}{\Delta t}$, valeur de l'accélération moyenne du mobile pendant le temps Δt, tend vers la valeur G de l'accélération totale au temps t; en désignant par λ la limite de l'angle λ_1, c'est-à-dire l'angle que fait la ligne représentative de l'accélération totale du mobile avec la direction positive de l'axe X'X, on a donc :

$$x''_t = G\cos\lambda$$

ce qui est la formule (2) du texte.

On tire de là, comme ci-dessus :

$$(6) \qquad G^2 = x_t''^2 + y_t''^2 + z_t''^2$$

Ces relations font connaître la valeur, la direction et le sens soit de la vitesse soit de l'accélération d'un point mobile quand on connait le mouvement des projections de ce point. En effet, si les fonctions du temps x, y et z sont données, on connaît par dérivation les premiers membres des égalités (3) et (5) et les seconds membres des égalités (4) et (6); ces dernières font connaître alors la valeur de la vitesse ou de l'accélération et, ces valeurs étant connues, les égalités (3) ou (5) déterminent les angles α, β, γ, ou λ, μ, ν, c'est à dire la direction de la vitesse ou de l'accélération.

DYNAMIQUE

La *Dynamique* est l'étude des forces et des mouvements qu'elles produisent.

La notion de *force* ainsi que les effets qui résultent de l'action des forces ont été révélés par l'observation et l'expérience. En cela la Dynamique est une branche de la Physique. Mais les résultats expérimentaux ont pu être résumés en cinq lois ou *principes fondamentaux* qui suffisent pour qu'on puisse en déduire tout le reste de la Dynamique par l'analyse mathématique seule, sans qu'il soit nécessaire de recourir à de nouvelles expériences.

Nous allons exposer ces cinq principes fondamentaux, montrer comment ils sont justifiés par l'expérience et en tirer les conséquences les plus importantes.

C'est surtout à Galilée que revient l'honneur d'avoir établi les trois premiers et, par là, d'avoir fondé sur des bases solides la Mécanique rationnelle.

Dans ce qui va suivre nous appellerons *point matériel* une portion de matière assez petite pour qu'on puisse négliger ses dimensions et l'assimiler à un point géométrique dans l'étude de son mouvement.

1. PREMIER PRINCIPE. — INERTIE DE LA MATIÈRE. — La matière est *inerte,* c'est à dire qu'elle ne peut d'elle-même changer ni son état de repos, si elle est en repos, ni son état de mouvement, si elle est en mouvement.

Quand aucune cause extérieure n'agit sur un point matériel, son mouvement est nécessairement *rectiligne* et *uniforme.*

En effet, dire que la matière est inerte, c'est dire que, dans

ce cas, il n'y a aucune raison pour que le point matériel dévie soit à droite soit à gauche de la direction qu'il vient de parcourir: tous les éléments de la trajectoire ayant la même direction, le mouvement est *rectiligne*.

D'autre part, c'est dire aussi qu'il n'y a aucune raison pour que, dans un certain intervalle de temps, le mobile parcoure un espace plus grand ou plus petit que dans l'intervalle précédent de même durée : dans des intervalles de temps égaux le mobile parcourant des espaces égaux, quelque petits que soient les intervalles considérés, le mouvement est *uniforme*.

Le principe de l'inertie conduit donc à cette conséquence qui peut remplacer le principe lui-même :

Quand aucune cause extérieure n'agit sur un point matériel, celui-ci conserve indéfiniment la même vitesse en grandeur et en direction.

Le cas où le corps est au repos est compris dans cet énoncé · il correspond à une vitesse nulle.

Voici maintenant comment l'expérience justifie ce principe. Il est assez difficile de soustraire complètement un corps à l'action de causes extérieures, et, en particulier, à l'attraction qu'exerce la Terre sur lui et qui le fait tomber. On arrive pourtant à détruire l'effet de cette attraction en faisant reposer le corps sur un obstacle, dont la résistance annule l'attraction terrestre. Ainsi, posons une bille sur un plan horizontal ; elle peut y rester indéfiniment au repos. Mais communiquons-lui un mouvement en la choquant ; la bille roulera en ligne droite d'un mouvement à peu près uniforme. Pourquoi ne l'est-il pas tout à fait, comme le veut le principe de l'inertie ? C'est qu'il reste encore une cause extérieure qui agit sur le corps et qui tend à diminuer constamment la vitesse : le *frottement*. Or celui-ci est d'autant plus faible que la bille et le plan sur lequel elle roule sont mieux polis ; aussi constatons-nous que plus le poli est parfait plus le mouvement se rapproche d'être uniforme : la bille qui s'arrête assez vite quand elle roule sur du sable, s'arrête moins vite sur de la terre battue et peut rouler très longtemps sur la glace si elle ne rencontre aucun obstacle. Nous voyons bien par là que, si le frottement et aussi la résistance de l'air au

mouvement étaient complètement supprimés, le mouvement serait exactement rectiligne et uniforme.

2. **FORCE.** — On donne le nom de *force* à *toute cause extérieure qui vient modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps.*

Si un corps en mouvement n'est soumis à aucune force, nous venons de voir que le mouvement est rectiligne et uniforme. Nous devons donc en conclure que, si un corps possède soit un mouvement curviligne, soit un mouvement varié, une force agit sur lui. Il en est encore de même quand un corps passe de l'état de repos à l'état de mouvement ou inversement de l'état de mouvement à l'état de repos : une force a agi, pendant un certain temps, qui peut être très court du reste.

On distingue dans une force quatre qualités : 1° son *point d'application*, 2° sa *direction*, 3° son *sens*, 4° son *intensité*.

Le *point d'application*, comme son nom l'indique, est le point du corps sur lequel la force agit directement. Par exemple, quand on tire un corps par un fil tenu à la main, comme c'est la tension du fil qui est ici la force agissant sur le corps, le point d'application de cette force est le point d'attache du fil.

La *direction* et le *sens* de la force sont la direction et le sens suivant lesquels la force sollicite le corps à se mouvoir. Dans l'exemple précédent, c'est la direction du fil lui-même qui est la direction de la force, et son sens est celui du corps vers la main. D'une façon plus générale, si une force agit seule sur un point matériel au repos, la direction de celle-ci et son sens sont la direction et le sens du mouvement que prend le mobile.

L'*intensité* ou grandeur de la force a d'abord été appréciée par l'effort musculaire que nous devons faire pour vaincre cette force. C'est ainsi qu'il faut faire un effort plus grand pour soulever un pavé que pour soulever un petit cailloux ; nous en concluons que la force qui attire le pavé vers le sol a une intensité plus grande que celle qui attire le cailloux.

Mais il convient de préciser cette notion de l'intensité d'une force et de montrer que celle-ci est une grandeur mesurable.

3. **MESURE DES FORCES.** — On dit que deux forces sont *égales*

quand elles produisent le même effet dans les mêmes circonstances.

On dit qu'une force B est *double* d'une force A, quand B produit, dans les mêmes circonstances, le même effet que *deux* forces égales à A appliquées au même point que B, agissant ensemble suivant la même direction et dans le même sens que B.

On définit de même une force triple, quadruple,... décuple... centuple d'une autre force : les forces sont donc des grandeurs mesurables.

La définition d'une force multiple d'une autre force conduit tout naturellement à la définition de deux forces qui sont entre elles dans un rapport fractionnaire. Supposons, en effet, qu'une force F soit égale à n fois une force φ et qu'une autre force F' soit égale à n' fois la même force φ, en désignant par n et n' des nombres entiers ; on dit que ces deux forces sont entre elles dans le rapport $\frac{n'}{n}$.

Mais il n'existe pas toujours une commune mesure φ entre deux forces. Supposons qu'une force φ soit exactement contenue n fois dans la force F et que la force F' soit plus grande que $n'\varphi$ et plus petite que $(n'+1)\varphi$, en désignant par n et n' des nombres entiers : le rapport des forces F' et F est compris entre les rapports $\frac{n'}{n}$ et $\frac{n'+1}{n}$. Or, choisissons de la force F une fraction φ de plus en plus petite, de façon que le nombre n devienne de plus en plus grand, ainsi que n' ; les deux fractions $\frac{n'}{n}$ et $\frac{n'+1}{n}$, ne différant que par la quantité $\frac{1}{n}$, qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, tendent vers une même limite ; le rapport $\frac{F'}{F}$, toujours compris entre ces deux fractions, a pour valeur cette limite, qui peut être un nombre incommensurable.

Mesurer une grandeur, c'est chercher combien de fois elle contient une grandeur de *même espèce* prise comme *unité*, ou combien elle contient de fractions de cette unité.

Dans le cas actuel, il faut choisir comme unité une force bien déterminée. Le *poids* d'un corps étant une force qui ne varie pas à un même endroit, si le corps reste identique à lui-même, on a souvent pris comme unité de force le poids, à un endroit donné d'un corps déterminé.

Par exemple, en France on s'est servi longtemps et l'on se sert encore comme unité de force du *gramme-poids* dont voici la définition :

Le gramme-poids est le poids dans le vide, à Paris et au niveau de la mer, d'un centimètre cube d'eau pure à la température de 4° (1).

On emploie en outre, comme unités secondaires, conformément au système métrique, les multiples du gramme par les diverses puissances de 10, tels que le *décagramme*, l'*hectogramme*, le *kilogramme*...., le *mégagramme* ou *tonne métrique* (mille kilogrammes).

Le kilogramme-poids, unité très souvent employée, est, dans les circonstances indiquées plus haut, le poids d'un décimètre cube d'eau. La tonne métrique est le poids d'un mètre cube d'eau.

On se sert aussi, comme unités secondaires des sous-multiples du gramme par les diverses puissances de 10, tels que le *décigramme*, le *centigramme*, le *milligramme*. Ce dernier est le poids d'un millimètre cube d'eau.

Aujourd'hui, dans tous les pays, il est convenu d'employer en Physique comme unité de force la *dyne* dont nous donnons plus loin la définition (T. Ier, L. I, Chap. II, § 3, p. 50), et comme unités secondaires ses multiples par les puissances de 10, tels que la *kilodyne*, la *mégadyne*, etc.

(1) Cette définition, pour être précise, doit indiquer la température de l'eau, car un même volume d'une même substance présente un poids un peu différent suivant sa température. On a choisi 4°, parce que c'est à cette température qu'un même volume d'eau présente le plus grand poids. Comme dans l'air, un corps perd, en apparence, une portion de son poids égale à celui de l'air déplacé, et comme ce dernier poids varie un peu suivant les circonstances atmosphériques, l'énoncé indique que c'est le poids de l'eau dans le vide. Enfin le poids d'un même corps change un peu avec la latitude et l'altitude ; de là la nécessité de préciser ces deux conditions.

4. ÉQUILIBRE DES FORCES. — On dit que plusieurs forces *se font équilibre* quand on peut supprimer l'ensemble de ces forces sans que l'état du corps se trouve modifié, autrement dit, quand elles se détruisent mutuellement.

Il est évident que deux forces qui ont même point d'application, qui sont égales entre elles et qui sont de même direction mais de sens inverses, se font équilibre, et qu'elles ne sauraient se faire équilibre si elles étaient inégales.

Nous verrons plus loin quelles sont les conditions nécessaires pour que plusieurs forces se fassent équilibre (1).



Fig. 23.

5. DYNAMOMÈTRE. — On donne le nom de *dynamomètres* aux instruments qui servent à mesurer les forces.

Le principe de ces instruments consiste à opposer à la force qu'on veut mesurer une force variable à volonté et constamment connue jusqu'à ce qu'il y ait équilibre ; les deux forces sont alors égales entre elles, et la valeur de la force connue donne la mesure de l'autre.

La force antagoniste, qu'on fait agir ainsi, est presque toujours l'élasticité d'un ressort. Un ressort en acier a l'une de ses extrémités fixe ; à l'autre extrémité on applique la force qu'on veut mesurer. Sous l'influence de celle-ci, le ressort se déforme, et, par suite de cette déformation, il naît des forces élastiques qui tendent à faire reprendre au ressort sa forme primitive ; la grandeur de ces forces élastiques croît avec la déformation, et il arrive un moment où elles font équilibre à la force qu'on a fait agir sur le ressort. Dans cet état d'équilibre, la déformation du ressort

(1) L'étude de l'équilibre des forces a reçu le nom de *Statique*. Nous ne séparerons pas cette étude du reste de la Dynamique.

donne la valeur de la force quand on a, au préalable, gradué l'instrument, c'est-à-dire, quand on connaît les déformations obtenues par des forces de 1, 2, 3.... *n* unités.

On a beaucoup varié la forme des dynamomètres. Le *peson* (fig. 23), très employé pour faire des pesées grossières, est un des plus simples.

Nous nous bornerons à décrire complètement ici le plus parfait de ces instruments, le dynamomètre de Poncelet perfectionné par M. Morin.

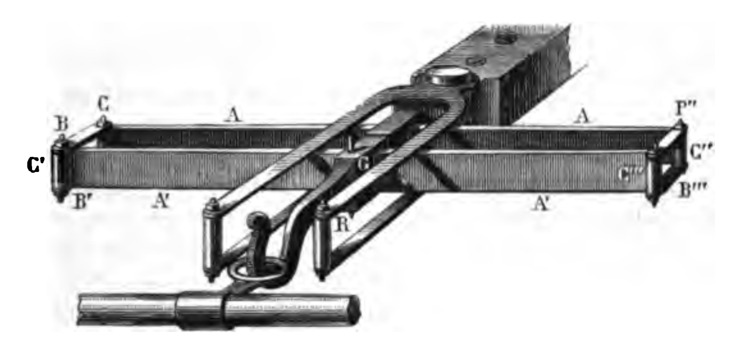


Fig. 24.

Ce dynamomètre (fig. 24) se compose de deux lames d'acier flexibles AA et A'A' identiques entre elles, placées parallèlement l'une à l'autre et reliées par quatre lames ou *brides* B, B', B'', B''', s'articulant aux lames AA et A'A' par des boulons C, C', C'', C'''.

L'ensemble forme ainsi un rectangle articulé, les extrémités des lames AA et A'A' n'étant pas reliées invariablement aux brides B, B', B'', B''', mais pouvant tourner librement autour des axes constitués par les boulons.

Le milieu de la lame AA est fixé par une griffe ; la lame A'A' porte une seconde griffe G à laquelle est appliquée la force qu'on veut mesurer (poids, effort de traction d'un cheval, etc....). Sous l'influence de celle-ci, les deux ressorts AA et A'A' se courbent et un crayon R fixé à la griffe G trace sur une feuille de papier placée au-dessous un trait dont la longueur représente la défor-

mation des ressorts. La disposition de ce dynanomètre est telle que la longueur du trait de crayon est proportionnelle à la force que l'on fait agir; c'est-à-dire que si une force de dix kilogrammes-poids donne un trait de un millimètre de longueur, une force de cent kilogrammes-poids donne un trait de dix millimètres. Le calcul avait fait prévoir ce résultat et l'expérience l'a vérifié. Il est dès lors facile de graduer cet instrument. L'ayant disposé verticalement, la lame A'A' en bas, on accroche à la griffe inférieure G un poids connu, cent kilogrammes par exemple, on mesure la longueur *a* du trait de crayon obtenu; à la centième partie de cette longueur *a* correspond une force d'un kilogramme-poids.

Supposons maintenant que dans une expérience on trouve un trait qui soit les 0, 53 de la longueur *a* ; la force qui a agi vaut 53 kilogrammes-poids.

Les dynamomètres à ressort ne sont pas les seuls instruments employés pour mesurer les forces; la balance est l'instrument par excellence pour comparer non seulement les poids entre eux mais même pour comparer entre elles les forces les plus variées.

Nous verrons plus loin, du reste (T. Ier, L. I, Chap. II, p. 50), que la mesure de l'accélération du mouvement que produit une force en agissant sur un corps jointe à la mesure de la masse de celui-ci est le seul moyen direct d'obtenir la valeur absolue de cette force.

6. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FORCES. — On représente graphiquement une force comme une vitesse ou une accélération.

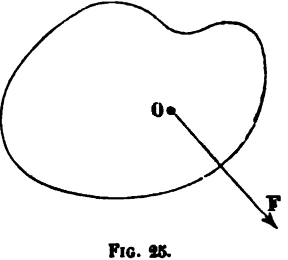


FIG. 25.

On trace (fig. 25) une droïte OF, partant du point d'application O de la force, suivant la direction de celle-ci, se terminant par une flèche, pour indiquer le sens dans lequel elle agit, et enfin d'une longueur OF égale à autant de fois une unité de longueur déterminée (la même pour représenter toutes les forces d'un problème) qu'il y a d'unités dans la valeur numérique de la force.

7. MOUVEMENT QUI SUCCÈDE A UN MOUVEMENT VARIÉ QUAND LA FORCE CESSE D'AGIR. — Quand un point matériel possède un mouvement curviligne ou varié, une force agit sur lui. Qu'arrivera-t-il si la force vient à cesser d'agir tout à coup? Le principe de l'inertie nous l'apprend: le mobile continuera son chemin en conservant la même vitesse en grandeur et en direction. Le mouvement devient donc rectiligne et uniforme et *la vitesse de ce mouvement rectiligne est, en direction et en valeur numérique, celle du mouvement curviligne ou varié au moment où la force cesse d'agir.*

Ainsi, la trajectoire rectiligne AB (fig. 26) est tangente à la courbe OA décrite par le mobile au point A où se trouve celui-ci quand la force cesse d'agir.

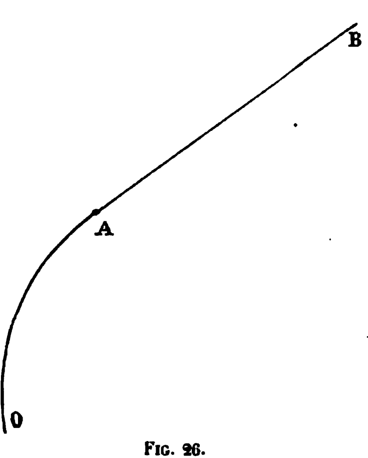


Fig. 26.

L'expérience justifie pleinement cette déduction du principe de l'inertie. Par exemple, quand on fait tourner une fronde contenant une pierre, celle-ci décrit un cercle dont le poignet du frondeur est le centre et dont la longueur des cordes de la fronde est le rayon. La pierre, se mouvant en ligne courbe, est soumise à une force, qui est la tension des cordes. Mais, vient-on à lâcher ces cordes, la pierre, n'étant plus soumise à aucune force (si nous négligeons son poids), part en ligne droite et *suivant la tangente au cercle* décrit par elle au point où elle se trouvait quand on a lâché les cordons.

La machine d'Atwood, que nous décrirons plus loin, permet de faire une expérience montrant l'exactitude de la proposition pour les valeurs numériques des vitesses. (T. I[er], L. II, Chap. II § 5 p. 73).

8. DEUXIÈME PRINCIPE. — *L'effet d'une force est indépendant*

de l'état de repos ou de mouvement du point matériel auquel elle est appliquée.

Tel est le deuxième principe de dynamique ; mais cet énoncé un peu succinct demande quelques explications pour être bien compris.

Supposons un point matériel M (fig. 27) animé d'un mouvement rectiligne et uniforme (par conséquent, qui n'est soumis à aucune force) et d'autres points A, B, C, D... formant un système animé d'un mouvement de translation, par rapport auquel M est au repos.

Fig. 27.

Faisons maintenant agir une force sur le point matériel M seulement ; le principe dit que *le mouvement relatif que prend* M, *par rapport aux autres points* A, B, C, D... *est absolument le même, quelle que soit la vitesse, en grandeur et en direction du mouvement de translation du système* A, B, C, D... *dont* M *faisait partie.*

En particulier, le mouvement relatif est le même que si le point M, étant primitivement au repos, les points A, B, C, D... restaient immobiles.

L'expérience démontre directement ce principe.

Laissons tomber un corps dans l'intérieur d'un wagon en marche, en choisissant le moment où il est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, comme cela a lieu entre deux stations, quand la voie est droite. Le mouvement relatif du corps qui tombe, *par rapport aux parois du wagon*, est absolument indépendant de la vitesse de celui-ci et de la direction de son mouvement ; le mouvement relatif du corps est encore le même quand le wagon est au repos sur la voie. Ainsi le poids du corps, force qui le fait tomber, produit un effet qui est indépendant de la vitesee du train, qui constitue ici le système de translation dont le corps faisait partie avant sa chute (1).

(1) C'est à Galilée que l'on doit la première expérience démontrant ce principe. Il faisait tomber une pierre du haut du mât d'un bateau animé d'un

D'après ce principe, quelle que soit la force qui agit sur un point matériel, on obtient la position de celui-ci en composant, suivant la règle du parallélogramme, le mouvement qu'il prendrait en étant soumis à la même force, s'il partait de l'état de repos, avec le mouvement de translation rectiligne et uniforme d'un système possédant en grandeur et en direction la vitesse initiale du point matériel.

En composant les vitesses de ces deux mouvements, à un moment quelconque, on obtient la vitesse réelle du mobile à ce moment.

9. MOUVEMENT PRODUIT PAR UNE FORCE CONSTANTE. — *Une force constante en grandeur et en direction agissant sur un point matériel sans vitesse initiale, ou animée d'une vitesse initiale dans la direction de la force, donne naissance à un mouvement rectiligne uniformément varié.*

Cette proposition est une conséquence du principe précédent, comme nous allons le montrer.

Soit un point matériel M animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse a. Imaginons un système A de points animés d'un mouvement de translation, ayant tous la même vitesse

mouvement rectiligne et uniforme; la pierre tombait au pied du mât exactement à la place où elle serait tombée si le bateau était resté immobile. Avant Galilée tout le monde croyait que la pierre devait tomber en arrière du mât à une distance égale à celle dont s'était avancé le navire pendant la chute. Rien ne peut mieux montrer l'utilité de l'expérience pour acquérir des notions exactes sur le monde physique, et rectifier des conceptions purement spéculatives.

Faisons remarquer, en outre, qu'on ne s'aurait objecter à ces expériences que, le bateau ou le wagon participant au mouvement de la Terre, leur mouvement réel dans l'espace n'est pas leur mouvement apparent, car les arcs décrits par un point du sol, soit dans le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même, soit dans son mouvement de rotation autour du Soleil, sont d'un si grand rayon qu'on peut, pendant la durée de l'expérience, considérer le mouvement du sol comme rectiligne et uniforme. Ce mouvement se composant avec celui du train sur les rails, ou du bateau sur le fleuve, donne encore un mouvement de translation rectiligne et uniforme du wagon ou du bateau dans l'espace, mouvement dont la vitesse, en grandeur et en direction, dépend essentiellement de celle du mouvement relatif par rapport au sol. La conclusion de l'expérience reste toujours la même.

en grandeur et en direction que le point M ; ce dernier point est au repos par rapport au système A.

Faisons agir maintenant sur M une force constante en grandeur et en direction, cette direction étant celle de la vitesse du système A. Le point M se mettra en mouvement par rapport à ce système dans la direction de la force F, par conséquent, dans celle du mouvement primitif, et suivant le sens de la force, qui peut être le même que le sens du mouvement ou contraire à celui-ci.

Au bout d'une unité de temps, M aura acquis une certaine vitesse relative, que nous désignerons par γ, de façon que la vitesse abrolue de M sera au bout de la première unité de temps $a+\gamma$. Cette quantité γ est positive, si, la force étant dans le sens du mouvement du système, la vitesse relative de M est de même sens que celui-ci, négative si, la force ayant un sens opposé, la vitesse relative de M est de sens contraire à celle du système.

Si, au bout de cette première unité de temps, la force cessait d'agir sur M, ce point matériel continuerait à s'avancer d'un mouvement uniforme avec une vitesse absolue $a+\gamma$. Imaginons maintenant un second système B de points, animés tous de la vitesse $a+\gamma$ dans la même direction et le même sens que M ; ce dernier point ne se déplacerait pas dans ce système.

Mais, si la force, au lieu de cesser au bout de la première unité de temps, continuait à agir pendant une seconde unité de temps en restant la même en grandeur et en direction, le point M, d'après le deuxième principe fondamental, acquérerait au bout de cette deuxième unité de temps, dans le deuxième système B, la même vitesse relative γ qu'au bout de la première unité de temps dans le premier système A. Sa vitesse absolue serait donc $a+\gamma+\gamma$ ou $a+2\gamma$.

Continuons le même raisonnement ; remarquons que, si la force cessait d'agir au bout de la deuxième unité de temps, M prendrait un mouvement uniforme avec la vitesse $a+2\gamma$ que, si nous imaginons un troisième système C, de points animés tous de la vitesse constante $a+2\gamma$ dans la même direction et le même sens que M, ce point ne se déplacerait pas dans ce

système. Mais si la force, au lieu de cesser d'agir au bout de la deuxième unité de temps, continuait à agir pendant une troisième unité de temps, le point M, d'après le même principe fondamental, acquérerait au bout de cette troisième unité de temps, dans le troisième système C, la même vitesse relative γ qu'au bout de la première unité de temps dans le premier système A. Sa vitesse absolue serait donc $a+2\gamma+\gamma$ ou $a+3\gamma$, et, ainsi de suite.

On voit, en poursuivant ce raisonnement, que, si la force agit pendant t unités de temps, la vitesse acquise par M, sera $a+\gamma t$. Ce résultat subsistant, quelque petit que soit le temps pris ici pour unité, le mouvement est uniformément varié, puisque dans des intervalles de temps égaux la vitesse varie de quantités égales, quelque petits que soient les intervalles considérés.

Si la force agit dans le sens de la vitesse initiale du point M, le mouvement est uniformément accéléré, puisque l'accélération γ est positive. Il est uniformément retardé, si la force agit en sens inverse de la vitesse initiale, puisque l'accélération γ est alors négative.

Nous verrons, à propos de la pesanteur, comment l'expérience justifie cette conséquence si importante du deuxième principe de la Dynamique.

10. ACTION D'UNE FORCE CONSTANTE AGISSANT SUR UN MOBILE ANIMÉ D'UNE VITESSE DE DIRECTION QUELCONQUE. — Quand une force constante en grandeur et en direction agit sur un point matériel, et que la vitesse initiale de ce mobile n'est plus dans la direction de la force, la trajectoire n'est plus une ligne droite. Le deuxième principe de la Dynamique permet de démontrer que cette trajectoire est une parabole.

Prenons deux axes de coordonnées rectangulaires OX et OY passant par le point de départ O du mobile (fig. 28), dans le plan déterminé par la direction de la force et de la vitesse initiale, OY étant parallèle à la direction de la force. Soit α l'angle que forme avec OX la direction OT de la vitesse initiale, et soit a sa valeur.

Si aucune force n'agissait sur le point matériel mobile, il décrirait d'un mouvement uniforme la ligne OT, et, au bout

d'un temps t après son départ de l'origine O, on aurait la valeur at pour l'espace parcouru OL. Par conséquent, les coordonnées x et y du point seraient données par

$$x = at \cos \alpha \qquad\qquad y = at \sin \alpha$$

Imaginons maintenant un système A, dont tous les points seraient animés de la même vitesse que le mobile en grandeur et en direction ; celui-ci ne se déplacerait pas dans ce système. Mais, si le point matériel est soumis à une force F parallèle à OY, et dirigé de Y vers O, il prendra un mouvement relatif dans le système A, qui, en vertu du deuxième principe, sera le même que si le mobile était primitivement au repos, le système A restant immobile. Ce mouvement relatif sera donc uniformément accéléré, et, si γ est son accélération, le mobile, au bout du temps t, aura, dans le système A, parcouru parallèlement à OY, et dans le sens de YO, un espace égal à $\frac{1}{2}\gamma t^2$.

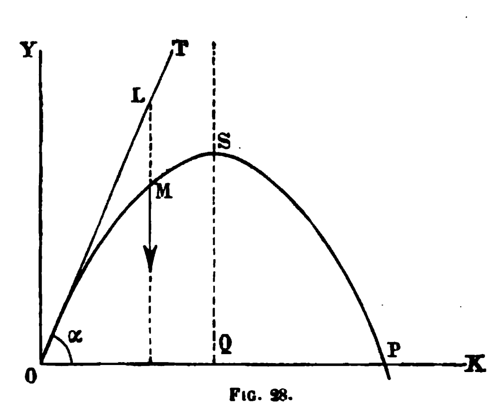


Fig. 28.

Il résulte de là que la véritable ordonnée du mobile au temps t est celle ($at \sin \alpha$) qu'il posséderait si aucune force n'agissait sur lui, diminuée de $\frac{1}{2}\gamma t^2$. On a donc, pour les coordonnées réelles du point mobile :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = at \cos \alpha \\ y = at \sin \alpha - \frac{1}{2}\gamma t^2 \end{cases}$$

Si l'on élimine le temps t entre ces deux égalités, on obtiendra entre x et y une relation, qui est l'équation de la trajectoire. Or cette élimination donne :

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - x^2 \frac{\gamma}{2a^2 \cos^2 \alpha} \tag{2}$$

On reconnaît là l'équation d'une parabole du second degré, dont l'axe SQ est parallèle à OY et passe par le point d'abscisse $\frac{a^2 \sin 2\alpha}{2\gamma}$.

Comme le poids d'un corps est une force verticale et constante en grandeur, l'équation (2) représente la trajectoire d'un projectile qui serait lancé dans le vide avec une vitesse de valeur a faisant un angle α avec l'horizon. Malgré la présence de l'air, la trajectoire d'un obus lancé par une bouche à feu ne s'éloigne pas beaucoup d'être une parabole (1).

(1) Le point P où la parabole coupe de nouveau l'axe OX a pour abscisse $\frac{a^2 \sin 2\alpha}{\gamma}$. Pour de mêmes valeurs de a et de γ, cette quantité devient maximum pour $\sin 2\alpha = 1$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$. C'est donc sous l'angle de 45° qu'il faut braquer une pièce à feu pour qu'elle porte le plus loin possible.

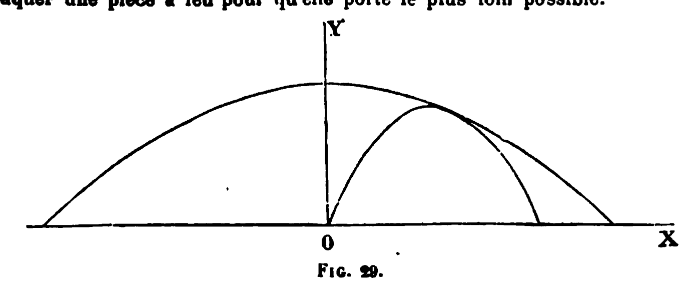


Fig. 29.

Si l'on considère dans l'égalité (2) l'angle α comme variable et qu'on cherche le lien des intersections successives des paraboles pour lesquelles a et γ conservent la même valeur, on trouve pour ce lien une autre parabole du second degré ayant OY pour axe et O pour foyer; son équation est en effet :

$$y = \frac{a^2}{2\gamma} - x^2 \frac{\gamma}{2a^2}$$

11. ACCÉLÉRATION PRODUITE PAR UNE FORCE QUELCONQUE. — Une force F variable en grandeur ou en direction, agissant sur un point matériel animé d'une vitesse quelconque, donne lieu, à chaque instant, à une accélération qui est la même que celle que produirait, en agissant sur le même corps partant de l'état de repos, une force qui aurait constamment l'intensité, la direction et le sens de la force F à l'instant considéré. C'est ce que le deuxième principe de la Dynamique permet de démontrer.

Considérons, pour cela, un point matériel M possédant au temps t une vitesse absolue CH (fig. 30) quelconque, du reste. Imaginons un système A dont tous les points seraient animés de vitesses égales et parallèles à CH; si, à partir du temps t aucune force n'agissait sur le mobile M, il resterait au repos par rapport au système A. Mais supposons qu'à partir du temps t une force CL agisse sur le mobile et soit constante en grandeur et en direction pendant le temps Δt. En vertu du deuxième principe, le mobile M prendra dans le système A le même mouvement que si M était primitivement au repos, le système A restant immobile ; c'est-à-dire qu'il prendra dans le système A pendant le temps Δt un mouvement relatif rectiligne et uniformément accéléré, caractérisé par une certaine accélération γ, dont la valeur ne dépend que de la gran-

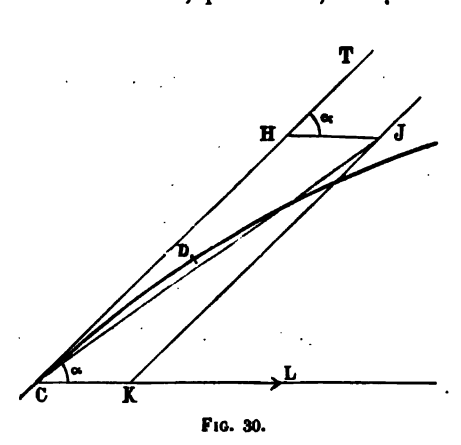


Fig. 30.

Toutes les trajectoires paraboliques de mobiles lancés avec la vitesse initiale a, sont tangentes intérieurement à cette parabole (fig. 29), par conséquent, quel que soit l'angle α sous lequel on braque une pièce de canon lançant un projectile avec la vitesse a, les points qui sont situés en dehors de cette parabole ne pourront pas être atteints ; aussi les artilleurs donnent-ils à cette courbe le nom de *parabole de sûreté*.

deur de la force et de la nature du mobile. Au bout du temps Δt le mobile aura donc acquis par rapport au système A une vitesse relative CK, dans la direction de la force CL, et égale à $\gamma\Delta t$. La vitesse absolue du mobile au temps $t+\Delta t$ s'obtiendra, par conséquent, en composant suivant la règle du parallélogramme, la vitesse absolue CH acquise au temps t avec la vitesse relative CK.

On voit par là que la variation de vitesse du mobile pendant le temps Δt est précisément CK. Par conséquent, la direction de l'accélération moyenne pendant le temps Δt est la direction CK de la force CL, et la valeur de l'accélération moyenne est $\frac{\gamma\Delta t}{\Delta t}$ ou γ. Ceci, subsistant quelque petit que soit l'intervalle de temps considéré Δt, reste encore vrai quand cet intervalle devient nul. L'accélération moyenne devenant alors l'accélération totale, celle-ci possède la direction et le sens de la force qui agit sur le mobile, et sa valeur est γ.

Faisons remarquer, enfin, que nous n'avons supposé la force F constante en grandeur et en direction que pendant le temps Δt, et, comme ce temps peut être nul sans que ce que nous venons d'établir cesse d'être exact, l'accélération produite est la même, que la force F soit constante ou variable en grandeur ou en direction.

12. **TROISIÈME PRINCIPE.** — *L'effet produit par une force agissant sur un point matériel est indépendant de l'effet des autres forces agissant sur ce point.*

Cet énoncé, comme celui du principe précédent, a besoin d'une explication pour être bien compris.

Supposons qu'un point matériel M soit soumis à l'action de plusieurs forces et que, sous l'influence de celles-ci, il soit animé d'un certain mouvement. Imaginons un système A de points animés de vitesses constamment égales en grandeur et en direction à celle du point M (qui peut varier en grandeur et en direction, bien entendu). Le système A est animé d'un mouvement de translation, et le point M est au repos dans ce système. Faisons agir maintenant sur M, et sur lui seulement, une nouvelle force F. Le principe dit que *le mouvement que prend le*

point M *dans le système* A, *sous l'influence de la nouvelle force* F, *est absolument indépendant du mouvement de ce système*, par conséquent, de l'effet des autres forces agissant sur le point M. En particulier, le mouvement que prend M dans le système A est le même que si aucune autre force n'agissait sur M, celui-ci étant primitivement immobile, et tous les points du système A restant au repos.

Sans être impossible, la démonstration expérimentale directe de ce principe se heurterait à de très grandes difficultés; aussi n'a-t-elle jamais été faite. On admet le principe parce que ses conséquences sont vérifiées par l'expérience.

13. PROPORTIONNALITÉ DES FORCES AUX ACCÉLÉRATIONS. — Nous avons vu qu'une force en agissant sur un mobile lui communique une certaine accélération. La valeur de cette accélération dépend de la valeur de la force; or, le troisième principe de la Dynamique permet de démontrer que, si plusieurs forces agissent successivement sur un même point matériel, elles produisent des accélérations dont les valeurs $\gamma, \gamma', \gamma''$.., sont proportionnelles à celles des forces F,F',F''...; c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = \dots$$

Pour démontrer ce théorème, supposons qu'un point matériel M fasse partie d'un système de points A au repos. Faisons agir sur M, et sur lui seulement, une force φ constante en grandeur et en direction. Le point M prendra dans le système A un mouvement uniformément accéléré; soit α l'accélération de ce mouvement. Supposons un second système B de points possédant à chaque instant des vitesses égales et parallèles à celle de M, c'est-à-dire animés par rapport au premier système d'un mouvement uniformément accéléré avec une accélération α. Le point matériel M, soumis à la force φ, sera au repos dans ce nouveau système B. Faisons agir maintenant sur ce point M une seconde force ayant même valeur φ, même direction et même sens que la première; le troisième principe nous dit que

M prendra dans le système B exactement le même mouvement que celui qu'il possédait dans le système A quand une seule force φ agissait sur lui. C'est-à-dire que M prendra, par rapport au deuxième système de points, un mouvement rectiligne uniformément accéléré dont l'accélération est encore α. Le mobile M sur lequel agit maintenant une force 2φ est donc animé, par rapport au premier système A, d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré ayant une accélération $\alpha + \alpha$ ou 2α. Continuons encore le même raisonnement; supposons un troisième système C de points ayant constamment des vitesses égales et parallèles à celles du point M soumis à la force 2φ, c'est-à-dire possédant l'accélération 2α, par rapport au premier système A : le corps M est en repos dans ce troisième système. Faisons agir maintenant sur M une troisième force de même valeur φ de même direction et de même sens que les précédentes. Le mouvement que M prendra dans ce troisième système C sera exactement le même, d'après le troisième principe, que celui qu'il possédait dans le premier système, quand il était soumis à une seule force de valeur φ; c'est-à-dire qu'il prendra un mouvement rectiligne uniformément accéléré avec la même accélération α. Le mobile M soumis à la force 3φ aura donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré avec une accélération $2\alpha + \alpha$ ou 3α par rapport au premier système A; et ainsi de suite. On voit, en poursuivant ce raisonnement, que, si l'on applique au point mobile M une force de valeur $n\varphi$, l'accélération deviendra $n\alpha$.

Supposons maintenant que le point matériel M soit soumis successivement à l'action de deux forces F et F' constantes en grandeur et en direction dont les valeurs soient recpectivement $n\varphi$ et $n'\varphi$; les accélérations γ et γ' des deux mouvements seront respectivement égales à $n\alpha$ et $n'\alpha$. On a donc :

$$F = n\varphi \qquad F' = n'\varphi$$

$$\gamma = n\alpha \qquad \gamma' = n'\alpha$$

d'où.

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{\varphi}{\alpha} \qquad \frac{F'}{\gamma'} = \frac{\varphi}{\alpha}$$

et, par conséquent :

$$\frac{F}{\gamma}=\frac{F'}{\gamma'}$$

La démonstration que nous venons de donner suppose qu'entre les valeurs F et F′ des deux forces, il existe une commune mesure; comme cette démonstration subsiste, quelque petite que soit cette commune mesure, il faut en conclure que le résultat est encore vrai quand les deux forces F et F′ sont incommensurables [1].

(1) Soient F et F′ deux forces incommensurables, γ et γ' les accélérations qu'elles produisent en agissant sur un même mobile. Divisons la valeur F de la première force en n parties égales à φ. Soit n' le plus grand nombre entier contenu dans le quotient de F′ par φ; on a alors :

$$F = n\varphi \qquad n'\varphi < F' < (n'+1)\varphi$$

soit α l'accélération produite par la force φ agissant sur le mobile considéré ; on a :

$$\gamma = n\alpha \qquad n'\alpha < \gamma' < (n'+1)\alpha$$

écrivons ces égalités ainsi

$$\begin{cases} F = n\varphi \\ \gamma = n\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} n'\varphi < F' < (n'+1)\varphi \\ (n'+1)\alpha > \gamma' > n'\alpha \end{cases}$$

on en tire, en divisant membre à membre :

$$\frac{F}{\gamma}=\frac{\varphi}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{n'}{n'+1}\,\frac{\varphi}{\alpha} < \frac{F'}{\gamma'} < \frac{n'+1}{n'}\,\frac{\varphi}{\alpha}$$

en remplaçant dans la double inégalité $\frac{\varphi}{\alpha}$ par $\frac{F}{\gamma}$, et, en remarquant que $\frac{n'}{n'+1} = 1 - \frac{1}{n'+1}$ et $\frac{n'+1}{n'} = 1 + \frac{1}{n'}$, il vient :

$$\left(1-\frac{1}{n'+1}\right)\frac{F}{\gamma} < \frac{F'}{\gamma'} < \left(1+\frac{1}{n'}\right)\frac{F}{\gamma}$$

Cette double inégalité subsiste, quelque petite que soit la force φ et, par conséquent, quelque grands que soient les nombres n et n' ; elle subsiste

Nous avons démontré le théorème dans le cas de forces constantes en grandeur et en direction agissant sur un point matériel primitivement au repos. Mais nous avons vu (§ 11) que l'accélération produite par une force agissant sur un point matériel déterminé est la même, que le point soit primitivement au repos ou qu'il soit animé d'une vitesse quelconque, que la force conserve la grandeur et la direction qu'elle possède au moment considéré ou qu'elle soit variable. Le théorème de la proportionnalité des forces aux accélérations est donc tout à fait général et s'applique aussi bien dans le cas de forces variables que dans celui de forces constantes.

Nous verrons plus loin (T. I[er], L. II, Chap. II, § 6, p. 76,) comment à l'aide de la machine d'Atwood on peut vérifier directement cette conséquence immédiate du troisième principe; or, ici la vérification expérimentale est indispensable, puisque celle du principe lui-même n'a pas été faite.

14. REMARQUE SUR LES LOIS PRÉCÉDENTES. — Dans l'exposé des trois premiers principes, nous avons toujours envisagé, pour plus de simplicité, un corps de dimensions négligeables, un *point matériel*. Ces trois principes sont encore applicables dans le cas d'un corps de dimensions quelconques, pourvu que son mouvement reste toujours un mouvement de translation; c'est-à-dire que les vitesses et, par conséquent, les accélérations de ses divers points soient toujours les mêmes à un même moment (1). Sous cette réserve, toutes les conséquences que nous avons déduites de ces principes sont applicables à un corps de dimensions quelconques, la trajectoire, la vitesse et l'accélération

donc encore quand n' tend vers l'infini. Or, les deux quantités entre lesquelles $\frac{F'}{\gamma'}$ se trouve constamment compris tendant alors toutes les deux vers la même limite $\frac{F}{\gamma}$, il faut qu'on ait

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'}$$

(1) Nous verrons plus loin (§ 41) les conditions que doivent réaliser les forces appliquées à un corps pour qu'il en soit ainsi.

du mobile étant la trajectoire, la vitesse et l'accélération d'un de ses points. Il n'y a qu'à jeter un coup d'œil sur les raisonnements des paragraphes précédents pour s'en convaincre.

Dans ce qui va suivre, toutes les fois que nous parlerons de trajectoire, de vitesse ou d'accélération d'un corps, il sera entendu que le corps est de dimensions négligeables ou qu'il est animé d'un mouvement de translation. Sans cela, il est évident que ces expressions n'ont aucun sens précis.

15. MASSE. — Nous venons de voir qu'il existe un rapport constant entre les valeurs F,F',F,''..., des forces qui agissent successivement sur un *même* corps et les valeurs $\gamma, \gamma,' \gamma''$..., des accélérations qu'elles produisent. Désignons par m sa valeur :

$$(1) \qquad \frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = ... = m$$

Ce rapport m de la force à l'accélération qu'elle produit dépend essentiellement du mobile sur lequel agit la force et, pouvant différer d'un mobile à un autre, il caractérise celui-ci au point de vue mécanique; on lui a donné le nom de *masse* du corps. D'après sa définition même, la masse d'un corps est une quantité absolument invariable quelles que soient les circonstances où le corps se trouve placé. La masse ne peut varier que si le corps perd ou gagne de la matière, c'est-à-dire ne reste plus le même.

Quoiqu'une définition n'ait pas besoin de justification, comme le mot *masse* est employé dans le langage ordinaire, il est bon de montrer que la définition précise que nous lui donnons ici concorde bien avec le sens un peu vague qu'on y attache habituellement : c'est ce qui résulte de la propriété que nous allons établir.

Supposons un corps de masse M, primitivement au repos, et divisé en n parties de même masse m. Appliquons à chacune d'elles, suivant la même direction, dans le même sens, une même force f constante en grandeur et en direction. Comme toutes les parties du corps ont même masse, elles prendront, d'après la relation (1), la même accélération γ, et, par consé-

quent, le même mouvement. Or, la force totale agissant sur le corps tout entier est nf. On a donc, d'après la définition de la masse :

$$(2) \qquad M = \frac{nf}{\gamma} = n\frac{f}{\gamma} = nm$$

Par conséquent, *la masse d'un corps est égale à la somme des masses des parties qui le composent.*

En particulier, quand un corps homogène contient n fois plus de matière qu'un autre de même nature, sa masse est n fois plus grande. En d'autres termes : *pour des corps homogènes de même nature, la masse est proportionnelle à la quantité de matière qu'ils contiennent.* Ce qui concorde bien avec le sens vulgaire du mot *masse.*

Si F est la valeur de la force qui agit sur un corps de masse m, et γ l'accélération du mouvement qui en résulte, on a, par définition :

$$\frac{F}{\gamma} = m$$

d'où :

$$(3) \qquad F = m\gamma$$

Une force est egale au produit de la masse du corps sur lequel elle agit, par l'accélération qu'elle produit.

Supposons qu'une force de valeur F, agisse successivement sur deux corps de masses différentes m et m' ; les accélérations γ et γ' des mouvements correspondants n'ont pas la même valeur et, d'après (3), on a :

$$F = m\gamma = m'\gamma'$$

d'où :

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{m'}{m}$$

Les accélérations produites par une même force agissant

sur deux corps différents sont en raison inverse de leurs masses.

Ainsi, supposons qu'un petit grain de plomb et une balle de plomb soient, pendant un même temps très court, soumis à l'action d'une même force constante, par exemple, à l'action d'un ressort qui se détend, mais dans une très petite portion de la détente, pour que la force soit constante. Ces deux corps prendront un mouvement uniforme dès que la force aura cessé d'agir. Or, les vitesses des deux mouvements doivent être très différentes : celle de la balle de plomb doit être bien plus petite que celle du grain de plomb, puisque ces vitesses sont celles du mouvement varié au moment où la force a cessé d'agir, et que, si nous prenons le temps pendant lequel la force a agi comme unité de temps, ces vitesses, acquises dans l'unité de temps, sont précisément les accélérations. L'expérience confirme pleinement cette déduction en montrant que la vitesse acquise est bien moindre pour la balle de plomb, qui a une grande masse, que pour le grain de plomb, qui en a une petite.

16. **RÉSULTANTE DE PLUSIEURS FORCES.** — On appelle *résultante* de deux ou de plusieurs forces, une force unique qui, à elle seule, produirait le même effet que l'ensemble des autres forces, appelées *composantes*. Déterminer la résultante de plusieurs forces s'appelle *composer* ces forces.

L'effet de plusieurs forces appliquées à un même corps ne peut pas toujours être produit par une force unique ; nous allons examiner quelles sont les conditions nécessaires pour que plusieurs forces aient une résultante et chercher quelle est la valeur et la direction de celle-ci.

17. **COMPOSITION DE DEUX FORCES AYANT MÊME POINT D'APPLICATION.** — Quand deux forces ont même point d'application, elles peuvent être remplacées par une résultante. Celle-ci s'obtient en composant les deux forces suivant la règle du parallélogramme, comme deux vitesses :

On construit sur les deux forces représentées graphiquement

par MA et MB (fig. 31), *un parallélogramme* MACB. *La diagonale* MC *de ce parallélogramme représente en grandeur et en direction la résultante des deux forces* MA et MB.

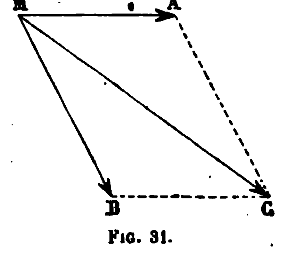


Fig. 31.

Cette règle résulte de celle qui a été donnée pour la composition des accélérations et de l'application du troisième principe de la Dynamique [1].

On peut, du reste, comme dans le cas de la composition des vitesses, simplifier un peu la construction graphique nécessaire pour ob-

(1) Pour démontrer ce théorème, supposons qu'un point matériel M, de masse m, fasse partie d'un système P de points animés d'un mouvement de translation quelconque. Faisons agir sur M une force F que nous supposons constante en grandeur et en direction. Ce point matériel prend, par rapport un système P, un mouvement relatif rectiligne, dans la direction de F et uniformément accéléré sans vitesse initiale.

L'accélération γ de ce mouvement est donnée par $\gamma = \frac{F}{m}$; représentons-la par Ma (fig. 32). Supposons maintenant un second système Q de points animés de vitesses constamment égales et parallèles à celle de M soumis à l'action de F; si M n'était pas soumis à une nouvelle force, il resterait au repos dans ce système. Mais si, au moment même où F a commencé d'agir, une seconde force F', constante en grandeur et en direction, agit aussi sur M, cette force communique à ce point par rapport au système Q un mouvement relatif, qui est rectiligne suivant la direction de F' et uniformément accéléré. L'accélération γ' de ce mouvement est donnée par $\gamma' = \frac{F'}{m}$; représentons-la par Mb.

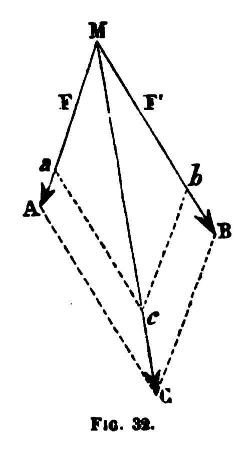


Fig. 32.

Dès lors, d'après ce que nous avons vu (Cinématique, § 16) sur la composition des accélérations de deux mouvements uniformément accélérés sans vitesses initiales, le mouvement de M dans le système P est aussi un mouvement rectiligne uniformément accéléré sans vitesse initiale et ayant pour accélération en gran-

tenir la résultante : par l'extrémité A de la droite MA (fig. 33) représentant la force F, menons une droite AC, égale et parallèle à l'autre force F', représentée par MB, et joignons MC. Cette droite est évidemment la diagonale du parallélogramme MACB construit sur les deux forces, et, par conséquent, représente la résultante de ces forces.

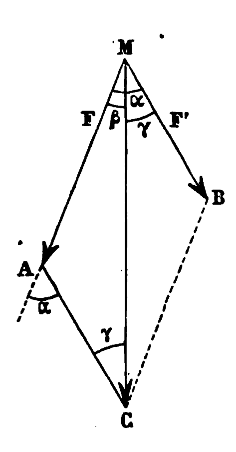


Fig. 33.

deur et en direction la diagonale Mc du parallélogramme Macb construit sur Ma et Mb. On voit, par là, qu'une force unique R dirigée suivant cette diagonale et ayant pour valeur $m \times Mc$ produirait exactement le même effet. Telle est donc la résultante des deux forces F et F'. Pour obtenir cette résultante, portons dans la direction Ma une longueur MA égale à $m \times Ma$, dans la direction Mb une longueur MB égale à $m \times MB$ et dans la direction Mc une longueur MC égale $m \times Mc$. Les droites MA, MB, MC représentent graphiquement les deux composantes F et F' et leur résultante R. Joignons les points A et C ainsi que les points C et B. Les triangles Mac et MAC sont semblables comme ayant même angle compris entre côtés respectivement proportionnels puisqu'on a par construction $\frac{MA}{Ma} = m = \frac{MC}{Mc}$ par conséquent, AC est parallèle à *ac*; pour la même raison CB est parallèle à *cb*. Le quadrilatère MACB est donc un parallélogramme dont les côtés MA et MB sont les deux composantes et la diagonale MC leur résultante.

Faisons remarquer qu'ayant supposé *quelconque* le premier système de translation P dont M faisait partie avant l'application des deux forces F et F' M peut déjà être soumis à l'action d'autres forces. Ainsi on peut trouver par cette règle la résultante de deux forces particulières, quand même d'autres forces agissent sur le point matériel considéré.

Dans notre démonstration nous avons supposé les forces F et F' constantes en grandeur et en direction pendant un certain temps Δt. Mais le résultat de la composition de deux forces restant le même quelque petit que soit ce temps Δt, on en conclut que cette même règle est encore applicable quand ce temps est nul, c'est-à-dire quand les forces F et F' sont variables soit en grandeur soit en direction.

Enfin, faisons remarquer que, si les deux forces sont appliquées en un point d'un corps solide dont on ne puisse plus négliger les dimensions, on

En appelant α l'angle AMB des deux forces F et F' et R la valeur de la résultante, le triangle MAC fournit la relation

$$\overline{MC}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AC}^2 - 2MA \times AC \times \cos MAC$$

ou

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' \cos \alpha$$

relation qui donne la valeur de R.

Si l'on appelle β et γ les angles que forment les composantes F et F' avec la résultante, on a dans le triangle MAC

$$\frac{\sin \beta}{F'} = \frac{\sin \gamma}{F} = \frac{\sin \alpha}{R}$$

relation qui donne la direction de la résultante (1).

18. COMPOSITION DE PLUSIEURS FORCES AYANT MÊME POINT D'APPLICATION. — La règle donnée pour composer deux forces nous fait voir qu'on peut composer un nombre quelconque de forces ayant même point d'application.

Soit, en effet, F, F', F'',... plusieurs forces ayant toutes même point d'application M. Menons par ce point M (fig. 34) une droite MA, représentant la première force F; par son extré-

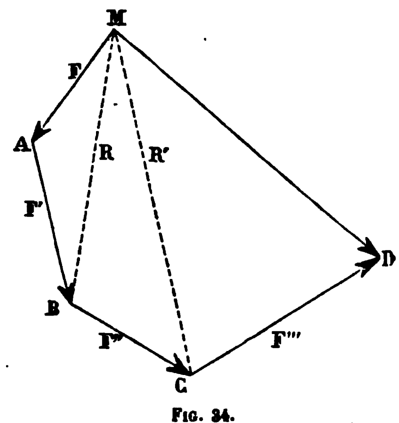


Fig. 34.

peut, en tous cas, considérer comme un point matériel la petite portion de matière qui est le point d'application de ces forces, ce point matériel étant par d'autres forces maintenu au repos par rapport aux autres points du solide : le théorème subsiste donc encore dans ce cas.

La règle du parallélogramme pour composer deux forces, ayant même point d'application, est donc tout à fait générale.

(1) Il est clair que les mêmes relations sont applicables dans le cas de la composition des vitesses ou des accélérations.

mité A menons une droite AB, égale et parallèle à la droite représentative de la seconde force F′ et de même sens qu'elle ; par son extrémité B, menons une droite BC égale et parallèle à la droite qui représente la troisième force F″, et ainsi de suite. Soit D l'extrémité de la droite, qui représente ainsi la grandeur et la direction de la dernière des forces qu'on a à composer : la droite MD, qui joint l'extrémité D de la ligne polygonale ainsi formée au point d'application M, représente en grandeur et en direction la résultante de toutes les forces. Telle est la *règle du polygone des forces.*

Pour démontrer cette règle, joignons MB, MC, etc. D'après ce que nous avons vu à la fin du paragraphe précédent, MB représente la résultante R de F et de F′ et, par conséquent, peut remplacer l'ensemble de ces deux forces ; de même MC, représentant la résultante R′ de R et de F″, peut remplacer le système des trois premières forces F, F′ et F″, et ainsi de suite : MD représente, en grandeur et en direction, la résultante de toutes les forces.

Considérons le cas particulier de trois forces A*x*, A*y*, A*z* (fig. 35) appliquées en un même point ; composons d'abord A*z* et A*y* suivant la règle du parallélogramme, et soit A*b* leur résultante ; composons ensuite A*b* et A*x* suivant la règle du triangle pour avoir la résultante finale A*a*. Comme on serait arrivé au même résultat en composant d'abord A*x* et A*z* en une résultante A*c* et ensuite A*c* et A*y*, ou encore en composant d'abord A*y* et A*x* en une résultante A*d* et ensuite A*d* et A*z*, on voit, d'après la figure qu'il faut faire pour obtenir par ces trois

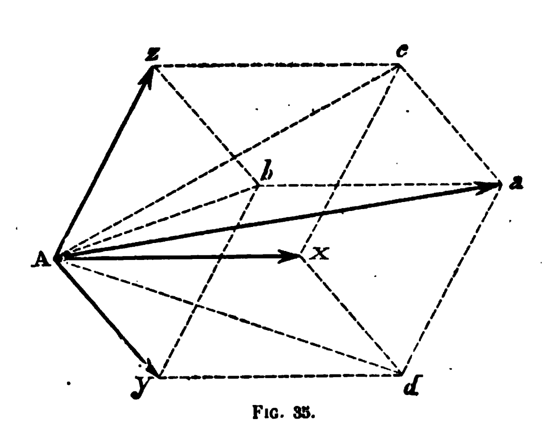


Fig. 35.

manières la résultante A*a* des trois forces, que celle-ci est la diagonale du parallélipipède A*xdybzca* ayant pour côtés adjacents les trois forces composantes A*x*, A*y* et A*z*.

19. DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE. — On peut remplacer une force R par un système de deux forces F et F′, ayant même point d'application que R et formant les deux côtés d'un parallélogramme dont R est la diagonale ; le système des forces F et F′ produira le même effet que la force R, puisque R est la résultante des forces F et F′. On voit par là qu'on peut, d'une infinité de manières, *décomposer* une force en deux composantes.

On peut se fixer à l'avance la direction des deux composantes ; alors la grandeur de celles-ci se détermine par la construction du parallélogramme dont R est la diagonale et dont les côtés adjacents ont les directions données.

On peut se fixer les grandeurs F et F′ des composantes ; on a alors à construire un triangle MAC dont R, F et F′ sont les trois côtés (fig. 33) ; MA et AC sont les directions des deux composantes.

Enfin, on peut se donner à l'avance la grandeur et la direction d'une des composantes F. Il suffit d'achever la construction du triangle MAC, dont deux côtés, MC et MA, sont donnés pour avoir, par le troisième côté AC, la deuxième composante en grandeur et en direction.

Chaque composante pouvant se décomposer à son tour, il y a une infinité de façons de décomposer une force en plusieurs composantes.

20. CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DE PLUSIEURS FORCES AYANT MÊME POINT D'APPLICATION. — Pour que plusieurs forces, ayant même point d'application, se fassent équilibre, il faut et il suffit évidemment que leur résultante soit nulle.

Si nous nous reportons à la figure 34 du § 18, il faut que l'extrémité D de la dernière force coïncide avec le commencement M de la première ; c'est-à-dire que la ligne polygonale construite en disposant bout à bout les droites représentant les forces en grandeur et en direction soit fermée.

Quand les forces sont au nombre de deux seulement, il résulte

de là qu'elles ne peuvent se faire équilibre que si elles ont même direction, sont de sens inverse et égales entre elles.

Quand elles sont en plus grand nombre, il faut et il suffit que l'une d'elles soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres (1).

21. PROJECTION D'UNE FORCE SUR UN PLAN. — Si des deux extrémités A et *a* de la droite représentative d'une force (fig. 37), on abaisse des perpendiculaires AA′ et *aa*′ sur un plan P, la force qui est représentée par la droite A′*a*′, et qui a pour point d'application la projection A′ du point d'application A de la force A*a*, est appelée la *projection* de la force A*a* sur le plan P (*plan de projection*); A*a* est appelée la *force projetante.*

(1) Considérons, en particulier, le cas de trois forces MA, MB, MC fig. 36). Pour que l'équilibre existe il faut et il suffit que l'une, MC, soit égale et diamétralement opposée à la diagonale du parallélogramme MBDA ayant les deux autres forces comme côtés. Les trois forces doivent donc être dans un même plan; en outre on doit avoir MC = MD et, pour les angles : CMB = 180° — DMB; d'où, par conséquent :

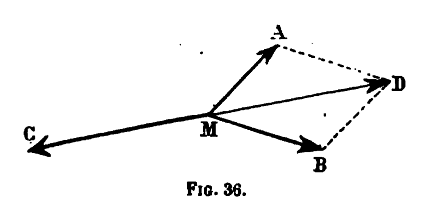


Fig. 36.

$$CMA = 180° - MDB$$

Or, le triangle MBD donne la relation :

$$\frac{BD}{\sin BMD} = \frac{MB}{\sin MDB} = \frac{MD}{\sin MBD}$$

et comme, outre les relations indiquées plus haut, on a : MBD = 180° — AMB, il vient, en remplaçant :

$$\frac{MA}{\sin BMC} = \frac{MB}{\sin CMA} = \frac{MC}{\sin AMB}$$

Il faut ainsi, pour l'équilibre, que la valeur de chaque force soit proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres forces.

Menons dans le plan projetant $AaA'a'$ une parallèle AZ au plan P et, par conséquent à $A'a'$; soit a_1 le point où elle coupe aa'. Désignons par α la valeur de l'angle aigu que forme Aa avec AZ ; c'est, par définition, l'angle de la force Aa avec le plan P. Dans le triangle aAa_1, on a : $Aa_1 = Aa \cos\alpha$. Or, Aa_1 est égal à $A'a'$, puisque le quadrilatère $Aa_1a'A'$ ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme ; on a donc, en appelant F et F′ les valeurs de la force Aa et de sa projection $A'a'$, la relation :

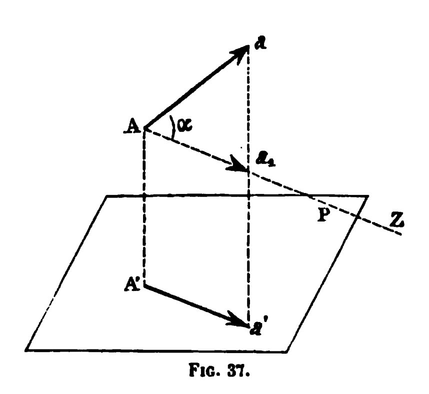


Fig. 37.

$$F' = F \cos\alpha$$

On voit, par là, que des forces parallèles entre elles ont des projections qui sont parallèles entre elles, et dont les valeurs sont respectivement proportionnelles à celles des forces projetantes : deux forces égales et parallèles ont des projections égales et parallèles.

Si l'on décompose la force Aa en une force perpendiculaire au plan P et en une force parallèle à ce plan, le triangle de décomposition est précisément le triangle Aaa_1 : la composante Aa_1 parallèle au plan a même direction, même sens et même valeur que la projection $A'a'$ de Aa.

On démontre aisément que *la projection de la résultante de deux forces ayant même point d'application est la résultante de la projection des deux forces* (fig. 38) (1).

Les projections des quatre côtés d'un parallélogramme $Macb$ (fig. 38) sur un plan P forme un quadrilatère $M'a'c'b'$ qui, ayant deux côtes opposés $M'a'$ et $b'c'$ égaux et parallèles est un parallélogramme.

Par conséquent, la résultante Mc de deux forces Ma et Mb a pour projection la résultante $M'c'$ des projections $M'a'$ et $M'b'$ des forces Ma et Mb.

Ce théorème est souvent utile ; il s'étend immédiatement à la composition d'un nombre quelconque de forces ayant même point d'application : *la projection de la résultante est la résultante de la projection des forces.*

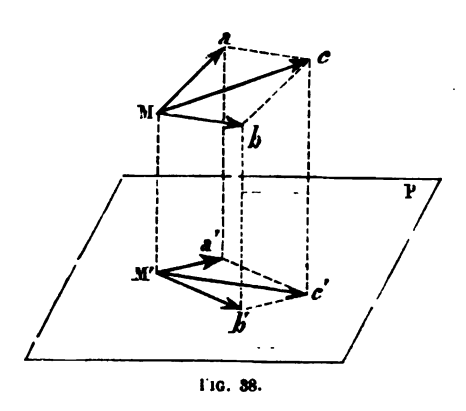


FIG. 38.

22. PROJECTION D'UNE FORCE SUR UN AXE. — Si des deux extrémités A et *a* de la droite représentative d'une force (fig. 39), on abaisse des perpendiculaires AA' et *aa'* sur la droite XX', la force qui est représentée par la droite A'*a'* et qui a pour point d'application la projection A' du point d'application A de la force A*a*, est appelée la *projec-*

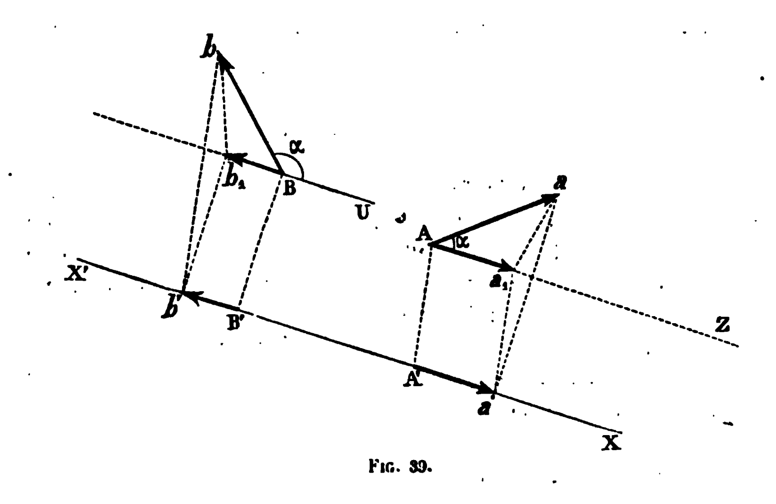


FIG. 39.

tion de la force A*a* sur l'axe XX' (*axe de projection*) ; A*a* est appelée la force *projetante.*

En considérant comme une quantité positive la projection de la force quand, en allant de son point d'application A′ vers son extrémité a', on marche dans le sens de X′ vers X, on doit considérer comme négative la projection de la force quand, en allant de son point d'application vers son extrémité, on marche dans le sens inverse (de X vers X′). Ainsi, sur la figure 39, la projection $A'a'$ de Aa est positive, et la projection $B'b'$ de Bb est négative. Le sens X′X de l'axe de projection est appelé alors le *sens positif* et le sens XX′ le *sens négatif*.

Soit α l'angle que forme la force avec une parallèle AZ (ou BU) à l'axe X′X, menée par le point d'application dans le sens positif X′X; cet angle est, par définition, l'angle de la force et de l'axe de projection.

Menons, par la ligne projetante aa' de l'extrémité a de la force, un plan perpendiculaire à l'axe X′X ; ce plan coupe en un point a_1 la droite AZ. Dans le triangle aAa_1, on a : $Aa_1 = Aa \cos \alpha$; mais Aa_1 est égal à $A'a'$, car la figure $Aa_1a'A'$ est un parallélogramme comme ayant ses côtés opposés parallèles; on voit donc qu'en appelant F et F_x les valeurs de la force Aa et de sa projection $A'a'$, on a :

$$F_x = F \cos \alpha \tag{1}$$

Si l'angle α est aigu, l'égalité (1) nous montre que F_x est positif; nous voyons bien, en effet, que dans ce cas la projection est positive d'après la convention faite ci-dessus. Si l'angle α est obtus, la formule (1) nous indique que F_x est négatif; ce qui est encore conforme à la convention faite plus haut

Il résulte de l'égalité (1) que des forces parallèles entre elles ont sur un même axe des projections proportionnelles à ces forces; des forces égales et parallèles ont des projections égales. On voit aussi que des forces parallèles et de sens opposé ont des projections de signes contraires.

En désignant par F_x, F_y, F_z la valeur des projections d'une force Aa de valeur F sur trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques OX, OY, OZ, et en désignant par α, β, γ les

angles que forme la force avec la direction positive des axes de coordonnées, on a, d'après la formule (1) :

$$(2) \qquad F_x = F \cos \alpha \qquad F_y = F \cos \beta \qquad F_z = F \cos \gamma$$

et, en vertu de la relation connue : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, on en tire :

$$(3) \qquad F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

La relation (3) fournit la valeur F de la force quand on connaît la valeur de ses trois projections et les formules (2), en donnant les angles α, β, γ quand la valeur F est connue, font connaître la direction de la force.

Si l'on décompose la force A*a* (fig. 39) en une force parallèle à X'X, et en une force située dans un plan $aa'a_1$ perpendiculaire à cet axe aAa_1 étant le triangle de décomposition, la composante Aa_1, parallèle à l'axe, a non seulement la même direction et le même sens que la projection A'*a'* de la force sur l'axe, mais aussi la même valeur.

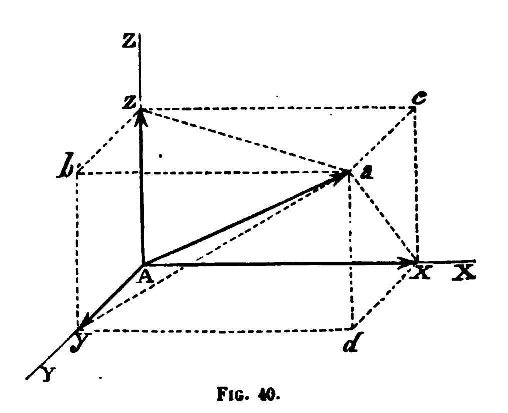


FIG. 40.

Menons par le point d'application A d'une force A*a* (fig. 40) trois axes rectangulaires entre eux AX, AY, AZ. Projetons sur ces trois axes la force A*a*; le parallélipipède rectangle construit sur ces trois projections A*x*, A*y*, A*z* ayant A*a* pour diagonale, on voit que ces trois projections sont trois forces qui ont pour résultante A*a*; ce sont donc les composantes de cette force, dirigées suivant les trois axes.

23. MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS L'ESPACE. — Supposons que la force F agisse seule sur un point matériel de masse m; projetons cette force sur un axe X'X quelconque, et soit F_x la valeur de la projection donnée par la relation (1) du § 22. Divisons les deux membres de cette relation par la masse m du point matériel, il vient :

$$(1) \qquad \frac{F_x}{m} = \frac{F}{m} \cos \alpha$$

Or, $\frac{F_x}{m}$ est la valeur de l'accélération G_x, que produirait la projection F_x de la force F, sur un point matériel de masse m, et $\frac{F}{m}$ est l'accélération G du point matériel considéré, on a donc :

$$(2) \qquad \frac{F_x}{m} = G_x = G \cos \alpha$$

Mais nous avons vu (Cinématique § 17) que $G \cos \alpha$ est la valeur x''_t de l'accélération de la projection du mobile sur l'axe X'X ; on a donc :

$$(3) \qquad G_x = x''_t$$

De là ce théorème fort important :

L'accélération x''_t de la projection A' d'un point matériel mobile A sur un axe quelconque est égale à l'accélération G_x que produirait la projection F_x de la force F appliquée au point matériel A, en agissant sur un point matériel de même masse.

L'énoncé de ce théorème peut se traduire par la formule suivante, très souvent employée, et qu'on déduit directement des relations (1), (2) et (3) :

$$(4) \qquad m x''_t = F_x = F \cos \alpha$$

Imaginons un point matériel B, de même masse m que le point matériel A, qui à un certain moment serait placé sur un axe X'X à l'endroit où se trouve la projection sur cet axe du point mobile A, qui possèderait à un certain moment une vitesse égale à la projection de la vitesse de A sur l'axe X'X, enfin qui serait soumis à une force constamment égale à la projection F_x sur X'X de la force F, qui agit sur A, que cette force F soit constante ou variable. Ce point B décrirait la ligne X'X, et il est facile de voir qu'à chaque instant ce mobile B aurait même position que la projection A' du point A sur l'axe X'X.

Désignons en effet par e la distance de B à l'origine du mouvement au bout du temps t et, par conséquent, par e'_t et par e''_t sa vitesse et son accélération au temps t.

En vertu du théorème précédent, l'accélération e''_t de ce point B est la même que l'accélération x''_t de la projection A' du point mobile A sur l'axe :

$$e''_t - x''_t = 0$$

on déduit de là, en égalant les fonctions primitives des deux membres :

$$e'_t - x'_t = C$$

à chaque instant, les vitesses e'_t et x'_t des mobiles B et A' ne peuvent différer que par une quantité constante C; mais cette constante C est nulle, puisque à un certain moment leur vitesse ne diffère pas, par hypothèse.

On a donc :

$$e'_t - x'_t = 0$$

On déduit de là, en égalant les fonctions primitives des deux membres :

$$e - x = C'$$

à chaque instant, les distances e et x des deux mobiles B et A' à l'origine, ne peuvent différer que par une quantité constante C' ; mais cette constante C' est nulle, puisqu'à un certain moment les deux mobiles B et A' ont même position, par hypothèse. On voit donc que le mobile B occupe constamment la position de la projection A' du point A sur l'axe.

Cette remarque permet de ramener le problème du mouvement dans l'espace d'un point matériel A, soumis à l'action d'une force F connue à chaque instant en grandeur et en direction au problème plus simple du mouvement suivant une ligne droite d'un mobile soumis à une force dirigée suivant cette ligne.

Menons, en effet, trois axes de coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, et considérons trois points matériels B, C, D ayant même masse que le point matériel A, situés respectivement sur les axes OX, OY, OZ, occupant à un certain moment la position de la projection de A sur ces axes, étant animés à ce moment de vitesses égales aux projections de la vitesse de A sur ces axes, et enfin étant soumis à chaque instant à une force égale à la projection de la force F sur l'axe correspondant. Ces trois points, occupant constamment les positions des projections de A sur les trois axes, ont pour distance x, y et z à l'origine O, précisément les coordonnées du point mobile A.

On voit donc que, si le mouvement de ces trois points B, C, D sur leur trajectoire rectiligne est connu, on connaît par là même le mouvement du point A dans l'espace [1].

(1) En désignant par x''_t, y''_t, z''_t les dérivées secondes par rapport au temps des coordonnées x, y, z du point mobile, c'est-à-dire les accélérations des projections du point sur les trois axes de coordonnées, on a, d'après la relation (4) :

$$(1) \qquad mx''_t = F_x \qquad my''_t = F_y \qquad mz''_t = F_z$$

en appelant F_x, F_y, F_z les projections sur les trois axes de la force F qui agit sur le point matériel. Ces trois quantités sont des fonctions du temps que nous supposons connues; en désignant par H_x, H_y, H_z leurs fonctions

24. FORCE TANGENTIELLE. — FORCE CENTRIPÈTE. — Considérons un point matériel qui, sous l'influence d'une force quelconque (fig. 41), décrit une certaine trajectoire. Soit A la position du mobile à un certain moment, et Ag la ligne représentative de la force. L'accélération produite par cette force sur le point matériel, étant dans le plan osculateur à la courbe, on voit que la force est située dans ce plan. Ce plan passant, en outre, par la tangente AT à la courbe en A, qui est la direction de la vitesse, il en résulte que :

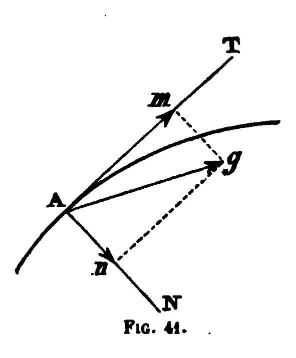


FIG. 41.

Le plan osculateur de la trajectoire en chaque point est

primitives on a, en égalant les fonctions primitives des deux membres des égalités (1) :

$$(2) \qquad mx'_t = H_x \qquad my'_t = H_y \qquad mz'_t = H_z$$

Or, on connaît à un moment donné la vitesse du point matériel, sans cela son mouvement ne serait pas complètement déterminé. Pour obtenir la valeur de la constante arbitraire qui entre dans chacune des fonctions du temps H_x, H_y et H_z, il suffit d'écrire qu'au moment donné les vitesses x'_t, y'_t, z'_t des trois projections sont respectivement égales aux projections connues de la vitesse du mobile sur chacun des axes.

En désignant maintenant par L_x, L_y, L_z les fonctions primitives des fonctions connues H_x, H_y, H_z, il vient, en égalant les fonctions primitives des deux membres des relations (2) :

$$(3) \qquad mx = L_x \qquad my = L_y \qquad mz = L_z$$

Or, on connaît à un moment donné la position du point mobile, car, sans cela le mouvement ne serait pas complètement déterminé. Pour obtenir la valeur de la constante arbitraire qui entre dans chacune des fonctions L_x, L_y et L_z, il suffit d'écrire qu'au moment donné les quantités x, y, z sont les coordonnées du point mobile.

Les relations (3) donnent alors à chaque instant la position du mobile.

déterminé par la direction de la vitesse du mobile en ce point et par la direction de la force.

On appelle *force tangentielle* la projection Am de la force Ag sur la tangente AT à la trajectoire, et *force centripète* la projection An de la force Ag, sur la normale principale AN. La figure plane Amgn étant un rectangle dont Ag est la diagonale, la force totale est la résultante de la force tangentielle et de la force centripète; par conséquent, l'ensemble de la force tangentielle et de la force centripète peut remplacer la force totale Ag ou l'ensemble des forces agissant sur le mobile dont la force totale est la résultante.

En désignant par F, F_T et F_C les valeurs respectives de la force totale, de la force tangentielle et de la force centripète, et en appelant α l'angle gAT que fait la direction de la force Ag avec la tangente AT à la courbe, on a :

$$(1) \qquad \begin{aligned} F_T &= F\cos\alpha \\ F_C &= F\sin\alpha \end{aligned}$$

En divisant par la masse m du mobile les deux membres de ces égalités, et en appelant G, T et C les accélérations totales, tangentielles et centripètes, on a :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{F_T}{m} &= \frac{F}{m}\cos\alpha = G\cos\alpha = T \\ \frac{F_C}{m} &= \frac{F}{m}\sin\alpha = G\sin\alpha = C \end{aligned}$$

Conformément à ce que nous avons établi d'une façon générale au § 23, on voit que la force tangentielle ou la force centripète, en agissant isolément sur le mobile, lui communiquerait l'accélération tangentielle ou l'accélération centripète,

Nous avons vu (Cinématique § 15) qu'en appelant v la vitesse du mobile, v'_t sa dérivée par rapport au temps et R le rayon

de courbure de la trajectoire au point où se trouve le mobile, on a :

$$T = v'_t \qquad C = \frac{v^2}{R}$$

Les égalités (2) fournissent donc les relations :

$$(3) \qquad F_T = mv'_t \qquad F_C = \frac{mv^2}{R}$$

Toutes les fois qu'un mouvement est rectiligne, R étant infini, la force centripète est nulle ; la force totale qui agit sur le point matériel, se réduisant à la force tangentielle, est dirigée suivant la ligne droite que parcourt ce point et sa valeur est mv'_t.

Réciproquement, si la force centripète est nulle sans que la vitesse soit nulle, le rayon de courbure R de la trajectoire est infini au point où se trouve le mobile : la trajectoire présente un point d'inflexion à cet endroit. Si la force centripète est constamment nulle, la trajectoire est rectiligne.

Toutes les fois qu'un mouvement est uniforme, la force tangentielle est nulle, puisque $v'_t = 0$: la force totale qui agit sur le point matériel, se réduisant à la force centripète, a pour valeur $\frac{mv^2}{R}$ et sa direction est celle de la normale principale.

Réciproquement, si la force tangentielle est nulle, la dérivée v'_t de la vitesse étant nulle, la vitesse v est constante, le mouvement est uniforme.

Par exemple, supposons qu'un corps soit attaché à une corde dont l'autre extrémité soit fixée à un point O, que ce corps décrive un cercle ayant ce point O pour centre, et qu'il ne soit soumis à aucune force autre que la tension de la corde : son mouvement doit être uniforme, puisque la force qui agit sur lui se

réduit constamment à la force centripète. Du reste, la vitesse du mobile et sa distance au centre O ne variant pas, la tension de la corde, qui est la force centripète, est constante.

25. FORCE CENTRIFUGE. — Pour qu'un point matériel reste au repos par rapport à un système animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, il faut évidemment que toutes les forces qui agissent sur ce point se fassent équilibre, puisque, sans cela, son mouvement ne pourrait être rectiligne et uniforme.

Mais, pour qu'un point matériel reste au repos par rapport à un système animé d'un mouvement d'ensemble qui n'est pas rectiligne et uniforme, il faut que la résultante des forces agissant sur ce point ne soit pas nulle, et qu'elle soit telle qu'elle communique au point matériel une accélération précisément égale en grandeur et en direction à celle du point du système qui coïncide avec lui. En appelant g cette accélération et m la masse du point matériel, la résultante des forces agissant sur lui doit être égale à mg.

En particulier, considérons le cas d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, comme la Terre (en négligeant son mouvement autour du Soleil).

Soient ω la vitesse angulaire constante du système, R la distance à l'axe de rotation du point matériel considéré M et $v=\omega R$ la vitesse du point A du système tournant qui coïncide avec lui. L'accélération du point A se réduisant à l'accélération centripète dont la valeur est $\frac{v^2}{R}$ ou ω^2R et qui est dirigée vers le centre O du cercle décrit par ce point, il faut, pour que le point matériel mobile M reste au repos par rapport au système tournant, que la résultante des forces agissant sur lui se réduise à une force centripète donnant l'accélération $\frac{v^2}{R}$, c'est-à-dire que cette résultante soit dirigée constamment vers le point O et possède une valeur constante égale à $\frac{mv^2}{R}$ ou $m\omega^2R$.

On voit que, si l'on ajoutait aux forces agissant sur un point matériel au repos par rapport à un système tournant d'un mou-

vement uniforme une force égale et directement opposée à la force centripète, toutes les forces agissant sur le corps se feraient équilibre : cette force égale et contraire à la force centripète, par conséquent, de valeur $\frac{mv^2}{R}$ ou $m\omega^2R$ et dirigée suivant le rayon, mais agissant dans le sens qui écarterait le mobile du centre, s'appelle la *force centrifuge* [1].

Ainsi la force centrifuge est une force *fictive* qui, ajoutée aux forces *réelles* agissant sur un corps au repos par rapport à un système tournant permet d'exprimer que toutes les forces se font équilibre ; c'est un artifice destiné à ramener le problème de l'équilibre relatif par rapport à un système tournant au problème de l'équilibre par rapport à un système au repos [2].

(1) Dans le cas où le point matériel possède un mouvement relatif par rapport au système tournant, au lieu d'être au repos relatif, comme nous l'avons supposé, on commettrait une erreur en croyant qu'il suffit de composer avec les forces réelles agissant sur le point matériel la force centrifuge pour avoir la force qui produirait, par rapport au système en repos, le même mouvement relatif. Pour avoir cette dernière force, il faut composer avec les forces réelles, non seulement la force centrifuge, mais encore une autre force fictive, appelée *force centrifuge composée*, qui dépend de la vitesse angulaire de rotation du système et aussi de la vitesse relative du point matériel par rapport au système tournant ; cette force centrifuge composée devient nulle, comme cela doit être évidemment, quand l'une ou l'autre de ces vitesses devient nulle.

(2) Reprenons l'exemple d'un corps attaché à l'extrémité d'une corde, dont l'autre extrémité est fixée à un point O, et tournant en cercle sous l'influence d'une seule force, la tension de la corde qui, en agissant sur le mobile, fait office de force centripète. La tension de la corde agit aussi sur le point O et tire ce point dans le sens de la corde tendue ; or, cette réaction de la force centripète a été appelée souvent *force centrifuge*. En vertu de l'égalité de l'action et de la réaction, cette force, en effet, est égale en grandeur, en direction et en sens à ce que nous avons appelé plus haut « la force centrifuge » ; mais c'est une force réelle et qui n'est pas appliquée au mobile mais bien au point O. Elle est donc bien distincte de la force fictive appliquée au mobile, désignée dans le texte sous le nom de « force centrifuge ».

Nous en dirons autant à propos d'un mobile qui roule à l'intérieur d'un corps creux, par exemple d'une bille qui roule à l'intérieur d'un cerceau : la force centripète du mouvement circulaire de la bille est ici la pression qu'exerce le bord intérieur du cerceau sur le mobile qui tend toujours à se mouvoir en ligne droite. A son tour la bille exerce sur le cerceau un

Un exemple fera bien comprendre cette notion importante. Considérons un corps pesant suspendu à l'une des extrémités d'un ressort fixé à son autre extrémité ; supposons en outre, pour plus de simplicité, que ce corps soit placé à l'Équateur et négligeons la rotation de la Terre autour du Soleil et l'action attractive qu'exerce cet astre sur les corps qui sont placés à la surface de la Terre. Dans ce cas, deux forces réelles seulement agissent sur le corps : 1° l'attraction terrestre dirigée vers le centre de la Terre, 2° la tension du ressort. Cherchons ce que doit être cette dernière force pour que le corps soit au repos par rapport à la Terre qui tourne autour de son axe. Pour cela ajoutons à ces deux forces réelles la force centrifuge, et déterminons la tension du

effort qui est la réaction de la force centripète et auquel on donne quelquefois le nom de « force centrifuge » parce qu'elle a même grandeur, même direction et même sens que cette dernière ; elle en est pourtant bien distincte, puisque c'est une force réelle appliquée au cerceau.

Il est regrettable qu'on donne ainsi un même nom à deux grandeurs si différentes au fond, si semblables à un examen superficiel ; cela tend à perpétuer une confusion fâcheuse.

Il arrive parfois qu'un corps solide animé d'une grande vitesse de rotation autour d'un axe vient à éclater ; cet accident se produit malheureusement trop souvent pour les volants des moteurs à vapeur. Il est d'usage de dire que « le volant à éclaté par la *force centrifuge* ». Si l'on veut que cette locution soit correcte, il faut évidemment entendre ici par « force centrifuge » la réaction de la force centripète. Au fond, voici ce qui se produit dans ce phénomène.

En négligeant la pesanteur, chaque partie du volant en mouvement est soumise à deux forces réelles qui sont 1° la tension qu'exerce la partie voisine située du côté de l'axe, 2° la tension qu'exerce la partie voisine située du côté de la circonférence. Ces deux tensions, agissant en sens inverse sur la partie considérée, ont pour résultante leur différence, et c'est celle-ci qui est la force centripète. On voit, par là, que la tension tournée du côté de l'axe doit être la plus grande des deux. Or, la force centripète, pour une partie déterminée du volant, croît comme le carré de la vitesse angulaire ; il faut donc que les tensions en chaque point croissent suivant cette proportion pour qu'il en soit de même de leur différence.

Or, quand la tension des rayons du volant devient très grande, la limite d'élasticité du métal peut être dépassée et il y a rupture. Dès que celle-ci s'est produite, toute tension cessant immédiatement, c'est-à-dire, toujours en négligeant la pesanteur, toute force cessant d'agir, chaque morceau est lancé tangentiellement au cercle qu'il décrivait, comme le veut le principe de l'inertie.

ressort par la condition que ces trois forces se fassent équilibre. Or, dans le cas où le corps est placé à l'Équateur, la force centrifuge toujours perpendiculaire à l'axe de rotation, est directement opposée à l'attraction terrestre ; la condition pour que les trois forces se fassent équilibre est donc que la tension du ressort soit égale et directement opposée à la différence entre l'attraction terrestre et la force centrifuge; cette tension doit donc être dirigée aussi suivant le rayon équatorial et sa valeur doit être égale à $A - m\omega^2 R$, en appelant A la valeur de l'attraction terrestre, m la masse du corps, ω la vitesse angulaire du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe et R le rayon terrestre équatorial.

Nous voyons, par cet exemple, que ce qu'on appelle le poids d'un corps n'est que la résultante de l'attraction terrestre et de la force centrifuge. (Voir L. II, Chap. III § 13) (1).

(1) A l'Équateur le rayon terrestre R est égal à $6,378 \times 10^8$ centimètres; comme la vitesse angulaire ω du mouvement de rotation de la terre est, en prenant la seconde pour unité de temps, égale à $7,309 \times 10^{-5}$ (Cinématique § 10), on a pour la force centrifuge agissant sur l'unité de masse

$$(7,309 \times 10^{-5})^2 \times 6,378 \times 10^8 = 3,407.$$

Or, à l'Équateur, le poids de l'unité de masse (valeur de l'intensité de la pesanteur), avec les mêmes unités de longueur et de temps, est représenté par le nombre 978,103 (L. II, Chap. III, § 13). On voit que la force centrifuge n'est qu'une bien faible fraction de l'attraction terrestre, dont la valeur est $978,103 + 3,407 = 981,510$ pour l'unité de masse placée à l'Équateur.

Nous n'avons que bien peu de chose à changer à ces conclusions si maintenant nous tenons compte à la fois de la rotation de la Terre autour du Soleil et de l'attraction qu'exerce cet astre sur un corps M placé à la surface de notre Globe. Pour trouver la condition d'équilibre relatif par rapport à la Terre de ce corps M qui participe à son double mouvement, il faut bien ajouter aux forces réelles la force centrifuge C du mouvement de rotation autour du Soleil, laquelle n'est pas négligeable; mais, comme parmi les forces réelles agissant sur le corps M se trouve l'attraction S qu'exerce le Soleil sur ce corps, et que les forces C et S sont constamment à très peu près égales et directement opposées, c'est comme si ni l'une ni l'autre n'existaient.

Puisque chaque point de la Terre possède, grâce à la rotation autour de son axe, une vitesse relative par rapport à un système animé du même mouvement de rotation autour du Soleil que le centre de la Terre, il faut

26. DÉPLACEMENT D'UNE FORCE SUIVANT SA DIRECTION. — *Quand une force est appliquée en un point d'un corps solide* (1), *on peut, sans changer son effet, transporter son point d'application en un point quelconque de sa direction.*

C'est-à-dire que, si l'on remplace une force OA (fig. 42) par une force O'B, égale en grandeur, en direction et en sens, et appliquée en un point du corps O', situé sur la direction de OA, cette force produira exactement le même effet que OA.

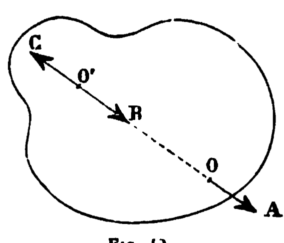


Fig. 42.

Pour le voir, appliquons en O' deux forces O'B et O'C de sens contraires, égales toutes deux à OA et de même direction Ces deux forces O'B et O'C se détruisent mutuellement, et leur ensemble n'a aucun effet sur le corps. Mais l'ensemble des deux forces OA et O'C qui agissent toutes les deux en sens contraire suivant la direction OO' de leurs points d'application, et qui sont égales entre elles, n'a évidemment aucun effet sur un corps solide, dont les points O et O' ne peuvent s'écarter l'un de l'autre. Nous pouvons donc, sans changer l'effet sur le corps, supprimer les deux forces OA et O'C. Il ne reste plus alors que la force O'B. On voit ainsi que cette dernière force produit le même effet que OA.

Nous n'avons pas besoin d'insister sur l'importance de ce théorème constamment appliqué en mécanique (2).

tenir compte aussi de la force centrifuge composée ; or, on trouve que celle-ci a une direction presque perpendiculaire à l'axe de la Terre, que sa composante perpendiculaire à l'axe s'ajoute numériquement à la force centrifuge due à la rotation de notre Globe autour de son axe, et que la valeur de cette composante n'atteint que $\frac{1}{200}$ de la valeur de cette dernière force.

(1) Nous entendons dans tout ce chapitre par *corps solide*, un corps qui ne peut pas se déformer sous l'influence des forces qui lui sont appliquées.

(2) Pour faire de ce théorème une application, qui nous sera utile plus

27. COMPOSITION DE DEUX FORCES PARALLÈLES. — Quand deux forces appliquées en deux points différents d'un même corps solide sont parallèles, elles admettent, en général, une résultante. Nous allons indiquer la règle qui permet de trouver cette résultante.

Il y a deux cas à considérer : — 1° celui où les deux forces sont de même sens ; — 2° celui où elles sont de sens contraires.

loin, au chapitre de la Capillarité, considérons un corps solide infiniment plat ayant la forme d'un triangle ABC (fig. 43), mobile dans son plan et soumis à trois forces F, F′, F″ respectivement perpendiculaires aux milieux a, b, c de chacun des côtés. Cherchons les conditions auxquelles doivent satisfaire ces forces pour se faire équilibre.

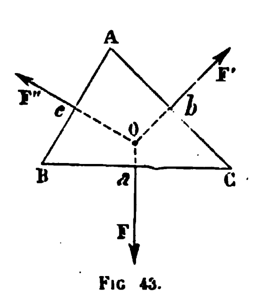


Fig 43.

On sait que les directions de ces trois forces se rencontrent en un même point O. Nous pouvons, en vertu du théorème précédent, remplacer chacune des forces données par une force égale de même direction et de même sens appliquée au point O, sans que l'effet sur le corps soit modifié.

Les trois forces étant alors appliquées en un même point O, il faut, pour qu'elles se fassent équilibre, qu'elles satisfassent à la relation (voir la note du § 20) :

$$(1) \qquad \frac{F}{\sin bOc} = \frac{F'}{\sin cOa} = \frac{F''}{\sin aOb}$$

Or, on a, d'autre part, la relation connue :

$$(2) \qquad \frac{BC}{\sin BAC} = \frac{CA}{\sin CBA} = \frac{AB}{\sin ACB}$$

et, comme les angles bOc, cOa, aOb sont respectivement supplémentaires des angles BAC, CBA, ACB, et, par conséquent, ont même sinus, il vient, en divisant membre à membre les relations (1) et (2) :

$$\frac{F}{BC} = \frac{F'}{CA} = \frac{F''}{AB}$$

Pour que les forces se fassent équilibre il faut qu'elles soient respectivement proportionnelles aux côtés auxquels elles sont appliquées.

1er CAS. — *Quand deux forces* Aa *et* Bb (fig. 44) *parallèles et de même sens sont appliquées en deux points* A *et* B *d'un même corps solide, leur résultante est une force* Cc *parallèle aux composantes, égale à leur somme et appliquée en un point* C *situé sur la droite* AB, *entre les points* A *et* B, *et partageant cette droite en deux segments* AC *et* BC *inversement proportionnels aux valeurs des forces adjacentes* Aa *et* Bb [1].

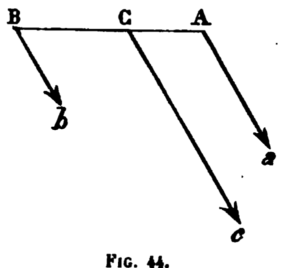


FIG. 44.

(1) Voici la démonstration de ce théorème.

Appliquons en A et en B deux forces AK et BL (fig. 45) égales entre elles, suivant la direction AB et de sens contraires; ces deux forces se détruisant mutuellement, rien n'est changé. Composons AK et Aa ainsi que BL et Bb suivant la règle du parallélogramme; nous pouvons remplacer les deux forces AK et Aa par leur résultante AR et les deux forces BL et Bb par leur résultante BS. Ces deux résultantes sont dans le même plan, mais n'étant pas parallèles, leurs directions se rencontrent en un point O. Transportons-les toutes les deux en O; c'est-à-dire remplaçons AR par la force égale OR_1 et BS par la force égale OS_1; rien n'est encore changé pour l'effet des forces.

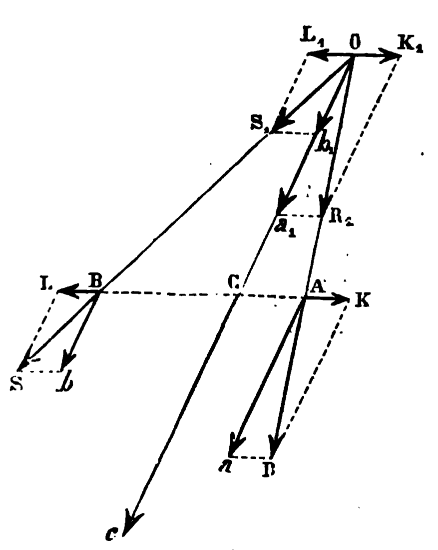


FIG. 45.

Décomposons maintenant OR_1 en une force OK_1 parallèle à AK et en une force Oa_1 parallèle à Aa; le parallélogramme de décomposition $Oa_1R_1K_1$ ayant même diagonale en grandeur et en direction que le parallélogramme AaRK et ayant ses côtés parallèles à ceux de ce dernier parallélogramme lui est égal; on a donc : $OK_1 = AK$ et $Oa_1 = Aa$.

Décomposons de même OS_1 en une composante OL_1 parallèle à BL et

Ainsi, si F et F' sont les valeurs des composantes A*a* et B*b* et R celle de la résultante ou a :

$$R = F + F'$$

et

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F'}{F} \qquad \text{ou} \qquad AC \times F = BC \times F'$$

On voit que les produits de la longueur de chaque segment par la force adjacente sont égaux.

Des relations ci-dessus on tire :

$$\frac{AC}{AC + CB} = \frac{F'}{F + F'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{F'}{F + F'}$$

en une composante Ob_1 parallèle à B*b*; pour les mêmes raisons que ci-dessus on a : $OL_1 = BL$ et $Ob_1 = Bb$. Or comme, OK_1 et OL_1 sont deux forces égales et directement opposées, on peut les supprimer sans changer l'effet des forces ; il reste alors les deux forces Oa_1 et Ob_1 qui, étant de même direction et de même sens, ont une résultante égale à leur somme. En transportant celle-ci au point C, où sa direction OC coupe la droite AB, on obtient une seule force C*c* qui, produisant le même effet que l'ensemble des deux forces A*a* et B*b*, est leur résultante. On voit que cette résultante est parallèle à la direction commune de ces deux forces, de même sens, égale à leur somme, puisqu'elle est égale à la somme de Oa_1 et de Ob_1 respectivement égale à A*a* et B*b*.

D'autre part les triangles OCA et A*a*R sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles ; ce qui fournit la relation.

$$\frac{CA}{aR} = \frac{OC}{Aa} \qquad \text{ou} \qquad CA \times Aa = OC \times aR$$

on a pour les mêmes raisons :

$$CB \times Bb = OC \times bS$$

Or, comme $aR = AK = BL = bS$, il en résulte :

$$CA \times Aa = CB \times Bb$$

ce qui est la relation indiquée dans le texte.

d'où, par conséquent :

$$AC = AB \times \frac{F'}{F + F'}$$

Cette formule permet de trouver aisément la position du point C (1).

Dans le cas ou $F = F'$ on a $CA = \frac{AB}{2}$: le point C est au milieu de la droite AB.

2me CAS. — *Quand deux forces* Aa *et* Bb (fig. 46) *parallèles et de sens contraires sont appliquées en deux points* A *et* B *d'un même corps solide, leur résultante est une force* Cc, *parallèle aux composantes, dans le sens de la plus grande des deux, égale à leur différence et appliquée en un point* C *situé sur la droite* AB, *en dehors de la partie* AB *du côté de la plus grande force, et partageant la droite* AB *en deux segments* CA *et* CB *inversement proportionnels aux valeurs des forces adjacentes* Aa et Bb (2).

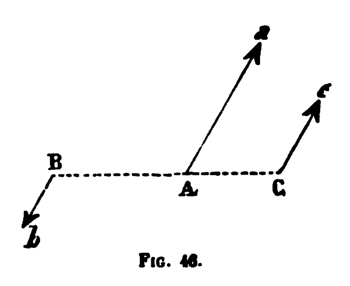


Fig. 46.

Ainsi, si F et F' sont les valeurs des composantes Aa et Bb

(1) Il peut se faire que le point C, ainsi déterminé, ne fasse pas partie du corps solide. En disant que la force Cc produit le même effet sur le corps que l'ensemble des deux forces Aa et Bb, nous entendons par là que, si le point C était invariablement lié aux autres points du corps solide, cette force Cc produirait le même effet que l'ensemble des forces Aa et Bb. Il en sera de même toutes les fois que nous remplacerons une ou plusieurs forces appliquées à un corps solide par une ou plusieurs autres forces, nous supposerons toujours que les points d'application de ces forces sont invariablement liés aux autres points du solide.

(2) La démonstration de ce théorème est calquée sur la démonstration du théorème précédent.

(F étant plus grand que F′) et R celle de la résultante on a :

$$R = F - F'$$

et en outre :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F'}{F} \quad \text{ou} \quad CA \times F = CB \times F'$$

On tire de là :

$$\frac{AC}{BC - AC} = \frac{F'}{F - F'} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{F'}{F - F'}$$

d'où :

$$AC = AB \frac{F'}{F - F'}$$

Qu'arriverait-il si les deux forces A*a* et B*b* parallèles et de sens contraires étaient égales entre elles? Essayons d'appliquer la règle précédente ; dans ce cas nous trouvons :

$$R = F - F' = 0$$

et

$$CA = AB \frac{F'}{F - F'} = AB \frac{F'}{0}$$

Ainsi la résultante serait une force nulle appliquée en un point situé à l'infini ; c'est dire qu'il n'y a pas de résultante : le système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, qu'on appelle un *couple*, produit un effet qui *ne peut pas être produit par une force unique*.

L'effet d'un couple (fig. 47), est de faire tourner le corps sur lui-même sans l'entraîner ; et cet effet ne cesse que si, par

suite de ce mouvement, les deux forces A*a* et B*b* se trouvent dirigées suivant la droite AB, qui joint leurs points d'applica-

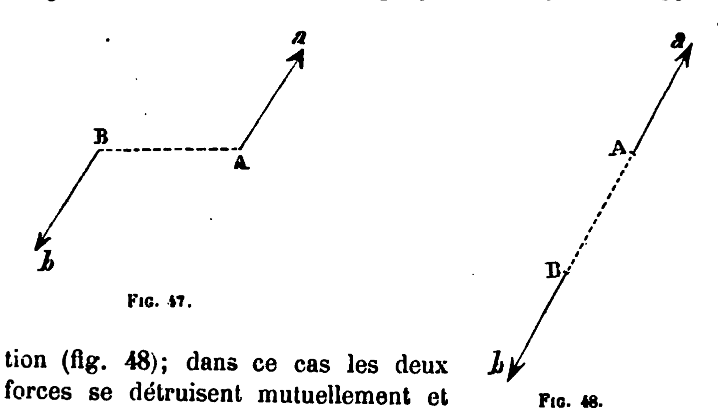


FIG. 47.

FIG. 48.

tion (fig. 48); dans ce cas les deux forces se détruisent mutuellement et leur effet est nul.

Nous étudierons plus loin les propriétés des couples.

28. COMPOSITION DE PLUSIEURS FORCES PARALLÈLES. — CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. — Quand plusieurs forces A*a*, B*b*, C*c*, etc., (fig. 49) parallèles et de même sens, sont appliquées aux différents points d'un corps solide, on peut les remplacer par une résultante unique égale à leur somme, parallèle à leur direction commune et appliquée en un certain point qu'on appelle le *centre des forces parallèles*. Ce point jouit d'une propriété très remarquable :

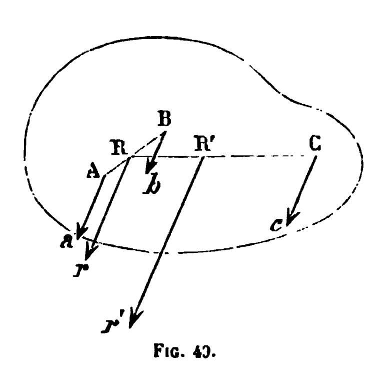


FIG. 49.

Si la direction commune de toutes les forces vient à varier, sans que, ni les valeurs de ces forces, ni leurs points d'application ne changent, le centre des forces parallèles conserve la même position dans le corps.

Cette proposition est aisée à démontrer. En effet, remplaçons deux des forces A*a* et B*b* par leur résultante R*r*. Cette résul-

tante est égale à $Aa + Bb$ parallèle à leur direction commune et appliquée en un certain point R; celui-ci, partageant AB en parties inversement proportionnelles à Aa et Bb, a une position qui ne dépend que de celle des points d'application A et B de ces deux forces et de leur grandeur, mais non de leur direction commune. Remplaçons ensuite Rr et une autre force Cc par leur résultante $R'r'$, qui est égale à $Cc + Rr = Cc + Bb + Aa$; son point d'application R' a une position qui ne dépend que de celle des points d'application des forces Rr et Cc et de la grandeur de celles-ci, par conséquent, qui ne dépend que de la position des points d'application des forces Aa, Bb et Cc et de leur grandeur, mais non de leur direction commune. Et ainsi de suite; en remplaçant toujours la résultante qu'on vient d'obtenir et une autre force par une nouvelle résultante, on arrive à la dernière de toutes, résultante de toutes les forces parallèles. Celle-ci est égale, par conséquent, à la somme de toutes ces forces et son point d'application (centre des forces parallèles) ne dépend que de la position des points d'application des forces et de la grandeur de celles-ci, mais non de leur direction commune. Cette direction peut donc varier sans que le centre des forces parallèles change de position dans le corps.

Nous verrons plus loin, à propos de la pesanteur, toute l'importance de ce résultat.

29. COMPOSITION DES FORCES SITUÉES DANS UN MÊME PLAN. — Si plusieurs forces appliquées à un corps solide sont situées dans un même plan, elles peuvent toujours être remplacées par une résultante ou par un couple résultant.

En effet, si deux forces ne sont pas parallèles, on peut les transporter l'une et l'autre au point de rencontre de leurs directions et ensuite les remplacer par une force unique en les composant suivant la règle du parallélogramme. En opérant de même avec chaque résultante et une autre force qui ne lui est pas parallèle, on arrivera soit à composer toutes les forces en une seule, soit à obtenir un certain nombre de forces parallèles entre elles. Dans ce dernier cas, on peut composer toutes les forces d'un certain sens en une seule force A et toutes les forces de l'autre sens en une seule force B. Alors, si ces deux forces

A et B sont inégales, elles sont remplaçables par une seule force : les forces primitives admettent une résultante. Si, au contraire, les forces A et B sont égales, elles constituent un couple : les forces primitives peuvent être remplacées par un couple résultant.

30. MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT. — On appelle *moment d'une force* Aa (fig. 50) *par rapport à un point* O, le produit $F \times OK$ de la valeur F de cette force par la distance OK du point O, à la direction de la force.

Le point O est appelé le *centre des moments.*

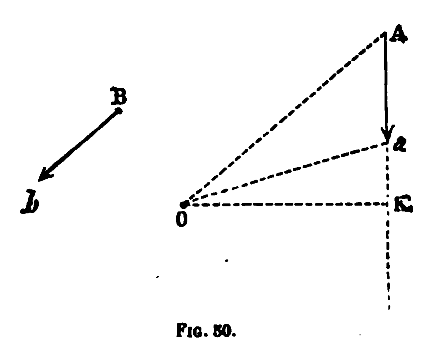


Fig. 50.

Quand la direction d'une force passe par le centre des moments, son moment est nul puisque le facteur OK du produit $F \times OK$ est nul. Réciproquement, si le moment d'une force est nul, ou cette force est nulle, ou sa direction passe par le centre des moments, puisqu'un produit $F \times OK$ ne peut être nul que si l'un des deux facteurs est nul.

Joignons le centre des moments O aux points A et *a* qui sont les extrémités de la droite représentative de la force F. L'aire du triangle OA*a* est égale à $\frac{1}{2} Aa \times OK = \frac{1}{2} F \times OK$. On voit que l'aire de ce triangle est numériquement égale à la moitié du moment de la force.

Lorsque plusieurs forces sont dans un même plan, et que le centre des moments O est un point du plan, on considère comme *positifs* les moments des forces qui tendent à faire tourner le corps autour du point O dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur placé de l'un des côtés du plan (exemple A*a* fig. 50), et comme *négatifs* les moments des forces qui tendent à faire tourner le corps en sens inverse du mouvement

des aiguilles d'une montre pour le même observateur (exemple B*b* fig. 50).

31. MOMENT D'UN COUPLE. — On appelle *moment* d'un couple le produit de la valeur F de l'une des forces du couple par la distance MN (fig. 51) des deux forces égales et parrallèles qui le composent. Si le couple tend à faire tourner le corps dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur placé de l'un des côtés de son plan, le moment est considéré comme *positif*; s'il tend à le faire tourner en sens inverse pour le même observateur, le moment est considéré comme *négatif*.

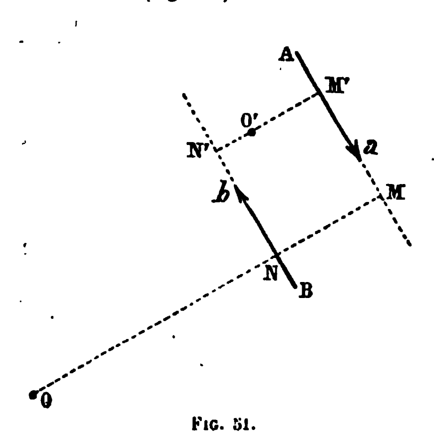


FIG. 51.

La somme algébrique des moments des deux forces du couple par rapport à un point quelconque de son plan est égale à la grandeur que nous venons d'appeler *moment* du couple.

Pour le voir, supposons d'abord que l'on choisisse comme centre des moments un point, tel que O, appartenant à la partie du plan qui n'est pas comprise entre les directions des deux forces. Alors, si le moment de l'une des forces est positif, le moment de l'autre est forcément négatif. Abaissons de O une perpendiculaire ONM sur la direction commune des deux forces; on a, d'après la figure, pour le moment de la force A*a* la valeur $+F\times OM$ et pour le moment de la force B*b* la valeur $-F\times ON$. La somme de ce ces deux moments est donc :

$$F\times OM-F\times ON=F\times MN$$

Supposons maintenant que l'on choisisse comme centre des moments un point, tel que O', appartenant à la partie du plan

comprise entre les directions des deux forces. Alors le moment de chacune des forces a le même signe ; dans le cas de la figure ils sont tous les deux positifs. En abaissant de O′ une perpendiculaire N′O′M′ sur la direction des deux forces, on a pour le moment de la force A*a* la valeur $+F \times O'M'$ et pour le moment de la force B*b* la valeur $+F \times O'N'$. La somme de ces deux moments est donc :

$$F \times O'M' + F \times O'N' = F \times M'N'$$

Ainsi dans l'un et l'autre cas, la somme des moments des deux forces a pour valeur le moment du couple.

Dans le cas de la figure 51, le couple tend à faire tourner le corps dans le sens des aiguilles d'une montre, et nous avons trouvé une valeur positive pour la somme des moments des deux forces. Nous aurions trouvé une valeur négative pour cette somme si le couple avait été disposé de façon à faire tourner le corps en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.

On voit donc qu'en valeur absolue et en signe le moment du couple représente bien la somme des moments des deux forces qui le composent par rapport à un point quelconque de son plan.

On dit qu'un couple est nul quand son moment est nul ; en effet, ou les forces sont nulles ou leur distance est nulle ; dans ce dernier cas, les deux forces du couple étant directement opposées, se détruisent mutuellement : dans les deux cas l'effet du couple sur le corps est nul.

32. THÉORÈME DES MOMENTS. — *Deux systèmes de forces situées dans un même plan, qui produisent le même effet sur un corps, sont tels que la somme des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan est la même pour les deux systèmes* (1).

(1) Pour démontrer ce théorème faisons remarquer d'abord que deux forces égales et directement opposées ont, par rapport à un point quelconque du plan, des moments égaux en valeur absolue mais de signes contraires. On

En particulier, *le moment de la résultante ou le moment du couple résultant de plusieurs forces situées dans un même plan,*

peut donc ajouter au système des forces, ou en retrancher, deux forces égales et directement opposées sans changer la somme des moments de toutes les forces.

D'autre part, nous allons montrer que la somme des moments, par rapport à un point quelconque de leur plan, de deux forces ayant même point d'application est égale au moment de leur résultante.

Pour faire cette démonstration, distinguons deux cas. Supposons d'abord le centre des moments O à l'extérieur de l'angle AMB formé par les deux forces ou de l'angle opposé A_1MB_1 (fig. 52); dans ce cas, les moments de ces forces étant de même signe, leur somme algébrique est la somme de leurs valeurs absolues, affectée de leur signe commun. Soient P*a*, P*b*, Pc les projections des deux forces MA et MB et de leur résultante MC sur une perpendiculaire P*c* à la droite OM; on a $Pc = Pa + ac = Pa + Pb$, car $Pb = ac$ comme projections de lignes égales et parallèles MB et AC; d'où :

$$OM \times Pc = OM \times Pa + OM \times Pb$$

Or les produits $OM \times Pa$, $OM \times Pb$ et $OM \times Pc$ représentent le double des aires des trois triangles OMA, OMB et OMC, c'est-à-dire représentent les moments des forces MA, MB, et MC; le théorème est donc démontré dans ce cas.

Supposons, en second lieu, que le centre O soit à l'intérieur de l'angle AMB formé par les deux forces ou de l'angle opposé A_1MB_1 (fig. 53); dans

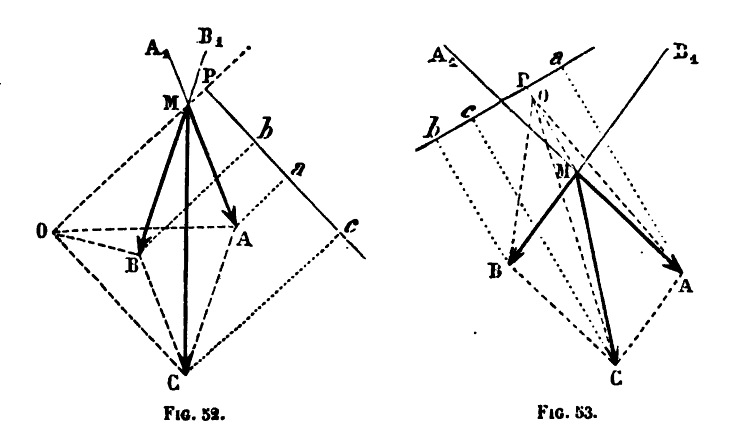


Fig. 52. Fig. 53.

ce cas les moments de ces deux forces étant de signes contraires, leur somme algébrique est la différence des valeurs absolues. Or on a, en faisant

par rapport à un point quelconque de ce plan, est égal à la somme des moments des composantes par rapport à ce point.

Quand la somme des moments par rapport à un point O de forces situées dans un même plan est nulle, ces forces ne peuvent se réduire à un couple, puisque le moment d'un couple qui n'est pas nul n'est jamais nul. Les forces ont alors une résultante unique et, comme le moment de cette résultante est nul, la direction de celle-ci passe par le centre des moments O.

Si l'on peut démontrer que la somme des moments des forces est nulle par rapport à trois points O,O',O'' non en ligne droite, la résultante des forces, ne pouvant être dirigée à la fois vers ces trois points O,O',O'', est nulle nécessairement : les forces se font équilibre. Il en est ainsi, en particulier, si la somme des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan est nulle.

Réciproquement, si plusieurs forces situées dans un même plan se font équilibre, leur résultante étant nulle, la somme de leur moment par rapport à un point quelconque du plan est nulle.

33. **PROPRIÉTÉ DES COUPLES,** — *On peut remplacer un couple dont les deux forces sont appliquées à un même corps solide,*

la même construction que dans le premier cas $Pc = Pb - bc = Pb - Pa$; d'où :

$$OM \times Pc = OM \times Pb - OM \times Pa$$

Le moment de la résultante est donc encore égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Ces deux points étant établis, faisons remarquer maintenant que tout passage d'un système de forces à un autre système de forces équivalent (déplacement d'une force suivant sa direction, composition de forces ayant même point d'application ou parallèles entre elles, décomposition d'une force en plusieurs autres ayant même point d'application ou parallèles, etc.) se fait par une série d'opérations qui sont soit des additions ou des soustractions de forces égales et directement opposées, soit des compositions de deux forces ayant même point d'application ou des décompositions d'une force en deux autres ayant même point d'application. Dans chacune de ces opérations partielles la somme des moments des forces ne variant pas, il en est de même pour l'ensemble des opérations et, par conséquent, la somme des moments, par rapport à un point quelconque du plan, des forces formant l'un des systèmes est égale à la somme des moments des forces formant l'autre système équivalent.

par un autre couple situé soit dans le même plan soit dans un plan parallèle et ayant même moment que le premier, sans que l'effet sur le corps soit changé.

Cette propriété de pouvoir remplacer un couple L par un autre couple M sous les conditions que nous venons d'indiquer est d'une application très fréquente (1).

(1) Démontrons d'abord cette proposition dans le cas où les couples L et M sont dans le même plan. Imaginons pour cela que dans ce plan se trouve un troisième couple N d'un moment égal et de signe contraire à celui des couples L et M. L'ensemble de ces trois couples produit le même effet que le couple L seul, car la somme des moments par rapport à un point quelconque du plan des quatre forces qui composent les couples M et N étant nulle, ces quatre forces se font équilibre. Pour la même raison l'effet des trois couples L, M et N est le même que l'effet du couple M seul, par conséquent, l'effet du couple L est le même que l'effet du couple M.

Pour démontrer la proposition, dans le cas où les couples L et M sont dans des plans parallèles P et Q, prenons comme couple L dans le plan P un couple dont les forces Aa et Bb de valeur F soient perpendiculaires à la droite AB qui joint leur point d'application (fig. 54); ce couple est équivalent à tout autre pris dans le même plan P et ayant même moment (F $\times$ AB).

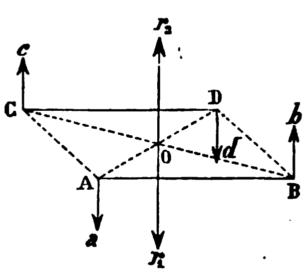


Fig. 54.

Menons maintenant dans le plan Q une droite CD égale et parallèle à AB et appliquons en C et en D des forces Cc et Dd égales et parallèles à Aa et Bb de façon à constituer un second couple N ayant un moment égal à celui de L, en valeur absolue, mais de signe contraire.

Il est aisé de voir que les couples L et N se font équilibre. En effet, composons ensemble les deux forces Aa et Dd qui sont égales, parallèles et de même sens; leur résultante Or_1, égale à 2F, est appliquée au milieu O de la droite AD, centre du parallélogramme ABCD. De même la résultante des forces Cc et Bb est une force Or_2 égale à 2F et appliquée au centre O du parallélogramme. Or, ces deux résultantes Or_1 et Or_2, étant égales et diamétralement opposées, se font équilibre.

Plaçons maintenant dans le plan Q un troisième couple M ayant même moment en grandeur et en signe que le couple L. L'ensemble des trois couples L, M, N produit le même effet que le couple M seul, puisque les couples L et N se font équilibre. D'autre part, l'ensemble de ces trois couples produit le même effet que le couple L seul, puisque les couples

Elle permet, par exemple, de placer où l'on veut le point d'application O de l'une des composantes du couple M, et de prendre pour ces composantes telle valeur F qu'on désire ; puisqu'en plaçant la seconde composante de façon que le plan qui passe par sa direction et par le point O soit parallèle au plan du couple L et en prenant les distances l des deux composantes telles que le produit Fl soit égal au moment du couple L, le couple M ainsi formé lui est équivalent.

34. REPRÉSENTATION ET COMPOSITION DES COUPLES. — Un couple n'est caractérisé que par la direction de son plan, par la valeur de son moment et par son signe, puisque tous les couples pour lesquels ces trois qualités sont les mêmes produisent le même effet.

Il est commode de représenter graphiquement ces trois qualités; voici la convention qui a été adoptée. Prenons un axe perpendiculaire au plan du couple et portons sur cet axe une longueur Pp (fig. 55) qui contienne autant de fois une unité de longueur déterminée qu'il y a d'unités dans la valeur du moment du couple. Cette droite Pp nous fait connaître la direction du plan du couple et son moment en valeur absolue. Pour représenter le signe du moment du couple, on convient de terminer la droite Pp par une flèche dirigée vers un observateur pour lequel le couple tend à faire tourner le corps autour de l'axe dans le sens des aiguilles d'une

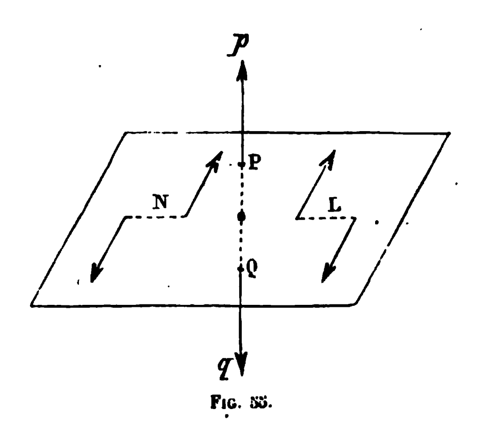


Fig. 55.

M et N se font aussi équilibre. Il en résulte que le couple L produit sur le corps le même effet que le couple M de même moment et placé dans un plan parallèle.

montre. Il résulte de là que, si le moment du couple change de signe, pour que le mouvement qu'il tend à produire maintenant sur le corps paraisse le faire tourner encore dans le sens des aiguilles d'une montre, il faut que l'observateur regarde de l'autre côté du plan du couple. On voit ainsi que la flèche est dirigée dans un sens ou dans l'autre suivant que le moment du couple est positif ou négatif (sur la figure 55, P*p* représente le couple L et Q*q* représente le couple N).

Le point P ou Q d'où part la droite représentative du couple est absolument arbitraire; aussi, quand plusieurs couples agissent sur un même corps solide peut-on prendre un même point de départ pour toutes les droites représentatives des couples.

Cette représentation graphique est très commode pour formuler la loi de la composition des couples :

Un nombre quelconque de couples peuvent toujours être remplacés par un seul couple (couple résultant) produisant sur le corps solide le même effet que l'ensemble des couples qui lui sont appliqués. Dans le cas de deux couples, on obtient le couple résultant en composant ceux-ci suivant la règle du parallélogramme. C'est-à-dire qu'on construit un parallélogramme ayant pour côtés adjacents les droites représentatives des deux couples et la diagonale de ce parallélogramme représente le couple résultant.

Cette dernière règle étant démontrée (1), on en conclut immé-

(1) Soient O*a* et O*b* les lignes représentatives des deux couples à composer (fig. 56). Prenons, dans le plan *a*O*b*, une force OA ayant une direction perpendiculaire à O*a* et numériquement égale à O*a*; joignons à cette force une autre force O'A' égale, parallèle, de sens contraire, et appliquée en un point O' d'une droite OX perpendiculaire au plan *a*O*b*, la distance OO' étant prise égale à l'unité : l'ensemble des deux forces OA et O'A' est précisément un des couples représentés par O*a*, puisque son plan AOO'A' est perpendiculaire à O*a*, et que OO' étant égal à l'unité, on a :

$$OA \times OO' = OA = Oa.$$

Or, ce couple OAO'A' produit sur le corps le même effet qu'un autre couple quelconque représenté par O*a*.

Si, de même, nous prenons dans le plan *a*O*b* une force OB perpendiculaire

diatement, comme on l'a fait pour les forces ou les vitesses, qu'on obtient la résultante d'un nombre quelconque de couples en construisant une ligne polygonale dont les côtés sont les droites représentatives des couples à composer; la droite qui joint les deux extrémités de la ligne polygonale représente un couple qui à lui seul produit le même effet que l'ensemble des couples composant : c'est le couple résultant.

à Ob et numériquement égale à Ob, et si nous menons par O′ une force O′B′ égale, parallèle et de sens contraire, ces deux forces forment un des couples représentés par Ob, et ce couple produit sur le corps le même effet qu'un autre couple quelconque représenté par Ob. Or, les forces OA et OB, d'une part, et les forces O′A′ et O′B′, d'une autre, peuvent être remplacées par leurs résultantes OC et O′C′; celles-ci sont les diagonales des parallélogrammes AOBC, A′O′B′C′, qui sont égaux entre eux comme ayant deux côtés respectivement égaux, parallèles et de sens inverses; par conséquent, les diagonales OC et O′C′ sont égales, parallèles et de sens opposés. On voit donc que les deux couples OA O′A′, OB O′B′ peuvent être remplacés par un seul couple OC O′C′.

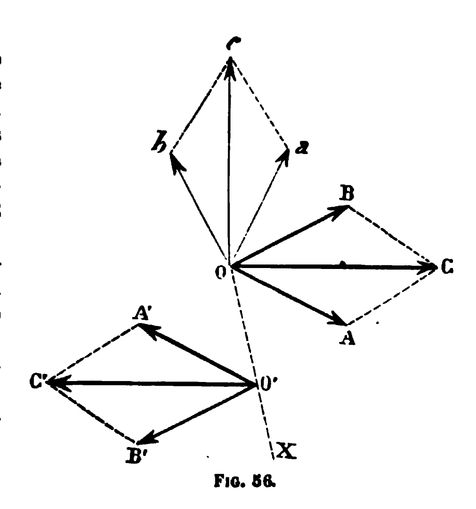


Fig. 56.

Si, maintenant, nous construisons le parallélogramme $Obca$ qui a pour côtés les lignes Oa et Ob représentatives des couples composants, ce parallélogramme est égal à OBCA comme ayant ses côtés adjacents respectivement égaux et perpendiculaires à ceux de OBCA. Il en résulte que la diagonale Oc de ce parallélogramme est égale à OC et lui est perpendiculaire. Comme on a alors :

$$OC \times OO' = OC = Oc$$

et comme la direction de Oc est perpendiculaire au plan du couple OC O′C′, cette diagonale Oc du parallélogramme $Obca$ représente bien le couple résultant OC O′C′.

35. COMPOSITION DE FORCES QUELCONQUES. — *Quand des forces quelconques sont appliquées à un même corps solide, elles peuvent être remplacées par l'ensemble d'une force* (*résultante*) *et d'un couple* (*couple résultant*). En outre, on peut se fixer *a priori* le point d'application de la résultante. La valeur et la direction de cette résultante ne dépendent pas du choix fait pour son point d'application; mais le moment du couple résultant en dépend généralement [1].

La résultante tend à entraîner le corps dans sa direction, le couple résultant à le faire tourner sur lui-même.

Il peut se faire, du reste, que, dans certains cas, en choisissant convenablement le point d'application de la résultante, le couple résultant soit nul. C'est ainsi que toutes les pressions exercées par un liquide sur la surface d'un solide baigné par lui

(1) Voici la démonstration de ce théorème.

Soit (fig. 57) O le point du corps que nous choisissons comme point d'application de la résultante. Ajoutons au système des forces deux forces Oa_1 et Oa_2 ayant O pour point d'application, de sens opposés, et toutes les deux égales et parallèles à une des forces appliquées au corps Aa. Ces deux forces Oa_1 et Oa_2 se détruisant mutuellement, l'effet des forces n'est pas changé. Or, la force Aa et la force égale, parallèle et de sens contraire Aa_2 constituent un couple. On peut ainsi remplacer chacune des forces telles que Aa par un couple et une force égale, parallèle et de même sens appliquée au point O (Oa_1 dans le cas de Aa). Toutes les forces, telles que Oa_1 ayant même point d'application, peuvent être remplacées par leur *résultante* et, d'autre part, tous les couples peuvent être remplacés par un *couple résultant*. Ainsi se trouve démontré le théorème.

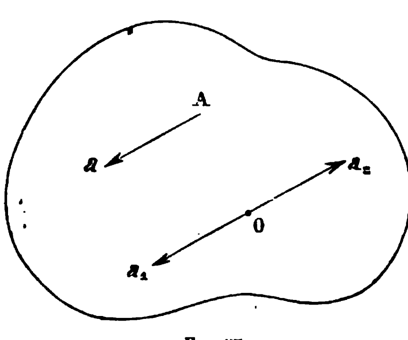


FIG. 57.

On voit que, quel que soit le point O choisi pour point d'application de la résultante, la valeur et la direction de celle-ci restent les mêmes. Au contraire, le couple résultant change en général quand le point d'application de la résultante varie.

peuvent être remplacées par une seule force (*la poussée*): ici le couple résultant peut être nul, en choisissant convenablement le point d'application O de la résultante: les pressions ne peuvent pas faire tourner le corps autour d'un axe passant par ce point O.

Par contre il peut se faire, dans certains cas, que la résultante soit nulle, toutes les forces se réduisant à un couple. C'est ainsi que les forces magnétiques exercées par le Globe terrestre sur tous les points d'un aimant, se réduisant à un couple seulement, l'aimant n'est entraîné dans aucune direction; il tend seulement à s'orienter sous l'action du couple, jusqu'à ce que ses deux composantes, qui, dans ce cas, ne changent ni de grandeur ni de direction pendant la rotation de l'aimant, se soient disposées suivant la même ligne droite : toutes les forces magnétiques se font alors équilibre.

On peut prendre pour point d'application de l'une des deux forces qui composent le couple résultant le point d'application même de la résultante : du reste, tout en conservant au plan de ce couple la même direction et au moment du couple la même valeur, on peut prendre pour ses composantes des forces ayant une valeur F choisie *à priori*; il suffit, en effet, de donner à la distance l des deux composantes du couple une valeur telle que le produit Fl soit égal au moment du couple résultant. Si nous composons maintenant en une seule force la résultante et la force du couple qui est appliquée au même point, on voit que :

Toutes les forces appliquées à un même corps solide peuvent être remplacées par deux forces seulement (*résultantes*), *le point d'application de l'une des résultantes et la valeur de l'autre pouvant être assignés a priori*, la valeur de la première résultante et le plan qui contient le point d'application de celle-ci et la seconde résultante étant alors déterminés par le nombre, la grandeur et la disposition des forces à composer.

36. THÉORÈME DES PROJECTIONS SUR UN AXE. — *La projection sur un axe quelconque de la résultante de deux ou de plusieurs forces ayant même point d'application est égale à la*

somme algébrique des projections des composantes sur le même axe.

De ce théorème très facile à démontrer (1), il résulte, en particulier, que la force tangentielle (mv'_t) est égale à la somme des projections sur la tangente à la trajectoire du point matériel des forces réelles qui agissent sur lui, et que la force centripète $\left(\frac{mv^2}{R}\right)$ est égale à la somme des projections de ces forces *réelles* sur la normale principale. Ces rélations sont souvent appliquées.

Un théorème beaucoup plus général résulte du précédent :

La projection sur un axe quelconque de la résultante de toutes les forces appliquées à un corps solide est égale à la somme algébrique des projections des composantes.

En particulier, si plusieurs forces agissant sur un corps solide se font équilibre, la somme algébrique de leur projection sur un axe quelconque est nulle.

(1) Ce théorème est presque évident, si l'on se reporte à la manière dont on obtient la résultante de plusieurs forces appliquées en un même point. On forme une ligne polygonale OABCDE (fig. 58) dont les différents côtés

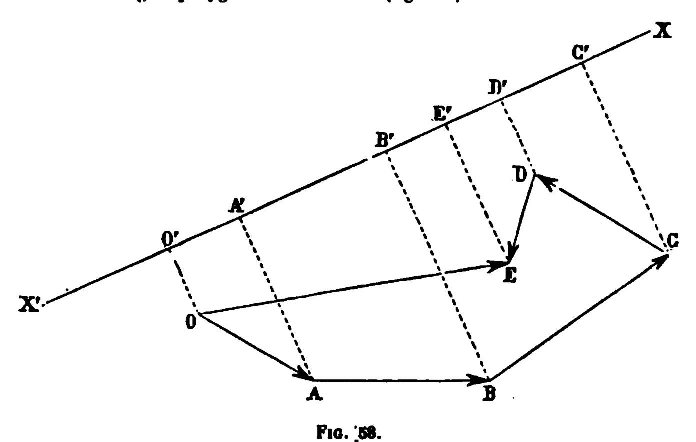


Fig. 58.

sont respectivement égaux et parallèles aux forces à composer et, par conséquent, ont même projection sur un axe quelconque; la droite OE qui ferme

Pour le voir, faisons remarquer d'abord que les deux composantes d'un couple ayant toujours des projections égales et de signes contraires sur un même axe, la projection d'un couple est toujours nulle : il n'y a pas lieu de s'en occuper.

Faisons remarquer ensuite que, pour passer du système des composantes au système formé de la résultante et du couple résultant, nous avons fait une série d'opérations qui rentrent dans l'une des trois catégories suivantes : 1° addition de deux forces égales et directement opposées ; 2° composition de plusieurs forces ayant même point d'application en une seule ; 3° composition de couples. Or, dans chacune de ces opérations partielles, la somme algébrique des projections de toutes les forces sur un même axe ne variant pas, il en est de même pour l'ensemble des opérations.

37. **MOMENT PAR RAPPORT A UN AXE.** — On appelle *moment d'une force par rapport à un axe* XX' le moment de la projection A'a' de la force Aa sur un plan P perpendiculaire à l'axe XX' par rapport au point O où cet axe traverse le plan P (fig. 59).

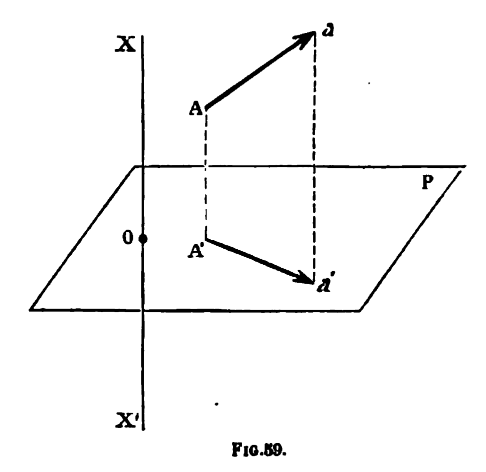


Fig. 59.

la ligne polygonale représente la résultante de ces forces.

Soient O',A',B',C',D',E', les projections sur un axe quelconque X'X des points O,A,B,C,D,E; on a évidemment, d'après la figure :

$$O'E' + E'D' + D'C' = O'A' + A'B' + B'C'$$

d'où :

$$O'E' = O'A' + A'B' + B'C' + (-C'D') + (-D'E')$$

Or, chaque terme de cette dernière somme représente, en valeur et en signe, la projection de l'une des composantes, tandis que O'E', qui est égale à cette somme, représente la projection de la résultante.

Une force contenue dans un plan passant par l'axe XX′ a une projection dont la direction rencontre le point O, à moins que la force ne soit parallèle à XX′, auquel cas sa projection sur le plan P est nulle ; dans les deux cas, le moment de la force par rapport à XX′ est nul.

Réciproquement, si une force a un moment nul par rapport à XX′, la direction de sa projection passe par le point O, à moins que cette projection ne soit nulle, ce qui indique que la force est parallèle à XX′ ou nulle : la force est contenue dans un plan passant par l'axe, ou bien cette force est nulle.

Deux systèmes de forces qui produisent le même effet sur un corps sont tels que la somme des moments des forces par rapport à un axe quelconque est la même pour les deux systèmes (1).

En particulier, *la somme des moments par rapport à un axe*

(1) La démonstration de ce théorème est calquée sur celle du théorème analogue correspondant aux forces situées dans un même plan.

Remarquons d'abord que deux forces égales et directement opposées ont des moments égaux en valeur absolue et de signes contraires par rapport à un axe quelconque. On peut donc ajouter à un sysètme de forces ou en retrancher deux forces égales et directement opposées sans changer la somme des moments.

D'autre part, nous savons que la projection sur un plan P perpendiculaire à un axe quelconque XX′, de la résultante M*c* de deux forces M*a* et M*b* est précisément la résultante des projections M′*a*′ et M′*b*′ de ces deux forces (fig. 38), et nous savons aussi que le moment de la résultante M′*c*′ par rapport au point O où l'axe XX′ perce le plan P est égal à la somme des moments des composantes M′*a*′ et M′*b*′ par rapport à ce point. Or, par définition, les moments par rapport au point O, de M′*a*′, M′*b*′, M′*c*′ sont respectivement les moments de M*a*, M*b*, M*c* par rapport à XX′; par conséquent, *la résultante* M*c* *a, par rapport à un axe quelconque* XX′, *un moment qui est la somme des moments des deux composantes* M*a* et M*b*.

Ces deux points établis, remarquons que toutes les transformations d'un système de forces en un autre équivalent (composition de forces concourantes ou parallèles, décomposition en forces concourantes ou parallèles, composition et décomposition des couples etc.) se font par une série d'opérations qui consistent à composer deux forces appliquées en un même point ou à decomposer une force en deux forces ayant même point d'application, ou bien encore à ajouter ou à retrancher deux forces égales et directement opposées; la somme des moments des forces restant la même dans chaque opération de ce genre, il en est de même pour l'ensemble des opérations.

quelconque des deux résultantes ou de la résultante et des composantes du couple résultant est la même que la somme des moments de toutes les forces appliquées à un corps solide.

C'est la généralisation du théorème des moments par rapport à un point; ce dernier théorème n'étant évidemment qu'un cas particulier de celui que nous venons d'énoncer.

Si toutes les forces qui agissent sur un corps se font équilibre, les résultantes étant nulles, les moments de ces résultantes sont nuls : *la somme des moments par rapport à un axe quelconque de toutes les forces est nulle.*

Réciproquement, si la somme des moments par rapport à un axe quelconque de toutes les forces est nulle, *toutes ces forces se font équilibre.* Prenons, en effet, un axe perpendiculaire au plan du couple résultant et passant par la résultante; la somme des moments du couple et de la résultante devant être nulle, et le moment de cette résultante étant nul, il faut que le couple soit nul. Prenons maintenant un second axe qui ne rencontre pas la direction de la résultante; pour que le moment de celle-ci soit nul, il faut que sa valeur soit nulle.

Ce théorème des moments par rapport à un axe est précieux toutes les fois qu'on a à considérer l'équilibre d'un corps solide pouvant tourner autour d'un axe fixe. Parmi les forces qui agissent sur le corps, la résistance de l'axe de rotation doit intervenir; or, on ne connaît *a priori* ni la grandeur ni la direction de cette force ; on sait seulement que son point d'application se trouve sur l'axe. Dès lors, si l'on prend celui-ci comme axe des moments, le moment de la résistance est nul, et, pour qu'il y ait équilibre, *il faut que la somme des moments des autres forces par rapport à l'axe soit nulle.*

Du reste, *il suffit que la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation soit nulle* pour qu'il y ait équilibre. Remplaçons, en effet, les forces par leurs deux résultantes, et choisissons pour point d'application de l'une d'elles un point de l'axe de rotation de façon que son moment soit nul. Le moment de l'autre résultante étant nul aussi, puisque la somme des moments de toutes les forces est nulle, il faut que sa direction passe par un point de l'axe. Comme on peut la supposer appliquée en ce point de l'axe de rotation sans changer son effet, on

voit que es deux résultantes étant appliquées à l'axe sont détruites par la résistance de celui-ci : il y a équilibre.

38. MOMENT PAR RAPPORT A UN PLAN. — On appelle *moment d'une force par rapport à un plan* P *qui lui est parallèle*, le produit $F \times AA'$ de la valeur F de la force par la distance AA' de la force au plan (fig. 60).

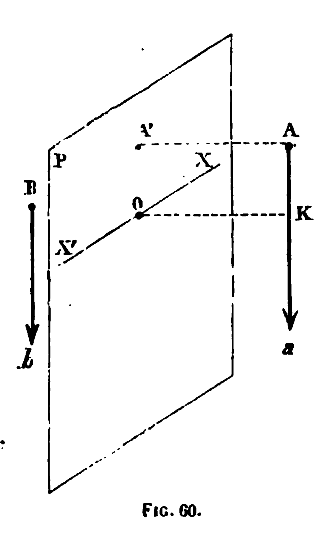


Fig. 60.

Quand une force est située dans le plan P (*plan des moments*) son moment est nul puisque la distance AA' de la force au plan est nulle. Réciproquement, si le moment d'une force est nul, ou cette force est nulle, ou elle est contenue dans le plan des moments.

Menons dans le plan des moments une droite X'X perpendiculaire à la direction de la force ; si cette force tend à faire tourner autour de X'X le corps auquel elle est appliquée dans le sens des aiguillos d'une montre, le moment de la force est considéré comme positif (exemple A*a* fig. 60); si la force tend à faire tourner le corps en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre, le moment est considéré comme négatif (exemple B*b* fig. 60). On voit que deux forces parallèles, de même sens et situées de part et d'autre du plan des moments ont des moments de signes contraires. Il est évident aussi que deux forces parallèles, de sens inverses, situées du même côté du plan des moments ont des moments de signes contraires.

Faisons remarquer que le moment d'une force A*a* (fig. 60), par rapport à un plan P n'est pas autre chose que le moment ($F \times OK$) de cette force par rapport à un axe X'X situé dans le plan P et ayant une direction perpendiculaire à la force.

Puisque le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un axe quelconque, ou la somme des moments des composantes du couple résultant, égale la somme

des moments des forces par rapport à cet axe, on en conclut que :

Le moment par rapport à un plan de la résultante de plusieurs forces parallèles entre elles et parallèles à ce plan, ou la somme des moments des composantes du couple résultant, égale la somme des moments des forces composantes.

Au fond, la notion de *moment par rapport à un plan* fait double emploi avec celle de *moment par rapport à un axe* qui est plus générale et il n'y aurait pas lieu de la conserver, si l'on ne pouvait pas établir directement et simplement le théorème que nous venons de déduire du théorème des moments par rapport à un axe (1).

(1) Voici la démonstration directe du théorème énoncé plus haut. Considérons d'abord deux forces parallèles et de même sens A*a* et B*b* (fig. 61) et leur résultante C*c*. Abaissons des trois points A, C, B situés en ligne droite, des perpendiculaires AA′, CC′, BB′ sur le plan P; ces trois droites étant contenues dans un même plan, les points A′, C′, B′ où elles rencontrent le plan P sont situés en ligne droite, et l'on a la relation :

$$\frac{CC' - BB'}{AA' - CC'} = \frac{BC}{AC}$$

d'autre part :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{Aa}{Bb}$$

d'où :

$$\frac{CC' - BB'}{AA' - CC'} = \frac{Aa}{Bb}$$

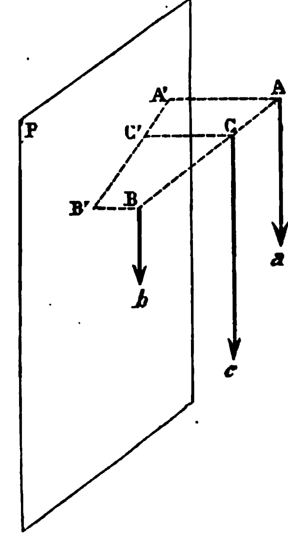


Fig. 61.

On tire de cette relation :

$$CC' \times Bb - BB' \times Bb = AA' \times Aa - CC' \times Aa$$

39. DÉTEMINATION DU CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. — Le théorème des moments par rapport à un plan, ou le théorème plus général des moments par rapport à un axe, donne un moyen commode de trouver le centre des forces parallèles.

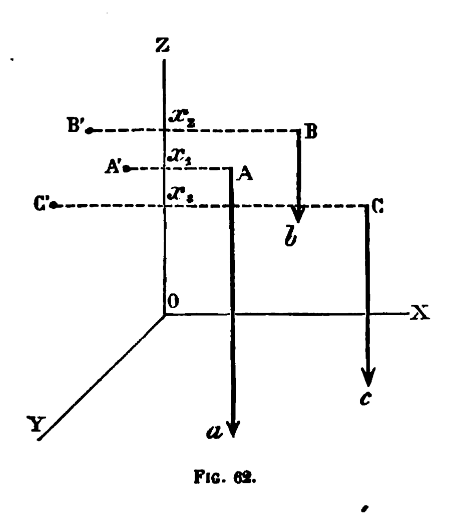


Fig. 62.

Prenons trois axes des coordonnées rectangulaires entre eux OX, OY, OZ (fig. 62). Soient x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $x_3, y_3, z_3 \ldots\ldots$ les coordonnées des points d'application A, B, C... des forces parallèles et soient F_1, F_2, $F_3 \ldots$ les valeurs de ces forces.

d'où

$$CC' \times (Bb + Aa) = AA' \times Aa + BB' \times Bb$$

ou

$$CC' \times Cc = AA' \times Aa + BB' \times Bb$$

Cette relation montre qne le moment de la résultante Cc est égal à la somme des moments des deux composantes. Dans le cas de la figure 61 les moments des deux forces composantes sont positifs; si le plan P coupait la ligne AB qui joint les points d'application des forces, il y aurait à considérer des moments de signes contraires, mais on trouverait de même que le moment de la résultante égale la *somme algébrique* des moments des composantes.

Une démonstration calquée sur la précédente montre que cette proposition subsiste quand les deux forces sont parallèles et de sens opposés.

On en conclut, par conséquent, que, quel que soit le nombre des forces parallèles, le moment de la résultante de toutes ces forces ou, dans le cas où toutes les forces se réduisent à un couple, la somme des moments des deux composantes du couple, égale la somme des moments des forces composantes.

Désignons par X, Y, Z, les coordonnées du point d'application de la résultante de ces forces, c'est-à-dire les coordonnées du centre des forces parallèles, et par R la valeur de cette résultante.

Nous savons que la position du centre des forces parallèles est indépendante de la direction commune des forces; supposons alors que toutes les forces soient parallèles à OZ, et écrivons que le moment de leur résultante, par rapport au plan ZOY, ou, ce qui revient au même, par rapport à l'axe OY, est égal à la somme des moments des composantes ; les distances des forces au plan des moments étant l'x des points d'application, on a :

$$(1) \qquad RX = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \ldots = \sum Fx$$

Si maintenant nous prenons les moments des forces par rapport au plan ZOX, ou, ce qui revient au même, par rapport à l'axe OX, la distance des forces au plan ZOX étant l'y des points d'application, on a :

$$(2) \qquad RY = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3 + \ldots = \sum Fy$$

Supposons maintenant que les forces soient toutes parallèles à OY, et prenons leur moment par rapport au plan XOY, ou, ce qui revient au même, par rapport à l'axe OX ; la distance de leur point d'application au plan XOY étant le z des points d'application, on a :

$$(3) \qquad RZ = F_1z_1 + F_2z_2 + F_3z_3 + \ldots = \sum Fz$$

Nous avons, en outre, la relation :

$$(4) \qquad R = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots = \sum F$$

Cette dernière relation fait connaître la valeur de R et les rela-

tions (1), (2), (3), déterminent les coordonnées X, Y, Z du centre des forces parallèles.

40. CENTRE DE GRAVITÉ. — Quoique la notion de *centre de gravité* soit venue de l'étude de la Pesanteur, cette notion est utile à connaître pour la Mécanique générale et nous devons en donner, dès à présent, une définition précise indépendante de la Pesanteur.

Supposons un corps, ou un système de corps, dont la position est rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires. Divisons ce système en portions assez petites pour être assimilées chacune à des points; soient $m_1, m_2, m_3 \dots$ les masses de chacune de ces portions, et désignons pas $x_1, y_1, z_1, \; x_2, y_2, z_2, \; x_3, y_3, z_3, \dots$ leurs coordonnées. Appelons enfin M la masse totale du système :

$$(1) \qquad M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum m$$

Le *centre de gravité* est le point dont les coordonnées X, Y et Z sont fournies par les relations suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} MX = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots = \sum mx \\ MY = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots = \sum my \\ MZ = m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \dots = \sum mz \end{array} \right.$$

Nous définirons plus loin (L. II, Chap. I § 3) le centre de gravité comme le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur sur toutes les parties du corps. Les actions de la pesanteur étant des forces parallèles et de même sens, ces deux définitions reviennent au même, grâce au fait d'expériences, que nous établirons (L. II Chap. II §§ 7 et 8), que quand un corps tombe

sous l'action de la force de pesanteur seule, l'accélération du mouvement est une même constante g quelle que soit la nature du corps, ce qui fait que mg représente la force de pesanteur agissant sur un corps de masse m. En effet, multiplions les deux membres de la relation (1) et de chacune des relations (2) par cette constante g; les relations ainsi modifiées expriment que X, Y et Z sont les coordonnées du point d'application de la résultante des forces de pesanteur agissant sur toutes les parties du corps, d'après les formules (1), (2), (3) et (4) du paragraphe précédent.

Nous aurons occasion, un peu plus loin, de montrer l'importance de la notion de centre de gravité.

41. QUATRIÈME PRINCIPE. — L'ACTION ÉGALE LA RÉACTION. — Pour toutes les forces naturelles on constate une réciprocité parfaite entre l'action qu'exerce un corps sur un autre et l'action qu'exerce celui-ci sur le premier (*réaction*), c'est-à-dire que, si un corps A (fig. 63) agit sur un corps B avec une certaine force F, réciproquement B agit sur A avec une force F' *égale à* F *en grandeur et en direction*, mais de *sens opposé* : si A attire B, réciproquement B attire A; si A repousse B, réciproquement B repousse A, l'*action* et la *réaction* étant toujours égales en grandeur et en direction.

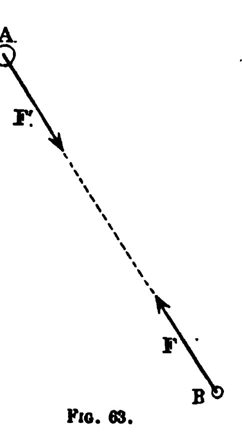


FIG. 63.

Ainsi le Soleil attire la Terre avec une certaine force, et la Terre attire le Soleil avec la même force.

Une pierre pesant un kilogramme est attirée par la Terre avec une force de 1 kilogramme-poids; réciproquement la Terre est attirée par la pierre avec une force de 1 kilogramme-poids. Si aucun obstacle ne gêne cette attraction mutuelle, la pierre s'avance vers la Terre, et aussi la Terre vers la pierre; mais, comme une même force, appliquée à deux corps de masses différentes, donne des accélérations en raison inverse des masses, la vitesse acquise au bout de l'unité de temps est très notable pour

la pierre, dont la masse est faible, tandis qu'elle est tout à fait insignifiante pour la Terre dont la masse est énorme.

Dans ces exemples, que nous n'avons choisis que pour faire comprendre la portée du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, on ne peut en faire une vérification. Dans l'exemple suivant, au contraire, la vérification se fait aisément.

Examinons les conditions d'équilibre d'une corde tendue, dont chaque portion ne serait soumise qu'aux tensions exercées par les parties voisines. Considérons la corde comme une file de particules; d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, chaque particule doit attirer la particule suivante et être attirée par elle avec la même force; du reste, pour l'équilibre, il faut que chaque particule soit également attirée par la particule suivante et par la particule précédente. On voit ainsi que la même tension doit exister dans toute la longueur de la corde, et que les deux extrémités de celle-ci doivent exercer le même effort sur les obstacles auxquels elles sont fixées. Cette conséquence immédiate du quatrième principe se vérifie facilement en attachant chacune des extrémités d'une corde au crochet d'un dynamomètre : si l'on écarte l'un de l'autre les deux dynamomètres pour tendre la corde, ceux-ci indiquent la même force.

Dans la suite de ce cours, nous aurons plusieurs fois l'occasion de vérifier la justesse du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, dont toutes les conséquences vérifiables ont été confirmées par les faits.

Ce principe permet d'introduire une simplification importante dans l'étude de l'effet produit par les forces qui agissent sur un corps.

Un corps quelconque peut être considéré comme formé d'un très grand nombre de points matériels entre lesquels s'exercent des forces, dites *forces intérieures*, deux à deux égales, de même direction et de sens opposés. En outre, il peut être soumis à des forces qui, n'émanant pas d'une de ses parties, sont appelées *forces extérieures*.

Or, il est inutile, pour le théorème des projections sur un axe, de tenir compte des forces intérieures, puisque, les projections de ces forces étant deux à deux égales et de signes contraires, leur somme algébrique est nulle :

La somme algébrique des projections de toutes les forces sur

un axe est égale à la somme algébrique des projections des forces extérieures.

Il en est de même pour le théorème des moments : la somme des moments par rapport à un point, un axe ou un plan des forces intérieures est évidemment nulle puisque ces moments sont deux à deux égaux et de signes contraires :

La somme algébrique des moments de toutes les forces est égale à la somme algébrique des moments des forces extérieures.

42. MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN SYSTÈME. — Nous n'avons étudié jusqu'à présent que le mouvement d'un point matériel. Voici un théorème qui ramène le problème du mouvement du centre de gravité d'un corps, ou d'un système de corps, à celui du mouvement d'un point matériel.

Le mouvement du centre de gravité d'un système est le même que si toute la masse du système était concentrée en ce point et que si toutes les forces extérieures qui agissent sur les diverses parties du système lui étaient appliquées en conservant la même direction, le même sens et la même grandeur ([1]).

(1) Pour démontrer ce théorème, prenons les équations (2 du § 40) qui définissent les coordonnées $X_1 Y_1 Z$ du centre de gravité. Ces coordonnées, ainsi que celles $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ etc. des divers points du système sont des fonctions du temps, quand ce système est en mouvement. Égalons les dérivées secondes par rapport au temps des deux membres des égalités (2); il vient :

$$(1) \qquad MX''_t = \sum mx''_t \qquad MY''_t = \sum my''_t \qquad MZ''_t = \sum mz''_t$$

Or, mx''_t, my''_t, mz''_t représentent respectivement les projections F_x, F_y, F_z sur les trois axes de la résultante F des forces f qui agissent sur le point matériel de masse m (relation (4) § 23), ou, par conséquent, la somme des projections f_x, f_y, f_z sur ces trois axes des forces f; on a donc :

$$(2) \qquad MX''_t = \sum f_x \qquad MY''_t = \sum f_y \qquad MZ''_t = \sum f_z$$

Dans ces trois sommes les projections sur chacun des axes des forces

Nous n'avons pas besoin de faire ressortir l'importance de ce théorème.

intérieures s'annulent réciproquement, comme nous le savons ; les seconds membres de ces égalités sont donc égaux seulement à la somme des projections des forces extérieures. Or, en transportant ces forces au centre de gravité, tout en leur conservant même grandeur et même direction, on ne change pas leur projection sur les axes. En outre, les projections R_x, R_y et R_z sur les trois axes de la résultante R de toutes ces forces sont égales respectivement à la somme des projections de ces forces :

(3) $$R_x = \sum f_x \qquad R_y = \sum f_y \qquad R_z = \sum f_z$$

On a donc :

(4) $$MX''_t = R_x \qquad MY''_t = R_y \qquad MZ''_t = R_z$$

Or, pour un point matériel A qui aurait une masse égale à la masse M du système et qui serait soumis constamment à la force R, on aurait, en désignant par x, y et z ses coordonnées :

(5) $$Mx''_t = R_x \qquad My''_t = R_y \qquad Mz''_t = R_z$$

On tire de (4) et (5) :

(6) $$X''_t - x''_t = 0 \qquad Y''_t - y''_t = 0 \qquad Z_t - z''_t = 0$$

et, en égalant les fonctions primitives des deux membres :

(7) $$X'_t - x'_t = C \qquad Y'_t - y'_t = C' \qquad Z'_t - z'_t = C''$$

Supposons qu'à un certain moment le point matériel A possède la même vitesse que le centre de gravité ; les constantes arbitraires C, C', C'' sont nulles alors, et il vient :

(8) $$X'_t - x'_t = 0 \qquad Y'_t - y'_t = 0 \qquad Z'_t - z'_t = 0$$

Ce qui nous montre que les vitesses du point A et du centre de gravité sont constamment égales entre elles.

En égalant les fonctions primitives des deux membres des égalités (8), il vient :

(9) $$X - x = D \qquad Y - y = D' \qquad Z - z = D''$$

Supposons qu'à un certain moment le mobile A coïncide avec le centre de gravité, alors les constantes arbitraires D, D', D'' sont nulles et l'on a :

(10) $$X - x = 0 \qquad Y - y = 0 \qquad Z - z = 0$$

Ce qui nous montre que le point A coïncide constamment en position avec

On peut, comme on le sait, remplacer toutes les forces extérieures qui agissent sur un corps solide par une résultante appliquée au centre de gravité et par un couple ; cette résultante étant précisément celle qu'on obtient en appliquant au centre de gravité toutes les forces qui agissent sur le corps solide sans changer ni leur grandeur ni leur direction et en les composant ensuite. D'après le théorème que nous venons d'énoncer, c'est cette force qui détermine le mouvement du centre de gravité ; quant au couple, il a pour effet de faire tourner le corps sur lui-même. C'est ainsi, qu'en général, les forces appliquées à un corps solide donnent naissance non pas à un simple mouvement de translation mais à un mouvement plus complexe.

Pour que le corps soit toujours animé d'un mouvement de translation, il faut et il suffit :

1° *Que toutes les forces extérieures puissent être remplacées par une seule force appliquée au centre de gravité* ; autrement dit, que le couple dont il vient d'être question soit nul.

2° *Qu'à l'origine du temps le mouvement soit de translation* (ou nul) (1).

43. CINQUIÈME PRINCIPE. — LA FORCE NE DÉPEND QUE DE LA DISTANCE ENTRE LES PARTIES AGISSANTES. — Ce principe est un complément du principe précédent et pourrait, à la rigueur, être compris avec lui dans un même énoncé.

Les forces qu'exercent l'une sur l'autre deux portions de matières assez petites vis-à-vis de la distance qui les sépare pour être assimilées à des points sont dirigées suivant la droite qui joint ceux-ci, ont la même valeur, et sont de sens inverses, conformément au principe précédent ; en outre, ***leur valeur commune ne dépend que de la distance des deux points.***

Newton a déduit des lois de Kepler que le Soleil attire une planète, avec une force qui ne dépend que de la distance de

le centre de gravité du système, en d'autres termes que celui-ci se meut comme le point matériel A.

C.Q.F.D

(1) Cette proposition est presque évidente, d'après ce que nous venons d'exposer, et, comme sa démonstration rigoureuse est un peu longue, nous ne la donnerons pas.

la planète au Soleil, la force variant en raison inverse du carré de la distance.

Dans le domaine des extrêmement petits ce principe semble être tout aussi exact. Nous en déduirons plus loin (T 1er L. I, Chap. I, § 6) que le travail des forces intérieures d'un système ne dépend que de l'état initial et de l'état final; or, de toutes les conséquences de ce remarquable théorème la plus importante peut-être est celle qui nous apprend que la quantité de chaleur dégagée dans une réaction chimique est indépendante de la manière dont s'effectue cette réaction. On doit à M. Berthelot d'avoir énoncé cette grande loi et, en outre, d'en avoir prouvé l'exactitude par ses nombreuses déterminations calorimétriques.

SUPPLÉMENT AU LIVRE PREMIER

INSTRUMENTS DE MESURE

SUPPLÉMENT AU LIVRE PREMIER

INSTRUMENTS DE MESURE

Si l'on passe en revue les diverses mesures qu'on effectue en Physique, on reconnaît bien vite qu'elles se ramènent presque toutes à des mesures de longueur, à des mesures de masse, ou à des mesures de temps, et c'est pour cela qu'on a eu raison de choisir comme unités fondamentales du système de mesures absolues adopté actuellement, une unité de longueur, une unité de masse, et une unité de temps.

Le temps se mesure à l'aide d'horloges ou chronomètres, dont la marche est rendue régulière, soit par l'oscillation d'un pendule, soit par l'oscillation d'un ressort, et qui sont réglés par les observations astronomiques nécessaires pour obtenir la valeur de la seconde, d'après sa définition.

Nous dirons, plus loin, quelques mots de l'emploi du pendule pour régulariser le mouvement des horloges. Nous parlerons aussi, à propos de la pesanteur, de la *balance* qui est l'instrument dont on se sert pour mesurer les masses.

Nous allons, dans ce chapitre, nous occuper spécialement des moyens employés pour mesurer une longueur avec précision, ou pour obtenir la valeur d'un angle par la mesure de la longueur de l'arc compris entre ses côtés.

1. **MÈTRE-ÉTALON.** — Comme nous le savons déjà, l'étalon de longueur est le mètre des Archives, qui, par définition, a une longueur *d'un mètre* à 0°.

Le mètre des Archives est un mètre *à bouts*, c'est-à-dire que la barre de platine qui le représente a un mètre de long d'une extrémité à l'autre. Or, ces étalons à bouts se copient avec moins de précision que ceux qui comprennent le mètre entre deux traits placés près de leurs extrémités, dits étalons *à traits*. Aussi la *Commission du mètre* a-t-elle fait construire un nouveau mètre-étalon en platine iridié, qui, à 0°, possède aussi exactement que possible, entre deux traits placés près de ses extrémités, la longueur du mètre des Archives à la même température. C'est ce mètre à trait qui est aujourd'hui le véritable étalon de longueur; on l'appelle *l'étalon international.*

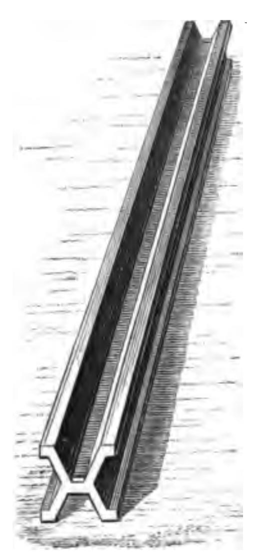


Fig. 1.

Tous les pays qui ont adopté la *Convention du mètre* doivent avoir une copie de l'étalon international. Ces copies sont des mètres à traits en platine iridié (platine 90, iridium 10) en tout semblables à cet étalon. La figure 1 représente la forme qui a été adoptée pour ces règles, d'après les travaux de M. Tresca, parce qu'elle paraît offrir le plus de résistance à la flexion. Les traits limitatifs du mètre sont placés, à un centimètre des extrémités, sur le plan qui contient le centre de gravité de la règle; dans ces conditions, une légère flexion de celle-ci n'a pas d'influence appréciable sur la distance des deux traits limitatifs (1).

(1) Pour tracer les deux traits qui doivent limiter le mètre, on se sert d'un comparateur à peu près semblable à celui décrit (T. Ier L. IV. Chap. IV § 5). Il en diffère principalement, en ce que chacun des deux microscopes porte un burin, capable d'éprouver un petit déplacement perpendiculairement à la règle, pour y tracer un trait. En outre, chaque microscope, entraînant avec

L'opération nécessaire pour vérifier si la distance des deux traits d'une copie à 0° est bien égale à la distance des deux traits de l'étalon à la même température (1) est intimement liée à l'étude des dilatations de ces règles ; aussi la décrirons-nous en traitant de la mesure des dilatations linéaires (Voir *comparateur*, T. Ier L. IV. Chap. IV § 5).

Les règles qui servent dans les mesures ordinaires sont le plus souvent des règles plates en laiton. On marque sur ces règles deux traits à la distance du mètre et, à l'aide du comparateur, on s'assure que l'opération est bien faite ; puis on divise ces règles en millimètres avec la machine à diviser que nous décrivons un peu plus loin.

2. VIS MICROMÉTRIQUE. — L'emploi d'une vis bien faite permet de mesurer avec une grande précision les dimensions linéaires.

lui son burin, peut être déplacé d'une petite quantité parallèlement à la règle à l'aide d'une vis de rappel.

On commence par faire un trait avec le burin sur une barre métallique quelconque ; puis on déplace le réticule du microscrope de façon à amener l'image de ce trait entre les deux fils parallèles du réticule ; si l'on ne touche plus à la position de celui-ci, on est bien sûr que chaque trait tracé par le burin sera pointé par le microscope.

Les deux microscopes étant ainsi réglés, on dispose le mètre étalon à traits sous les microscopes de façon que ses traits puissent être visés par chacun d'eux. A l'aide de la vis de rappel, on fait alors mouvoir chaque microscope, qui entraîne avec lui son burin, jusqu'à ce qu'il pointe le trait correspondant. Par un mécanisme convenable, ou substitue alors la règle copie à l'étalon de façon à la mettre exactement dans la même position ; on fait alors jouer les burins, et l'on trace ainsi deux traits qui, d'après ce que nous avons dit plus haut, se trouvent pointés par chacun des microscopes et qui, par conséquent, comprennent entre eux exactement la même longueur que les traits de la règle étalon.

Cette opération, malheureusement, ne peut pas se faire à 0°, et les deux règles n'ayant pas exactement le même coefficient de dilatation, il est nécessaire d'étudier, avec le comparateur décrit au Livre IV, non seulement la dilatation de cette règle, mais aussi l'excès positif ou négatif entre la distance de ses traits à 0° et la distance des traits de l'étalon international à cette même température.

(1) C'est le Bureau international des poids et mesures, ayant son siège au Pavillon de Breteuil à Sèvres, qui est chargé de ce soin.

Aussi commencerons-nous la description des appareils de mesure par celle de la *vis micrométrique*.

Rappelons d'abord en quoi consiste une vis. Sur la surface d'un cylindre de révolution O (fig. 2), traçons une hélice. Supposons maintenant qu'une petite figure plane ABC (triangle, rectangle, etc), ayant un côté rectiligne AC de longueur au plus égale au pas de l'hélice, soit appliquée par ce côté contre une des génératrices de ce cylindre, que le plan de cette figure passe par l'axe de révolution et que, tout en remplissant continuellement ces deux conditions, cette figure se déplace de façon qu'un de ses points, toujours le même, reste sur l'hélice : la figure engendrera dans son mouvement ce qu'on appelle le *filet* de la vis, celle-ci étant l'ensemble du cylindre et du filet (1).

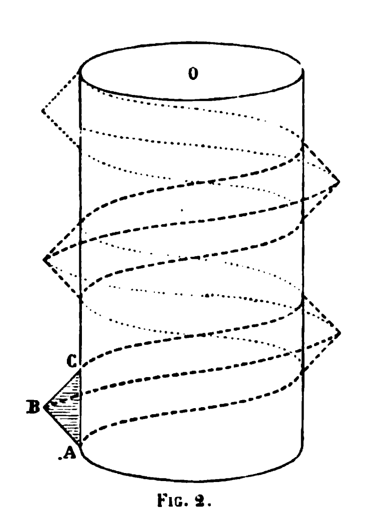


Fig. 2.

L'écrou d'une vis présente une cavité cylindrique, qui a le même diamètre que le cylindre de la vis, et qui est creusée d'une rainure héliçoïdale dans laquelle se loge exactement le filet; en d'autres termes, l'écrou est le moule de la vis.

On appelle *pas de la vis*, le pas de l'hélice décrite par un point quelconque de la figure ABC qui a engendré le filet.

Supposons l'écrou fixe et faisons tourner la vis. Le filet étant guidé dans son mouvement par la rainure héliçoïdale de l'écrou qu'il remplit, un point quelconque de ce filet décrit dans son mouvement une hélice de même pas que la vis. Celle-ci éprouve donc parallèlement à son axe un déplacement proportionnel à

(1) Pour les vis micrométriques, les vis de rappel et la plupart des vis employées dans les instruments de physique, la figure ABC qui engendre le filet est un triangle isocèle (ou à peu près) dont la base AC est égale au pas de l'hélice, de façon que le cylindre est complètement couvert par le filet (fig. 3).

l'angle de rotation; pour un tour complet de la vis sur elle-même, le déplacement suivant l'axe est égal au pas de la vis.

Si la vis ne peut se déplacer parallèlement à son axe et si l'écrou est mobile seulement dans la direction de l'axe, c'est lui qui se déplace proportionnellement à l'angle de rotation.

Une *vis micrométrique* est une vis faite avec soin, dont la tête porte un cercle divisé pour mesurer l'angle dont elle tourne (voir fig. 7 et 9).

Admettons, pour fixer les idées, que le pas de la vis soit d'un demi-millimètre, et que la tête de celle-ci soit pourvue d'un cercle gradué, divisé en 500 parties égales. Si l'on tourne de n divisions la vis, elle s'avancera de n millièmes de millimètre.

On voit ainsi que la vis micrométrique permet d'obtenir des déplacements très petits parfaitement connus; aussi est-elle employée dans un grand nombre d'appareils de mesure.



Fig. 3.

3. Machine à diviser. — La *machine à diviser*, comme son nom l'indique, sert soit à diviser la distance comprise entre deux traits marqués sur une règle en parties égales entre elles, ou proportionnelles à des nombres donnés, soit à tracer sur la règle des divisions de longueurs déterminées. Elle sert, en outre, à mesurer très exactement une longueur, et c'est surtout à ce dernier point de vue qu'elle intéresse le physicien.

Description. — Cet instrument se compose (fig. 4, 5 et 6) d'une vis VV disposée horizontalement et pouvant tourner dans des colliers fixés au bâti de l'appareil. La vis ne pouvant pas se déplacer dans la direction de son axe, c'est son écrou qui est mobile. Celui-ci est solidaire d'un chariot C, qui peut glisser sur deux rails R et R', de façon que ce chariot avance ou recule, suivant le sens de la rotation de la vis, d'une quantité proportionnelle à l'angle de rotation.

Pour obtenir les fractions de tour, la tête de la vis porte un

cercle divisé en parties égales (non visible sur les figures 4, 5 et 6 mais semblable au cercle T de la fig. 9); un trait fixe, vis-à-vis duquel se présentent successivement les traits de

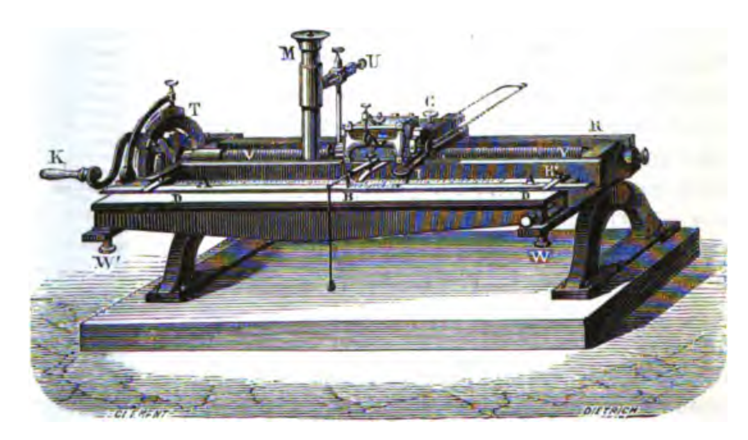


Fig. 4.

la graduation du cercle, sert de repère. Si le pas de la vis est d'un demi-millimètre, et si la tête de celle-ci porte 500 divisions, on peut mesurer ainsi les déplacements du chariot avec une erreur de lecture moindre qu'un millième de millimètre.

Une règle AA graduée en demi-millimètres, si le pas a cette longueur, est disposée parallèlement à la vis; grâce à un index I que porte le chariot, elle fait connaître, par le nombre de demi-millimètres dont se déplace celui-ci pendant une rotation, le nombre entier de tours qu'a fait la vis ([1]).

Le chariot porte un microscope M, pourvu d'un réticule qui sert pour la mesure des longueurs. Une vis de rappel U permet de donner à ce microscope un petit déplacement perpendiculaire à l'axe de la vis micrométrique, ce qui est nécessaire pour viser la partie voulue de l'objet; le microscope peut, du

(1) Dans beaucoup de machines à diviser cette règle graduée n'existe pas; il faut compter alors directement le nombre de tours qu'on fait faire à la vis.

reste, s'élever ou s'abaisser dans la gaine qui le porte, pour la mise au point.

Le chariot est aussi muni d'un burin B mobile dans une direction perpendiculaire à la vis micrométrique, mais qui ne doit pas pouvoir se déplacer parallèlement à l'axe de la vis: ce burin sert à diviser les règles.

Un banc en fer horizontal DD supporte l'objet dont on veut mesurer une dimension ou qu'on veut graduer. Des vis calantes W et W′ permettent de faire varier légèrement son inclinaison, ce qui est nécessaire pour le réglage que nous allons indiquer.

Réglage du parallélisme. — Le microscope vise nettement un point K de son axe optique (1) ; les points qui sont au delà, les points qui sont en deçà du point K, ne sont vus que confusément. Quand on tourne la vis, le chariot entraînant dans son mouvement le microscope, ce point K décrit une ligne AB parallèle à l'axe de la vis. On doit amener la dimension linéaire qu'on veut mesurer à coïncider avec cette ligne AB afin de la rendre parrallèle à l'axe de la vis.

Pour cela, on pose l'objet sur le banc et l'on déplace le microscope jusqu'à ce qu'on vise nettement une des extrémités L de la dimension linéaire à mesurer. On fait avancer alors le chariot, en tournant la vis, jusqu'à ce qu'on vise à peu près l'autre extrémité M. En soulevant ou en abaissant un peu, à l'aide de la vis calante W ou W′, la partie du banc voisine de M, on arrive à voir nettement cette extrémité, et, en déplaçant un peu celle-ci dans le sens perpendiculaire à la vis micrométrique, on l'amène dans une position telle qu'elle puisse être visée par le microscope. Quand on s'est assuré que les deux extrémités L et M peuvent être visées par le microscope, la ligne LM se confond avec la ligne AB et, par conséquent, est parallèle à l'axe de la vis.

Ce réglage étant effectué, si l'on vise successivement deux

(1) L'axe optique est la ligne qui joint le centre optique de l'objectif au point de croisé des fils du réticule (voir l'Optique). Dans le cas d'un pareil réticule, par *viser* un point ou *faire le pointé* nous entendons amener le microscope ou la lunette dans une position telle que le point soit vu en coïncidence avec la croisée des fils du réticule, et soit vu nettement.

points de la dimension linéaire, la droite qui joint ces deux points a pour longueur le déplacement du point K ; or, le déplacement de ce point est le même que le déplacement d'un point quelconque du chariot et est donné par les lectures.

Vérification de la vis. — Si bien travaillée que soit une vis micrométrique, elle n'est pas parfaite. Il est bon de s'assurer de quelle importance est l'erreur que l'on commet en admettant que tous les pas de la vis sont égaux entre eux et, au besoin, de corriger les mesures de cette erreur.

Pour faire l'étude de la vis, on peut opérer de la manière suivante. Sur une plaque de verre ou de métal on trace deux traits à une distance égale à un petit nombre de fois la longueur du pas de la vis. On dispose la plaque sur le banc de manière que les traits soient perpendiculaires à l'axe de rotation, et l'on vise avec le microscope l'un de ces traits. Après avoir fait la lecture de la division du cercle gradué qui est devant le repère, on tourne la vis de façon à viser l'autre trait: une nouvelle lecture donne l'angle de rotation nécessaire pour faire dans cette partie de la vis avancer le chariot de la distance des deux traits visés. On déplace ensuite la plaque parallèlement à elle-même de manière à amener sous le microscope le premier trait visé, et l'on recommence la même opération, ce qui donne encore l'angle de rotation nécessaire pour faire, dans cette nouvelle partie de la vis avancer le chariot de la distance des deux traits, et ainsi de suite.

On voit, par là, si tous ces angles de rotation sont suffisamment égaux entre eux, dans toutes les parties de la vis. S'il n'en est pas ainsi, on a, par l'ensemble des mesures que l'on vient de faire, une table de correction : on sait, en effet, quel est l'angle dont il faut faire tourner la vis pour que le chariot avance d'une même quantité *a* (distance des deux traits) dans telle position de celui-ci, donnée par la règle graduée AA.

Valeur du pas de la vis. — Pour obtenir la valeur exacte du pas de la vis ou, dans le cas d'irrégularités trop importantes de ce pas, pour avoir la valeur *a*, qui entre dans la table de correction, on opère de la manière suivante.

On dispose parallèlement à l'axe de la vis une dimension linéaire connue, par exemple une copie exacte du mètre étalon qui, à la température t où l'on opère, vaut en mètre théorique $1+\lambda t$, en appelant λ le coefficient de dilatation du métal qui compose cette copie du mètre. On vise avec le microscope l'une des extrémités; après avoir fait sur la règle graduée AA et sur la tête de la vis les lectures nécessaires, on fait tourner celle-ci jusqu'à amener le microscope dans la position convenable pour viser l'autre extrémité du mètre, et l'on fait de nouveau les lectures. On a ainsi le nombre entier ou fractionnaire n de tours nécessaires pour déplacer le chariot de la longueur $1+\lambda t$ (1). Si tous les pas de la vis sont égaux, la valeur de chacun d'eux est $\frac{1+\lambda t}{n}$. Si la vis est irrégulière, on connaît par la table de correction le nombre entier ou fractionnaire m par lequel il faut multiplier a pour avoir $1+\lambda t$; on a donc $a=\frac{1+\lambda t}{m}$ et, connaissant a, on peut transformer la table de correction de façon à savoir la longueur de chacun des pas de la vis.

Faisons remarquer enfin que les valeurs trouvées ainsi pour chacun des pas de la vis sont celles qui conviennent à la température t de l'expérience. Pour avoir celles qui conviennent à la température 0°, on doit diviser les valeurs précédentes par le binôme $1+kt$, en désignant par k le coefficient de dilatation linéaire de l'acier qui constitue la vis. Ce sont les valeurs à 0° qu'on conserve dans la table.

(1) Pour fixer les idées, supposons que le cercle porté par la tête de la vis soit divisé en 500 parties égales et que, dans la première position du chariot, son index I soit placé entre le trait 35 et le trait 36 de la règle, tandis que la division 367 du cercle gradué se trouve devant le trait de repère. Il a fallu alors tourner la vis de 35 tours, plus $\frac{367}{500}$ de tours, ou 35,734 tours pour amener le chariot de la position où son index est devant le zéro de la règle, le zéro du cercle gradué étant aussi devant le trait de repère, à la position actuelle. Si, dans la seconde position du chariot, son index est entre les traits de la règle 2036 et 2037, tandis que la division du cercle gradué 126 se trouve devant le trait de repère, le nombre n de tours que la vis a effectués pour faire passer le chariot de sa première position à la seconde est $2036{,}252 - 35{,}734 = 2000{,}518$.

MESURE D'UNE LONGUEUR. — On comprend aisément maintenant comment on obtient la mesure d'une dimension linéaire. Après avoir rendu celle-ci parallèle à la vis, on vise avec le microscope l'une de ses extrémités, et l'on fait les deux lectures nécessaires pour avoir la position du chariot. On tourne ensuite la vis jusqu'à ce que le microscope vise l'autre extrémité de la dimension linéaire, et l'on fait de nouveau les lectures. On a ainsi le nombre n de tours de la vis nécessaire pour passer d'une position à l'autre.

Si la vis est régulière, et que l soit à 0° la longueur du pas, à la température t de l'opération, ce pas a pour valeur $l(1+kt)$ et la longueur cherchée est égale à $nl(1+kt)$.

Si la vis est irrégulière, on fait la somme des longueurs connues des pas de la vis compris entre la première et la deuxième position du chariot, en tenant compte des fractions de tours, et l'on multiplie la longueur obtenue par le binôme $(1+kt)$, si la table donne les valeurs du pas à 0°.

DIVISION D'UNE RÈGLE. — Comme nous savons maintenant quel est le nombre de tours entier ou fractionnaire nécessaire pour faire avancer le chariot d'une quantité déterminée, d'un millimètre par exemple, nous pouvons tracer sur une règle des divisions de longueurs données. Il suffit pour cela de graver un trait sur la règle avec le burin que porte le chariot toutes les fois qu'on a fait avancer celui-ci de la quantité voulue.

Faisons remarquer seulement que les divisions d'une règle graduée doivent avoir leur valeur nominale à la température de 0° ; ainsi, quand on veut graduer une règle en millimètres, il faut que les divisions valent un millimètre à 0°. Si donc la règle est à la température t il faut tracer des traits distants de la longueur voulue multipliée par $1+mt$, en désignant par m le coefficient de dilatation linéaire de la substance qui forme la règle : ces divisions auront leur valeur nominale à 0°. On doit, bien entendu, tenir compte aussi de la température, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, pour savoir les quantités exactes dont s'avance le chariot à chaque tour de la vis.

Quand on sait mesurer une longueur et tracer sur la règle des divisions de longueurs déterminées, on sait par là même diviser

une dimension linéaire soit en parties égales, soit en parties proportionnelles à des nombres donnés [1].

(1). L'opération la plus fréquente est de faire une division en parties d'égales longueurs. Or, il serait extrêmement pénible d'avoir à calculer chaque fois la division du cercle gradué qu'on doit amener devant le trait de repère avant de tracer un trait. Quelqu'attention qu'on apporte, si l'on a cinq cents ou mille divisions à faire, on risque bien de se tromper, ce qui perdrait tout le travail.

Une disposition mécaniqne ingénieuse permet de supprimer tout calcul. Nous admettrons que la vis a été reconnue suffisamment régulière pour que l'opération se réduise à la faire tourner du même nombre entier ou fractionnaire de tours entre chaque trait. La manivelle K qui sert à mettre en mouvement la vis n'est pas solidaire de celle-ci; elle entraîne seulement un tambour T (fig. 5) pouvant tourner autour d'un axe situé dans le prolongement de celui de la vis, mais sans mettre nécessairement celle-ci en mouvement. La tête de la vis se termine par une roue à rochet N, dont les dents sont très rapprochées et inclinées comme l'indique la figure; un cliquet P qui est porté par la partie intérieure du tambour et qui est mobile autour de l'axe O appuie par son poids ou par l'action d'un petit ressort sur les dents de cette roue. Il résulte de cette disposition, qu'en faisant tourner le tambour en sens inverse de la flèche de la figure, le cliquet glisse sur les dents de la roue sans mettre en mouvement celle-ci, à cause du frottement qu'il faut vaincre pour faire tourner la vis. Au contraire, si l'on tourne la manivelle dans le sens de la flèche, le cliquet pénètre entre deux dents, et le tambour ne peut tourner sans mettre en mouvement la roue dentée et, par conséquent, la vis. Ainsi, en tournant la manivelle dans le sens de la flèche, on fait avancer le chariot d'une longueur proportionnelle à l'angle de rotation, et on ne le fait pas rétrograder en tournant la manivelle en sens inverse.

La disposition est complétée par deux arrêts qui limitent la rotation dans un sens et dans l'autre. Supposons qu'on vienne de graver un trait; on tourne alors dans le sens inverse de la flèche jusqu'à ce qu'on bute contre un de ces arrêts, ce qui ne fait pas bouger le chariot; le mouvement ne pouvant continuer dans ce sens, on tourne alors dans le sens de la flèche jusqu'à ce qu'on bute contre le second arrêt, ce qui fait avancer le chariot d'une certaine quantité. Après avoir tracé un second trait on tourne en sens inverse jusqu'à venir rencontrer de nouveau le premier arrêt : le chariot reste en place. Puis on tourne de nouveau dans le sens de la flèche jusqu'à rencontrer le second arrêt : le chariot s'avance de la même quantité que la première fois, puisque l'angle de rotation est le même; on trace un troisième trait, et ainsi de suite : tous les traits tracés ainsi sont équidistants.

Pour réaliser ces arrêts, le tambour est creusé sur son pourtour d'une rainure héliçoïdale dans laquelle s'engage une sorte de couteau EF porté

par une lame un peu flexible X fixée par son autre extrémité au bâti de l'appareil. Grâce à cette flexibilité, le couteau reste toujours dans la rainure et se déplace parallèlement à l'axe de rotation du tambour de la valeur du pas de l'hélice, à chaque tour complet. Une saillie G se trouve à l'endroit où finit la rainure héliçoïdale; ce qui fait qu'en tournant dans le sens de la flèche,

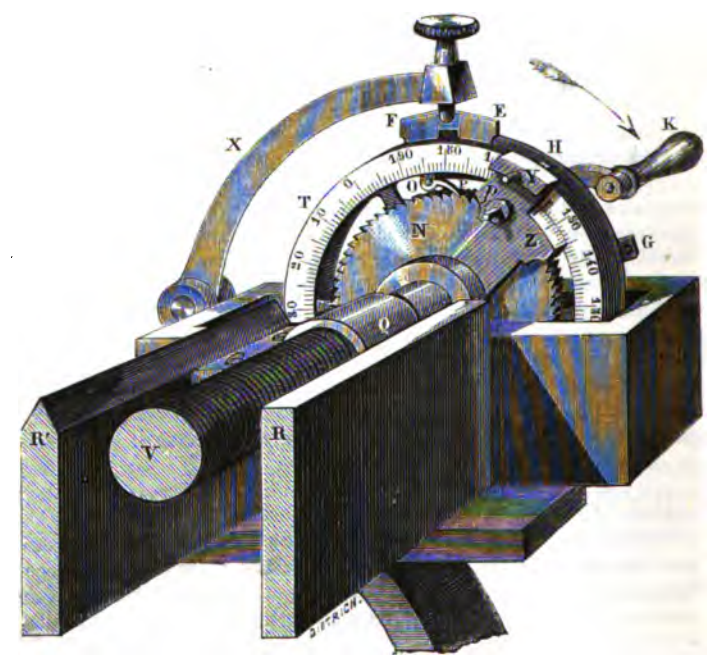


FIG. 5.

cette saillie vient buter contre l'extrémité F du couteau fixe, et l'on ne peut continuer la rotation dans ce sens. Le second butoir est constitué par une tige H fixée au tambour et qui couvre un certain nombre de spires de la rainure héliçoïdale. En partant du butoir G, et en tournant en sens inverse de la flèche, la tige H, après un certain nombre de tours entier ou fractionnaire, finit par rencontrer l'extrémité E du couteau, et on ne peut continuer la rotation dans ce sens.

Cette tige H peut être fixée dans le trou cylindrique qui la porte de façon à couvrir un nombre de spires déterminé pour arrêter la rotation après le nombre de tours nécessaire. Du reste, la pièce Y qui porte la tige fait partie d'une alidade pouvant tourner autour du tambour pour se fixer par la vis de pression *p* au point voulu de la circonférence. Un vernier Z, ou

un simple trait de repère, permet de mesurer l'angle dont on déplace cette pièce, la position de celle-ci devant être réglée d'après l'angle dont on veut faire tourner la vis pour passer d'un trait au suivant.

Dans le cas où une extrême précision est nécessaire et où la vis micrométrique n'est pas suffisamment régulière, on emploie encore le même procédé;

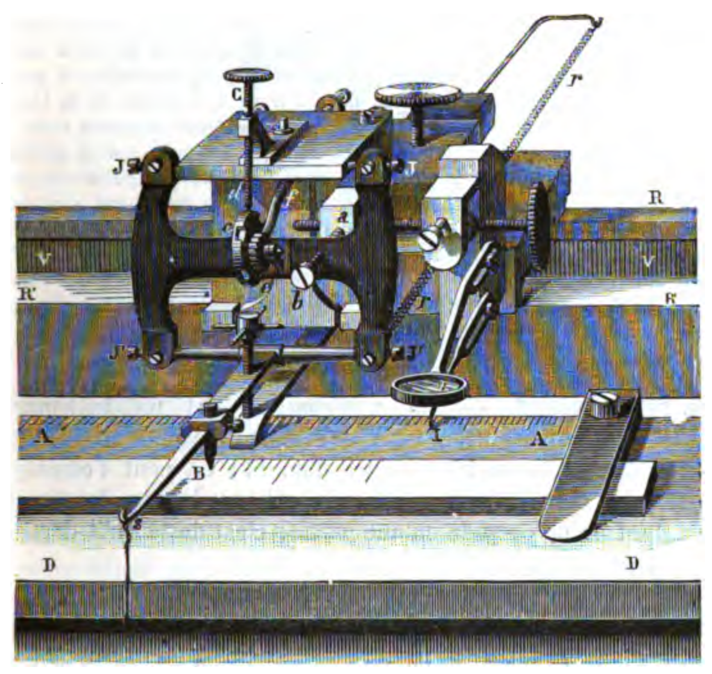


Fig. 6.

mais, par un mécanisme spécial, la vis éprouve parallèlement à son axe un très petit déplacement qui corrige chaque fois l'erreur due à l'irrégularité des pas.

En général, afin de rendre la lecture d'une règle graduée plus facile, les traits correspondant aux dizaines ont une longueur plus grande que les autres, et les traits correspondant aux nombres qui se terminent par un 5 ont une longueur intermédiaire entre ceux des dizaines et les autres traits; enfin ces derniers sont tous égaux entre eux.

La disposition suivante permet d'obtenir mécaniquement les traits de la longueur voulue. Le burin B entraîne dans son mouvement le cadre JJJ'J' (fig. 6) qui peut tourner autour de l'axe JJ. La course du burin est limitée d'un côté par un arrêt fixe *a* contre lequel vient buter l'extrémité de la vis *b*

que porte le cadre, de l'autre par le choc du pourtour du cylindre *c*, porté aussi par le cadre, contre l'extrémité d'une vis fixe *d*. Ce cylindre *c* est solidaire d'une roue à rochet *e* portant vingt dents; chaque fois qu'on a tracé un trait, le mouvement, grâce au cliquet fixe *f*, fait avancer d'une dent la roue à rochet et, par conséquent, fait tourner le cylindre d'un vingtième de tour; de cette façon le cylindre rencontre la vis *d*, au mouvement suivant du burin, par un autre point de son pourtour. Or, celui-ci est creusé de deux trous profonds à l'extrémité d'un même diamètre et de deux autres trous moins profonds aux extrémités du diamètre perpendiculaire au précédent. Quand le cylindre présente un de ces trous à la pointe de la vis, la course du burin est plus longue ; les trous profonds revenant tous les dix traits, ceux-ci sont les plus longs, tandis que les trous moins profonds revenant pour les traits intermédiaires, ceux-ci ont une longueur comprise entre celle des traits des dizaines et celle des autres traits qui sont tous égaux entre eux.

Un ressort *rr* ramène le cadre JJJ'J' contre l'arrêt *a*, chaque fois qu'on abandonne la tige *s*, qui sert à tirer le burin. Cette tige *s* peut tourner autour de l'axe J'J', ce qui permet de soulever le burin pendant le déplacement du chariot.

4. SPHÉROMÈTRE. — Le *sphéromètre* est un instrument qui permet de mesurer avec une grande exactitude l'épaisseur d'une lame ou le diamètre d'un fil ; on peut l'employer aussi pour obtenir le rayon d'une sphère de grande dimension dont on ne possède qu'une partie; c'est de là qu'il tire son nom (1).

Il se compose d'un trépied (fig. 7) portant l'écrou d'une vis micrométrique. La vis, qui est en acier, est terminée en bas par une pointe mousse ; en haut, sa tête porte un disque gradué en 500 parties égales. Comme le pas de la vis est d'un demi-millimètre, on voit qu'en tournant la vis d'une division du disque, la pointe se déplace d'un millième de millimètre. Une règle verticale, en forme de couteau, est fixée sur le trépied et sert d'index; elle permet de noter, par le nombre de divisions du disque qui passe devant elle, l'angle dont on a tourné la vis. Du reste, cette règle est graduée en demi-millimètres, le zéro étant en haut; le disque, se déplaçant d'une division de la règle

(1) La première idée du sphéromètre est due à l'opticien Laroue qui l'employait pour mesurer la courbure des lentilles.

à chaque tour complet, celle-ci permet de noter aussi les nombres entiers de tours.

Pour pouvoir se servir de l'instrument, il faut posséder, en

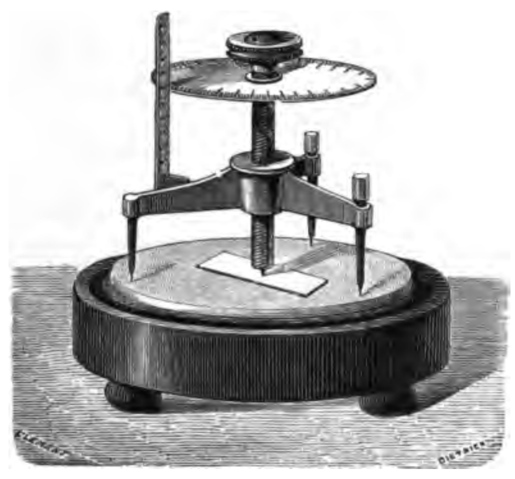


Fig. 7.

outre, un plan parfait. Celui-ci est formé par une plaque épaisse de verre dépoli, aplanie sur l'une de ses faces avec le plus grand soin.

Proposons-nous de mesurer l'épaisseur d'une lame. On place sur le plan les trois pointes du trépied, et l'on dispose la lame sous la pointe de la vis. On abaisse alors cette vis, en la tournant dans le sens convenable, jusqu'à ce que sa pointe soit au contact de la lame, sans qu'aucune des pointes du trépied ne cesse de toucher le plan. On arrive avec précision à ce résultat, grâce au fait suivant. Tant que la pointe ne touche pas la lame, en tournant le bouton moleté qui termine la vis, on fait avancer celle-ci dans son écrou sans faire glisser les pointes du trépied sur le plan de verre. Mais, dès que la pointe de la vis, en appuyant sur la lame, soulève tant soit peu les pointes du trépied, il n'en est plus ainsi : en essayant de tourner le bouton moleté, on fait tourner tout l'instrument autour de la pointe de la vis qui forme pivot.

Quand on est arrivé à ce résultat, on fait la lecture de la règle et du disque. Supposons, par exemple, que le disque se trouve sur la règle un peu au-dessous du trait 7 et que 453 soit le numéro de la division du disque qui se trouve devant la règle : alors la vis à avancé de $3^{mm}, 500 + 0^{mm}, 453 = 3^{mm}, 953$ depuis la position pour laquelle le disque est devant le zéro de la règle, et le zéro du disque devant celle-ci ; pour abréger, appelons cette position *la position de départ.*

On enlève ensuite la lame, et l'on tourne la vis jusqu'à ce qu'elle touche le plan de verre sans soulever les pointes du trépied, ce dont on s'assure comme précédemment. On fait de nouveau les deux lectures de la règle et du disque. Supposons qu'on trouve 10 pour la division de la règle et 127 pour celle du disque, la vis s'est avancée, depuis la position de départ, de $5^{mm}, 127$. L'épaisseur de la lame, étant égale au déplacement de la vis dans la seconde opération, a pour valeur :

$$5^{mm}, 127 - 3^{mm}, 953 = 1^{mm}, 174$$

Si l'on veut mesurer le diamètre d'un fil, on se procure une lame de verre ayant partout la même épaisseur, ce dont on s'assure à l'aide du sphéromètre. On place alors le fil sur le plan de verre dépoli en le courbant, mais en ayant soin de ne pas croiser une extrémité sur l'autre, et on le recouvre avec la lame. On mesure alors, comme ci-dessus, la distance entre la face supérieure de la lame et le plan de verre dépoli ; en en retranchant l'épaisseur de la lame, on obtient le diamètre du fil.

Pour mesurer avec cet instrument le rayon d'une sphère solide, on place les trois pointes du trépied sur la surface de de celle-ci ; on abaisse la vis jusqu'à ce qu'elle touche aussi la sphère sans soulever les pointes du trépied, et l'on fait les deux lectures.

Remarquons que la distance entre la pointe de la vis et le plan passant par les trois pointes du trépied est précisément la valeur de la flèche AH de la calotte que ce plan détache de la sphère (fig. 8), si les trois pointes sont bien à la même distance de l'axe de la vis.

On transporte ensuite le sphéromètre sur le plan de verre;

on abaisse la vis jusqu'à ce que sa pointe touche le plan sans soulever les pointes du trépied, et l'on fait les lectures. La quantité dont s'est avancée la pointe de la vis étant égale à la flèche AH, la différence des lectures obtenues avant et après cette seconde opération donne la valeur de cette flèche.

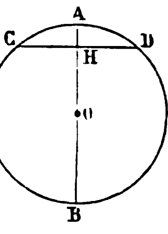


Fig. 8.

D'un autre côté, on obtient aisément le rayon HC du cercle de base de la calotte considérée ; c'est le rayon du cercle qui passe par les trois pointes du trépied. Les distances des pointes étant mesurées avec une règle graduée, on a tous les éléments nécessaires pour obtenir la valeur du rayon de ce cercle. Du reste, les trois pointes doivent être équidistantes et former ainsi les trois sommets d'un triangle équilatéral. Alors, en appelant a la distance de deux pointes, le rayon du cercle circonscrit est, comme on le sait, égale à $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Les mesures de la flèche AH et du rayon CH fournissent la valeur du diamètre AOB de la sphère. On a, en effet (fig. 8), la relation :

$$AH \times HB = \overline{CH}^2 \quad \text{ou} \quad AH \times (AB - AH) = \overline{CH}^2$$

d'où l'on tire :

$$AB = AH + \frac{\overline{CH}^2}{AH}$$

5. Micromètres oculaires. — Dans beaucoup d'appareils on se sert, pour mesurer une très petite longueur de microscopes pourvus de *micromètres oculaires* mobiles (1).

(1) L'emploi des micromètres oculaires remonte à Roy et à Ramsden qui, vers 1783, se sont servis de microscopes à réticules mobiles dans leur appareil pour mesurer la dilatation des règles (voir T. Ier L. IV Chap. IV § 4).

Ces microscopes possèdent un oculaire positif de Ramsden (voir l'Optique) et, dans le plan vu nettement à travers cet oculaire, se trouve un réticule formé par un fil très fin et bien tendu. Ce fil peut se déplacer parallèlement à lui-même à l'aide d'une vis micrométrique, dont la tête porte un tambour T (fig. 9) di-

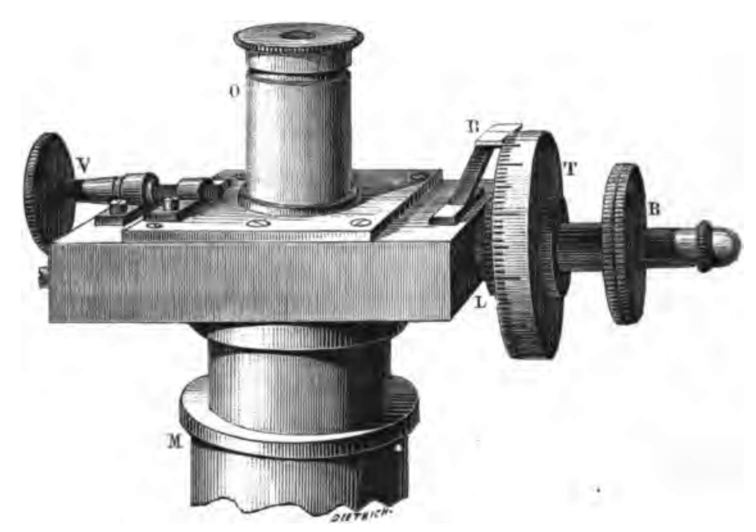


Fig. 9.

visé en parties égales pour indiquer le nombre de fractions de tours (1). Les nombres entiers de tours sont donnés par la disposition suivante : dans un plan très voisin du plan de mobilité du

(1) La meilleure disposition consiste à faire de la pièce BT, comprenant le tambour T et le bouton B qui sert à le mettre en mouvement, l'écrou de la vis micrométrique. C'est la vis alors qui est mobile suivant son axe et qui porte le réticule. Un ressort, qui tend à écarter ce réticule de la partie fixe L de l'instrument, fait appliquer constamment l'écrou BT contre cette pièce fixe L; de cette façon il n'y a pas de *temps perdu* dans le jeu de la vis micrométrique.

La vis V sert à déplacer l'oculaire O parallèlement au fil du réticule, pour que l'oculaire ne cesse pas de voir nettement le fil, ce qui arrive quand, en laissant fixe l'oculaire O, le fil du réticule s'approche des bords du champ.

réticule, se trouve un écran dont le bord denté en scie (fig. 10) est vu à travers l'oculaire et se détache en noir sur le fond brillant du champ. Le bord de cet écran est perpendiculaire au fil du réticule, et une dent est distante de la suivante de la longueur du pas de la vis micrométrique; il en résulte que le fil s'avance d'une dent à chaque tour complet de la vis, ce qui fait connaître le nombre des tours entre deux positions successives du fil.

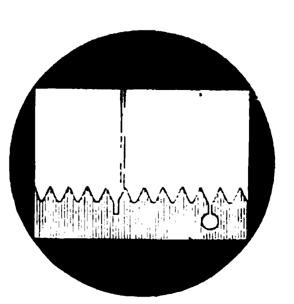


Fig. 10.

Pour mesurer avec cet instrument la distance de deux lignes parallèles très voisines, on place ces lignes devant le microscope, de façon à les voir nettement dans le champ; leur image réelle fournie par l'objectif se forme alors dans le plan du réticule. En déplaçant le fil à l'aide de la vis micrométrique et, au besoin, en faisant tourner le corps du microscope autour de son axe pour amener les lignes visées à être parallèles au fil, on obtient la coïncidence du fil avec l'image d'une des lignes [1]. On fait la lecture du tambour et l'on note les deux dents de l'écran entre lesquelles le fil est placé; puis on fait tourner la vis micrométrique jusqu'à amener le fil en coïncidence avec la seconde ligne; les lectures donnent le nombre entier et fractionnaire de tours qui a été fait pour passer d'un pointé à l'autre. Ce nombre de tours fait connaître la distance des deux lignes, si, une fois pour toutes, on a fait la *tare* de l'instrument, c'est-à-dire si l'on connaît quelle est la distance de deux traits qui nécessitent juste un tour de la vis pour être vus successivement en coïncidence avec le fil du réticule.

On obtient cette tare en visant avec le microscope deux traits

(1) Quand on a à viser des traits, il est plus précis de se servir d'un réticule formé par deux fils parallèles placés à une très petite distance, invariable du reste, comme le représente la figure 10; c'est l'ensemble de ces deux fils qui se déplace sous l'action de la vis micrométrique. Le pointé se fait alors en amenant les deux fils du réticule à comprendre entre eux l'image du trait.

à une distance connue a, par exemple deux traits distants d'un millimètre. Si n est le nombre entier ou fractionnaire de tours de la vis micrométrique nécessaire pour pointer successivement ces deux traits, $\frac{a}{n}$ est la valeur de la tare. De cette façon, si dans une mesure il a fallu faire tourner de N tours la vis pour pointer successivement les deux lignes, $N\frac{a}{n}$ est la distance de celles-ci.

Le microscope grossissant beaucoup la longueur à mesurer, cette disposition permet d'atteindre une grande précision dans les mesures.

6. EMPLOI COMBINÉ D'UNE RÈGLE GRADUÉE ET DE MICROSCOPES A MICROMÈTRES. — Le procédé le plus précis que l'on connaisse aujourd'hui pour mesurer une longueur un peu considérable consiste dans l'emploi d'une règle graduée en millimètres et de deux microscopes pourvus d'un micromètre oculaire mobile.

Les microscopes A et A' (fig. 11) sont portés, le plus souvent, par une même barre de fer très solide BB, le long de laquelle ils peuvent se déplacer et se fixer à l'endroit voulu à l'aide de vis de pression PP'.

On règle la position de cette barre de façon que les axes des microscopes soient perpendicaires à la direction de la dimension linéaire à mesurer; la barre est alors à peu près parallèle à cette direction. Ce réglage, qui n'a pas besoin d'être fait avec une extrême précision, s'effectue par des moyens sur lesquels il est inutile d'insister et qui varient du reste suivant les cas.

Pour faire une mesure, on fait glisser chacun des microscopes vers une des extrémités de la longueur à mesurer, mise à bonne distance pour être vue très nettement par les microscopes; on fixe ceux-ci dans une position telle qu'ils pointent à peu près l'extrémité correspondante et, en agissant sur les vis V et V' des micromètres oculaires, on fait un pointé exact.

On substitue alors à la dimension linéaire une règle graduée en millimètres qu'on dispose de telle façon qu'une ligne perpendiculaire aux traits qu'elle porte coïncide exactement avec

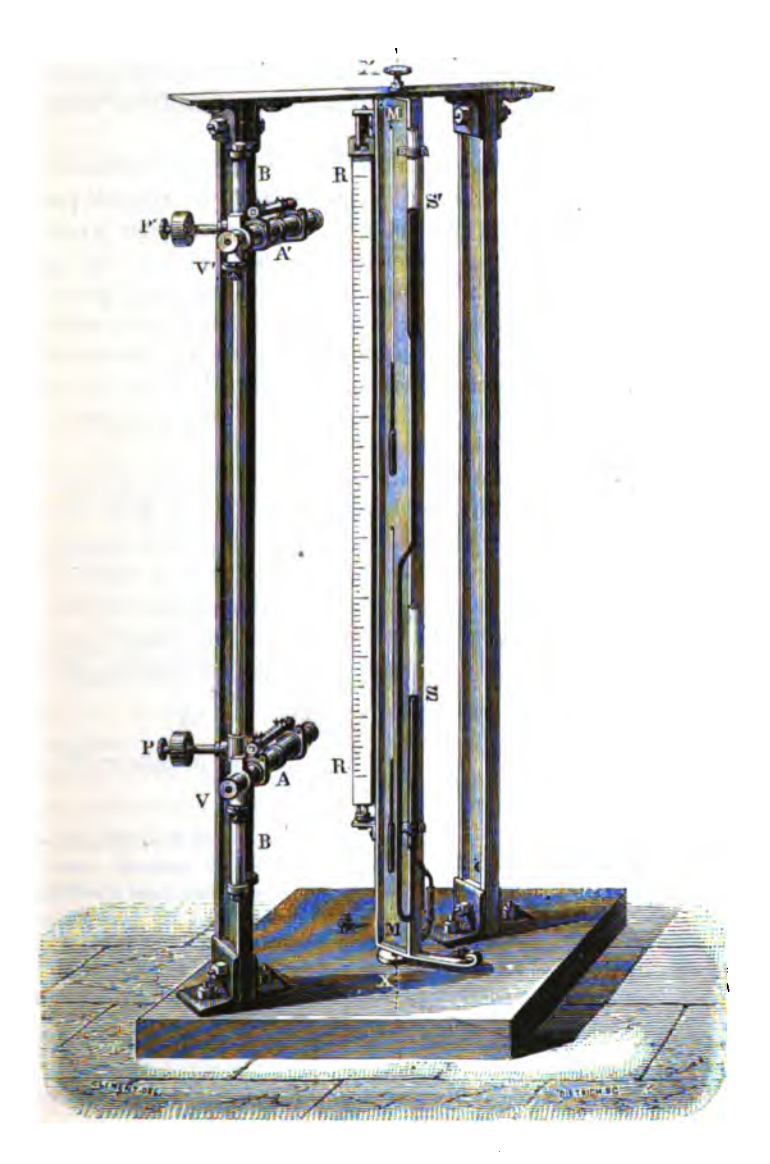


Fig. 11.

la position qu'avait auparavant la dimension linéaire à mesurer (1). On est assuré, du reste, que la règle se trouve exactement à la même distance des microscopes que la dimension linéaire quand elle est vue nettement à travers ceux-ci.

Dans le champ de chaque microscope on aperçoit alors deux divisions de cette règle entre les quelles le fil du réticule parait placé. Après avoir fait les lectures nécessaires pour avoir la position des fils, on agit sur les vis micrométriques, pour déplacer chacun d'eux de façon à le faire coïncider avec l'image de celle des deux divisions qui est la plus près de l'autre microscope (2). On obtient ainsi les petites longueurs qu'il faut ajouter à la distance connue comprise entre les deux traits de la règle visés dans la dernière position donnée aux fils, pour avoir la longueur de la dimension linéaire.

On peut, du reste, tout aussi bien déplacer les fils du réticule de façon à pointer celui des deux traits qui est le plus éloigné de l'autre microscope. On obtient ainsi les petites longueurs qu'il faut retrancher de la distance connue des deux traits de la règle visés pour obtenir la longueur de la dimension linéaire.

En employant ces deux procédés à la fois, on obtient les données nécessaires pour avoir la tare de chaque micromètre, ou l'on a un contrôle.

7. VERNIER.— Le *vernier*, du nom de son inventeur (3), fut

(1) Cette substitution se fait par des procédés qui varient suivant les cas. Ainsi, quand la distance à mesurer est la hauteur du mercure dans un baromètre normal à siphon SS' dont les deux branches sont dans le prolongement l'une de l'autre (fig. 11), ou dans un manomètre à air libre affectant une disposition semblable, on peut fixer cet appareil, ainsi que la règle graduée RR, à un manchon MM mobile autour d'un axe vertical XX. Une simple rotation autour de l'axe suffit alors pour remplacer devant les microscopes l'appareil manométrique par la règle graduée verticale.

Nous verrons à propos du comparateur décrit plus loin (T. Ier L. IV. Chap. IV § 5) un autre moyen de substituer la règle à la longueur à mesurer

(2) Pour ne pas se tromper il faut se rappeler que le microscope renverse la position des objets.

(3) Pierre Vernier, né en 1580 à Ornans (Franche Comté), est mort en 1637. Quoiqu'on ait donné le nom de ce géomètre à l'instrument imaginé par lui pour la mesure des petits angles, l'invention du vernier paraît plus an-

imaginé d'abord pour mesurer les petits angles; son emploi s'est ensuite étendu à la mesure des dimensions linéaires. C'est sous la forme employée pour ce dernier usage que nous le décrirons d'abord.

Cet instrument se compose d'une règle (fig. 12) graduée en

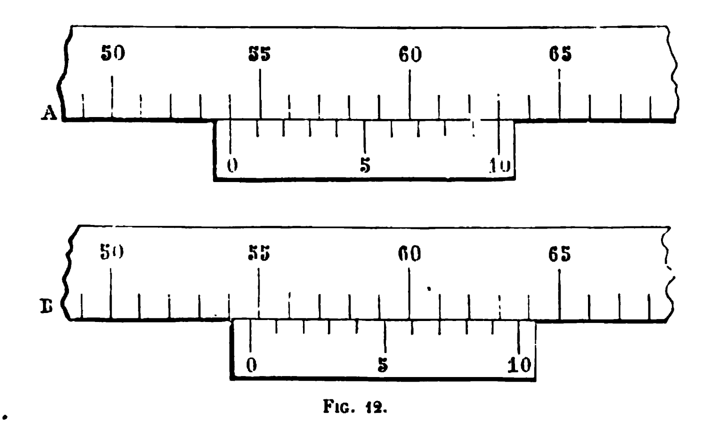


Fig. 12.

parties de longueurs égales que, pour abréger, nous prendrons comme unités, et du *vernier* proprement dit qui consiste en une réglette mobile graduée de la manière suivante. La distance comprise entre les traits extrêmes du vernier est égale à un nombre entier d'unités, que nous représenterons par $N-1$, et cet intervalle est divisé en N parties d'égale longueur. De cette façon, la distance entre deux traits consécutifs du vernier est égale à $\frac{N-1}{N}$; elle est donc inférieure de la longueur $\frac{1}{N}$ à la distance de deux traits consécutifs de la règle.

Le premier trait du vernier, du côté du zéro de la règle est appelé le *zéro* du vernier; les traits suivants portent les numéros 1,2,3,..., N.

Si le zéro du vernier coïncide avec un trait de la règle (A fig. 12) le dernier trait coïncide aussi avec un trait de la règle; mais,

cienne et est attribuée au mathématicien portugais Pedro Nunnez, professeur de géométrie à l'Université de Coïmbre (né en 1492, mort en 1577).

dans toute autre position, il est impossible qu'il y ait plus d'un trait du vernier en coïncidence avec un trait de la règle. Désignons, en effet, par m et m' les numéros de deux traits du vernier; la distance de ces deux traits est $\frac{(m'-m)(N-1)}{N}$, puisque $\frac{N-1}{N}$ est la distance de deux traits consécutifs du vernier. Il faudrait que la distance des traits m et m' fût un nombre entier d'unités pour que ces traits coïncidassent à la fois avec un trait de la règle; or, le nombre N étant premier avec le nombre $N-1$, il faudrait pour cela qu'il divisât exactement $m'-m$, ce qui est impossible si m' diffère de N et m de zéro puisque $m'-m$ est alors plus petit que N.

Ce point étant établi, supposons que le zéro du vernier coïncide exactement avec un trait de la règle (A fig. 12); alors le trait 1 du vernier est en arrière du trait suivant de la règle de la longueur $\frac{1}{N}$; le trait 2 est en arrière du trait suivant de la règle d'une longueur $\frac{2}{N}$; et, d'une façon générale, le trait m est en arrière du trait suivant de la règle de la longueur $\frac{m}{N}$, au plus égale à l'unité puisque m est au plus égal à N.

Déplaçons maintenant le vernier de façon à faire coïncider le trait m avec le trait suivant de la règle (B fig. 12); d'après ce que nous venons de dire, il faut pour cela l'avancer de la longueur $\frac{m}{N}$, et alors, après le déplacement, le zéro du vernier se trouve en avant du trait précédent de la règle de cette longueur $\frac{m}{N}$.

Par conséquent, si un trait quelconque m du vernier coïncide exactement avec un trait de la règle, comme il est le seul trait du vernier en coïncidence, la distance qui sépare le zéro de la règle du zéro du vernier est égale au nombre d'unités représenté par le numéro du trait de la règle qui précède le zéro du vernier augmenté de la fraction $\frac{m}{N}$.

Un vernier formé en divisant en N parties égales (N — 1) divisions de la règle est dit un vernier au N^{me}. Ainsi, en supposant la règle graduée en millimètres, ce qui est le cas le plus fréquent, pour avoir un vernier au cinquantième il faut prendre 49 millimètres et les diviser en 50 parties égales. Si, avec un pareil vernier, 246 est le numéro du trait de la règle qui précède immédiatement le zéro du vernier et si 37 est le numéro du trait du vernier en coïncidence avec un trait de la règle, la distance entre le zéro de celle-ci et le zéro du vernier est $246 + \frac{37}{50} = 246,74$ millimètres.

Il peut se faire qu'aucun trait du vernier ne coïncide exactement avec un trait de la règle; dans ce cas on trouve toujours deux traits consécutifs de la règle qui comprennent entre eux deux traits consécutifs du vernier, puisqu'une division du vernier est plus petite qu'une division de la règle. Désignons par x et y les distances de chacun de ces traits au trait de la règle le plus voisin; $x + y$ représentant la différence entre la longueur d'une division de la règle et la longueur d'une division du vernier, est égal à $\frac{1}{N}$. Si x est la plus petite de ces deux distances, on a $x < \frac{1}{2N}$; on voit, par là, qu'en admettant la coïncidence du trait du vernier le plus voisin d'un des traits de la règle, on ne commet qu'une erreur au plus égale à $\frac{1}{2N}$.

Ainsi, en se servant d'un vernier au cinquantième, l'erreur maximum possible dans la lecture est un centième de millimètre. Avec un peu d'habitude on ne commet même pas une erreur aussi grande, car si ce sont les traits 37 et 38 qui sont compris entre deux traits consécutifs de la règle, et s'ils en sont à peu près à la même distance, au lieu d'ajouter $\frac{37}{50}$ ou $\frac{38}{50}$ au nombre entier d'unités on ajoute $\frac{37}{50} + \frac{1}{100} = 0,75$, ce qui est plus voisin du nombre exact.

Ces détails connus, on comprend aisément le moyen de se servir du vernier pour mesurer une longueur.

On place la dimension linéaire à mesurer parallèlement à la règle; on fait coïncider l'une de ses extrémités avec le zéro de la règle et l'on fait glisser le vernier jusqu'à ce que son zéro coïncide avec l'autre extrémité; la distance entre les deux zéros étant égale à la dimension linéaire, il suffit, pour en connaître

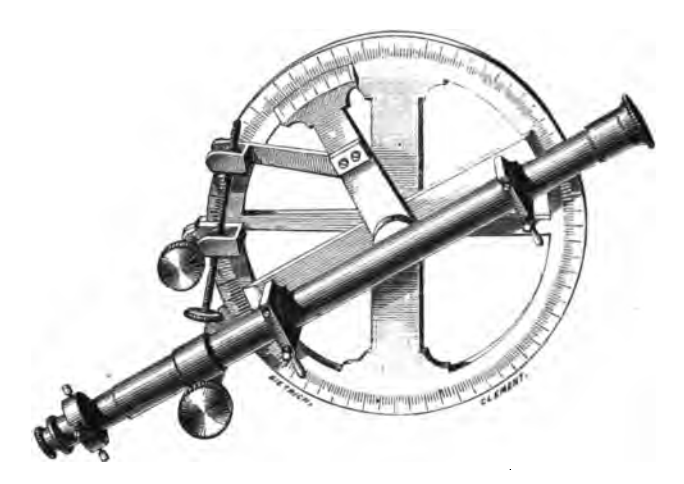


FIG. 13.

la valeur, de faire la lecture comme nous l'avons indiqué ci-dessus.

Le vernier linéaire est employé dans beaucoup d'appareils de mesure; nous aurons l'occasion d'en décrire quelques-uns plus loin.

Pour la mesure des angles, la règle est remplacée par un cercle (fig. 13) divisé en degrés ou, le plus souvent, en demi-degrés. Une alidade pouvant tourner autour d'un axe passant par le centre du cercle gradué, porte l'organe dont on veut mesurer le déplacement angulaire, la lunette d'un théodolite par exemple; cette alidade se termine par le vernier circulaire. Celui-ci est une portion de cercle gradué dont les traits extrêmes compren-

nent un arc qui vaut N — 1 divisions du cercle, et qui est divisé en N parties égales, comme pour un vernier linéaire.

Par exemple, le cercle étant divisé en demi-degrés, le vernier comprend entre ses traits extrêmes un arc de 29 demi-degrés divisé en 30 parties égales. La lecture du vernier donne alors les trentièmes d'un demi-degré, c'est-à-dire les minutes. Dans ce cas, l'erreur de lecture ne doit pas atteindre une demi-minute, comme nous l'avons expliqué plus haut.

L'angle au centre, dont les côtés passent respectivement par le zéro de la graduation et le zéro du vernier, est connu ainsi par la lecture du numéro du trait du cercle gradué qui précède immédiatement le zéro du vernier et par la lecture du numéro du trait du vernier en coïncidence. Par exemple, en se servant d'un cercle gradué en demi-degrés et d'un vernier au trentième, si la lecture du cercle gradué donne $61^\circ + \frac{1}{2}$ et la lecture du vernier donne 17, cet angle vaut 61° 47′.

8. CATHÉTOMÈTRE. — Le *cathétomètre* (de κάθετος verticale et μέτρον mesure) est un instrument destiné à mesurer la distance verticale de deux points. Il consiste essentiellement en une lunette astronomique dont l'axe optique est horizontal; cette lunette est mobile autour d'un axe vertical de façon à pouvoir viser les divers points d'un même plan horizontal; en outre, elle peut s'élever ou s'abaisser, la hauteur dont elle se déplace étant mesurée par une règle graduée verticale. On comprend qu'en visant successivement deux points avec la lunette, le déplacement vertical de celle-ci, donné par la règle graduée, fait connaitre la distance des deux plans horizontaux qui contiennent les points.

Un cathétomètre réduit à ses organes essentiels a été employé par Gay-Lussac dans plusieurs de ses recherches, en particulier, dans ses expériences sur la capillarité. Mais ce sont Dulong et Petit qui ont pourvu le cathétomètre des accessoires indispensables à son réglage, et, les premiers, ils ont employé cet instrument, dans leur détermination du coefficient de dilatation absolue du mercure, sous la forme qu'il a aujourd'hui. La règle du cathétomètre de Dulong et Petit n'avait qu'une trentaine de



Fig. 14.

centimètres de hauteur; Pouillet d'abord, Regnault ensuite, ont fait construire des cathétomètres dont la règle avait plus d'un mètre. C'est ce modèle, le plus employé maintenant, que nous allons décrire.

Description. — La règle du cathétomètre RR' (fig. 14 et 15), généralement graduée en millimètres, fait corps avec un manchon MM' en laiton pouvant tourner autour d'un axe vertical en acier contenu à son intérieur, grâce à la disposition suivante. La partie inférieure I de l'axe d'acier porte un tronc de cône, parfaitement travaillé au tour, sur lequel repose la base du manchon de laiton évasé en un tronc de cône épousant la forme du précédent. La partie supérieure du manchon est traversée par une vis (non visible sur la figure), terminée par une pointe; celle-ci s'engage dans une légère cavité creusée au sommet de l'axe d'acier. Par cette disposition, le manchon est supporté par la vis en haut et le cône d'acier en bas; l'axe de rotation est alors la droite qui passe par l'extrémité *a* de la pointe de la vis et le milieu *b* de l'axe du cône d'acier. Du reste, ce tronc de cône est

construit de façon que son axe coïncide autant que possible avec la ligne *ab*.

L'axe d'acier repose en J sur un socle muni de trois vis calantes A, B, C qui permettent de rendre parfaitement vertical l'axe de rotation du cathétomètre.

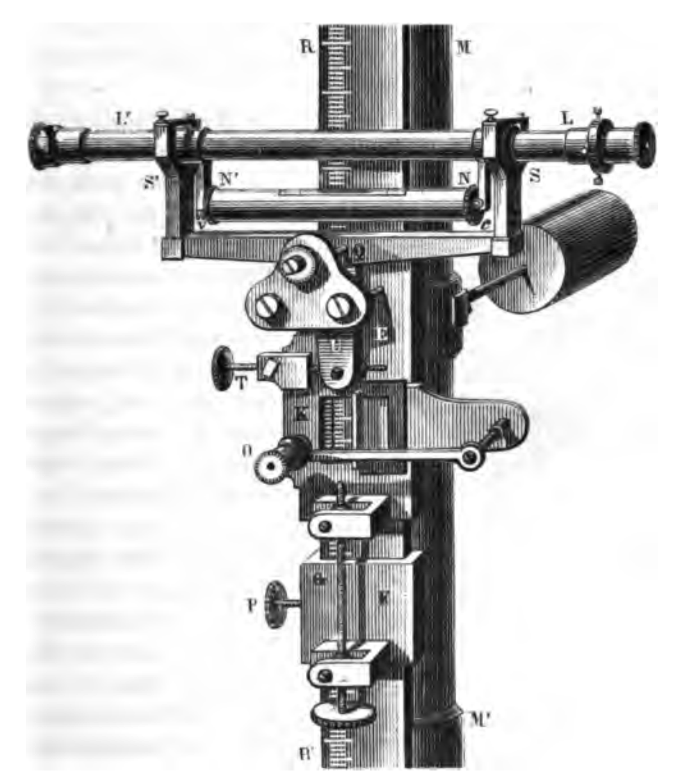


Fig. 13.

La lunette LL' est portée par un équipage mobile, pouvant glisser le long de la règle graduée pour être placé à la hauteur voulue. Cet équipage se compose de deux parties E et F réunies entre elles par une vis de rappel G. La partie inférieure F porte une vis de pression P; quand, en déplaçant tout l'équipage, on

a disposé la lunette à peu près dans la position voulue, on fixe la partie inférieure F au moyen de la vis de pression P, et, en agissant sur la vis de rappel G, on déplace doucement la partie supérieure E, qui porte la lunette, jusqu'à ce que celle-ci vise le point voulu. Cette partie supérieure de l'équipage E est munie d'un vernier au cinquantième K, qui permet de mesurer le déplacement de la lunette. Une loupe O grossit les divisions de la règle et du vernier pour qu'on puisse mieux juger de la coïncidence des traits.

La lunette n'est pas fixée invariablement à l'équipage; elle est seulement posée sur deux fourchettes S et S' que porte celui-ci. Les parties CC (fig. 16) par lesquelles la lunette repose sur les fourchettes sont parfaitement cylindriques et ne touchent que les côtés des fourchettes A et B inclinés à 45° sur la verticale. Les deux cylindres ont, du reste, exactement le même rayon et leurs axes sont dans le prolongement l'un de l'autre. C'est l'axe commun à ces deux cylindres de révolution que nous appellerons *l'axe géométrique* de la lunette. Cet axe jouit évidemment de la propriété de ne pas se déplacer quand on tourne la lunette sur elle-même; en outre, il reprend la même position dans l'espace, quand on retourne bout pour bout la lunette, puisque les deux cylindres par lesquels celle-ci repose sur les fourchettes ont le même rayon.

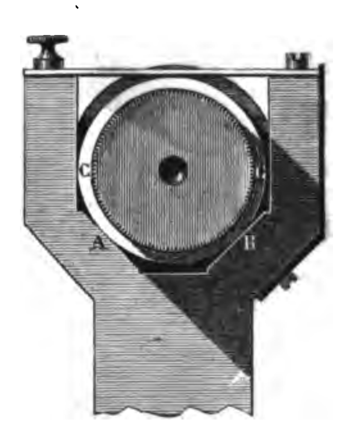


FIG. 16.

Un niveau à bulle d'air NN' (fig. 15) est suspendu au-dessous de la lunette et en est solidaire (1). L'un des deux plans de symétrie de ce niveau contient l'axe géométrique de la lunette. C'est la droite, située dans ce plan de symétrie et passant par

(1) Voir L. III Chap. I § 10, la description du niveau à bulle d'air.

les deux traits zéros du niveau, que nous appellerons la *ligne des zéros*.

Il est nécessaire que cette ligne soit bien parallèle à l'axe géométrique; pour pouvoir effectuer ce réglage, une vis *v* permet de faire un peu tourner le niveau autour d'une charnière horizontale *c*.

Afin de pouvoir disposer l'axe optique de la lunette dans une position parfaitement perpendiculaire à l'axe de rotation du cathétomètre, le système des deux fourchettes peut tourner autour d'un axe horizontal Q que porte la partie supérieure de l'équipage; une vis de rappel T, qui agit sur le bras de levier U, permet de donner aux fourchettes et, par conséquent, à la lunette, le petit déplacement angulaire nécessaire au réglage.

Les deux fils croisés qui forment le réticule de la lunette sont fixés à une plaque de laiton A (fig. 17) calée entre quatre vis VV'V''V'''. En tournant convenablement celles-ci, on peut donner un petit déplacement à la croisée des fils et l'amener exactement dans la position nécessaire pour que l'axe optique coïncide avec l'axe géométrique.

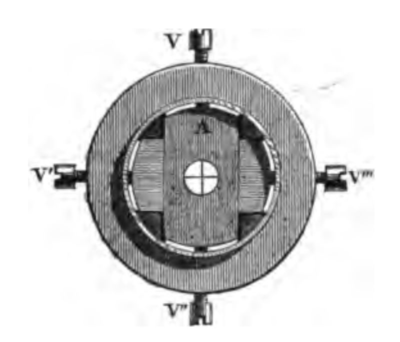


Fig. 17.

Ajoutons enfin, pour terminer la description, que le socle de l'appareil porte souvent deux niveaux X et Y (fig. 14) disposés à angle droit, et réglables à l'aide d'une vis et d'une charnière, comme le niveau de la lunette. Ces deux niveaux sont commodes, mais non indispensables, pour régler la verticalité de l'axe du cathétomètre.

Réglage. — Un cathétomètre, pour donner de bons résultats, doit avoir son axe de rotation parfaitement vertical et l'axe optique de la lunette parfaitement perpendiculaire à l'axe de rotation. Ces deux conditions nécessitent un réglage soigné que nous allons indiquer.

1° *Il faut faire coïncider l'axe optique de la lunette avec son axe géométrique.*

Pour cela, on vise sur un écran perpendiculaire (ou à peu près) à l'axe géométrique un point M ; c'est-à-dire que ce point M vu à travers la lunette doit paraître coïncider avec la croisée des fils du réticule : le point M de l'écran se trouve alors sur l'axe optique de la lunette. On fait ensuite tourner la lunette sur elle-même ; si l'axe géométrique, qui ne se déplace pas pendant cette rotation, coïncide avec l'axe optique, celui-ci, conservant la même position dans l'espace, passe encore constamment par le point M, et ce point ne cesse pas d'être vu sur la croisée des fils, pendant la rotation de la lunette.

Mais si l'axe optique ne coïncide pas avec l'axe géométrique, pendant la rotation de la lunette il décrit une surface de révolution (cône ou hyperboloïde) autour de l'axe géométrique fixe. Cette surface coupe l'écran suivant un cercle C (fig. 18) dont le centre est le point fixe O où l'axe géométrique perce l'écran. On voit donc, en tournant la lunette sur elle-même, les divers points de la circonférence de ce cercle sur la croisée des fils.

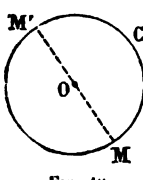


Fig. 18.

D'après cela, pour corriger ce défaut, il suffit de viser un point quelconque M de l'écran, de tourner ensuite la lunette sur elle-même de 180° et de marquer sur l'écran le point M' qui est maintenant visé par la lunette. Il est clair que M et M' sont deux points situés à l'extrémité d'un même diamètre du cercle C. En marquant sur l'écran le milieu de cette droite MM', on a le centre O de ce cercle c'est-à-dire le point où l'axe géométrique perce l'écran. Alors, sans changer la position de la lunette, on déplace le réticule de façon à voir le point O en coïncidence avec la croisée des fils, ce qui fait coïncider l'axe optique avec l'axe géométrique [1]. On s'assure que l'opération est bien faite en

(1) Nous supposons implicitement ici que le centre optique de l'objectif a été placé par le constructeur exactement sur l'axe géométrique de la lunette. S'il en est autrement, il est clair qu'on ne peut pas faire coïncider les deux axes ; tout ce qu'on peut obtenir alors par le procédé indiqué

tournant la lunette sur elle-même; elle ne doit pas cesser de viser le point O.

2° *Il faut rendre la ligne des zéros du niveau de la lunette parallèle à l'axe géométrique de celle-ci.*

Amenons la bulle entre les deux zéros en agissant sur les vis calantes du pied du cathétomètre. Si l'axe géométrique est parallèle à la ligne des deux zéros, cet axe est alors horizontal. Supposons qu'il en soit ainsi; et retournons bout pour bout la lunette et, par conséquent, le niveau qui en est solidaire. Nous savons que l'axe géométrique reprend, après le retournement, la même position qu'avant; il est donc encore horizontal, et, puisque la ligne des deux zéros lui est parallèle, on doit voir la bulle d'air venir se placer de nouveau entre les deux zéros.

Mais, si la ligne des zéros AB (fig. 19) fait un petit angle α

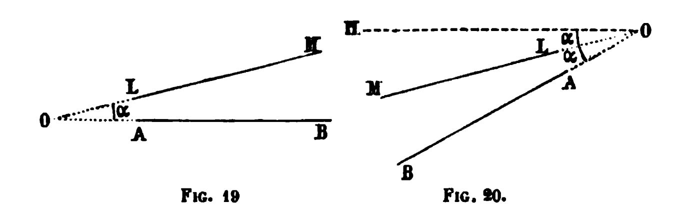


Fig. 19 Fig. 20.

avec l'axe géométrique LM, quand on a placé la bulle entre les deux zéros de façon à rendre AB horizontal, l'axe LM fait cet angle α avec l'horizon, l'extrémité M étant plus élevée que l'extrémité L. Quand, après le retournement, l'axe géométrique a repris la même direction LM (fig. 20), il fait encore le même angle α avec une ligne horizontale OH; seulement c'est l'extrémité L qui est maintenant plus élevée que M; alors la ligne AB qui fait l'angle α avec la direction OLM n'est plus horizontale et fait avec l'horizontale OH un angle 2α. Aussi voit-on la bulle d'air s'avancer du côté de A jusqu'à la division *n* correspondant

ci-dessus, en choisissant un écran très éloigné, c'est de rendre les axes parallèles. Mais, faisons remarquer qu'il suffit pour l'exactitude des observations que l'axe optique soit parallèle à l'axe géométrique.

à l'inclinaison 2α sur l'horizon de la ligne des zéros. En faisant tourner alors le niveau autour de la charnière *c* (fig. 15) au moyen de la vis *v*, de façon à ramener l'extrémité de la bulle de la division *n* à la division $\frac{n}{2}$, on diminue de α l'angle que fait la ligne des zéros avec l'horizon et avec l'axe géométrique; par conséquent, on rend la ligne des zéros parallèle à cet axe.

Il est bon de s'assurer que l'opération a été bien faite en voyant, par le procédé que nous venons d'indiquer, si la ligne des zéros est bien parallèle à l'axe de la lunette.

Ce réglage est indépendant du réglage précédent; il peut donc être fait avant lui ou après lui. Quand ces deux réglages sont effectués, l'axe optique est parallèle à la ligne des deux zéros, et, en plaçant la bulle entre ceux-ci, l'axe optique est rendu horizontal.

3° *Il faut rendre la ligne des zéros perpendiculaire à l'axe de rotation.*

Amenons la bulle d'air entre les deux zéros, en agissant sur les vis calantes de l'appareil, et faisons tourner ensuite de 180° la lunette autour de l'axe du cathétomètre. Quelle que soit la position de cet axe, si la ligne des zéros lui est perpendiculaire, après la rotation de 180°, elle sera parallèle à sa première position : cette ligne sera donc de nouveau horizontale, et nous verrons la bulle venir se placer encore entre les deux zéros.

Mais supposons que la ligne des zéros AB (fig. 21) ne soit pas exactement perpendiculaire à l'axe de rotation et fasse un petit angle α avec une perpendiculaire LM à cet axe. Dans ce cas, si l'on a placé d'abord la bulle entre les deux zéros, AB est horizontale et LM fait l'angle α avec l'horizon, l'extrémité M étant plus élevée que l'extrémité L. Après une rotation de 180°, la ligne LM, perpendiculaire à l'axe, prend une nouvelle position parallèle à la première et, par conséquent, fait encore l'angle α avec une ligne horizontale OH; mais, cette fois, c'est l'extrémité L qui est plus élevée que M (fig. 22). Il en résulte que la ligne des zéros AB qui fait toujours l'angle α avec la direction OLM n'est plus horizontale, et fait avec l'horizontale OH un angle 2α. Aussi voit-on la bulle d'air s'avancer du côté de A d'un nombre

de divisions n correspondant à l'angle 2α. On fait tourner alors, par rapport au reste de l'instrument, le système des fourchettes qui porte la lunette et le niveau, au moyen de la vis de rappel T

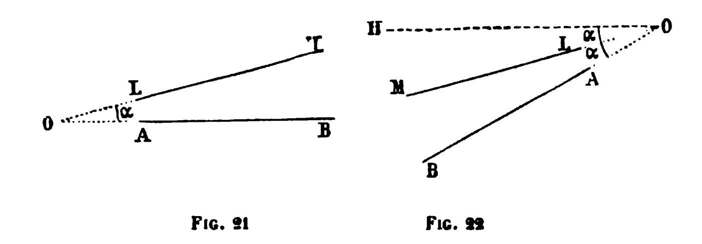


FIG. 21 FIG. 22

(fig. 15), de façon à ramener l'extrémité de la bulle de la division n à la division $\frac{n}{2}$, ce qui diminue de α l'angle que fait avec l'horizon et avec la perpendiculaire LM à l'axe de rotation la ligne des zéros. On rend ainsi cette ligne parallèle à LM et, par conséquent, perpendiculaire à l'axe de rotation.

Il est bon de s'assurer que l'opération a été bien faite, en voyant, par le procédé que nous venons d'indiquer, si la ligne des zéros est bien perpendiculaire à l'axe de rotation.

Quand les trois premiers réglages ont été effectués, l'axe optique de la lunette est perpendiculaire à l'axe de rotation du cathétomètre.

4° *Il faut rendre l'axe de rotation du cathétomètre vertical.* Pour obtenir ce résultat, on place la lunette à peu près parallèlement à la ligne qui joint deux des vis calantes du pied, A et B (fig. 14). En agissant sur ces vis, on amène la bulle d'air du niveau de la lunette entre les zéros.

Admettons, pour un instant, que la ligne *ab* qui joint les deux points où les vis A et B touchent le sol soit parfaitement horizontale et que la ligne des zéros soit parfaitement parallèle à cette ligne *ab*; alors l'axe de rotation du cathétomètre, étant perpendiculaire à la ligne des zéros, est perpendiculaire à l'horizontale *ab* et se trouve ainsi dans un plan vertical perpendiculaire à *ab*.

Tournons alors de 90° la lunette du cathétomètre autour de l'axe,

de façon à l'amener à être à peu près parallèle à la perpendiculaire *cd* à la ligne *ab*, passant par le point *c* où la troisième vis calante C touche le sol. Agissons sur cette vis de façon à ramener la bulle d'air entre les zéros.

En agissant sur la vis calante C, on a fait tourner le cathétomètre autour de l'horizontale *ab*; l'axe de rotation, restant toujours dans le plan vertical perpendiculaire à *ab* pendant ce mouvement, sera rendu parfaitement vertical dès que la bulle sera entre les zéros, puisque la ligne des zéros, qui est toujours perpendiculaire à cet axe et qui est loin d'être perpendiculaire au plan vertical précédent, sera rendue horizontale.

Or, les conditions que nous avons supposées (horizontalité de *ab*, et parallélisme de la ligne des zéros avec cette ligne) ne sont réalisées que d'une façon approchée; aussi, l'axe, après cette seconde opération, n'est-il pas en général rendu tout à fait vertical. On s'en aperçoit en ramenant par une rotation de 90° le niveau dans sa première position : la bulle ne revient pas exactement entre les deux zéros.

On agit alors à la fois sur les deux vis A et B, en les tournant en sens inverse de quantités autant que possible égales entre elles, pour ramener la bulle entre les zéros. Si cette opération est bien faite, l'inclinaison de la ligne *cd* ne varie pas sensiblement. Aussi, quand après une nouvelle rotation de 90° on ramène le niveau parallèlement à cette ligne, la bulle reste à peu près entre les zéros. En agissant sur la vis C, on la ramène exactement à cette position, et ainsi de suite : après un petit nombre d'opérations de ce genre faites en rendant, tantôt le niveau parallèle à *ab*, tantôt à *cd*, on arrive à ne plus avoir de déplacement de la bulle d'air quand on passe d'une de ces positions à l'autre. L'axe de rotation est alors parfaitement vertical, puisque le plan décrit par la ligne des zéros tournant autour de lui renferme deux horizontales non parallèles entre elles, et que l'axe est perpendiculaire à ce plan horizontal.

Les trois premiers réglages, que nous avons décrits, doivent être faits une fois pour toutes, et, avant de se servir de l'instrument, on n'a besoin que de vérifier qu'un accident ne les a pas détruits. Mais, il est évident qu'il n'en est pas de même du

réglage de la verticalité de l'axe de rotation ; celui-ci doit être refait chaque fois que l'instrument est déplacé.

L'emploi des niveaux que porte le pied du cathétomètre permet d'obtenir rapidement ce dernier réglage. Après avoir rendu l'axe de rotation bien vertical par le procédé indiqué plus haut, on règle chacun de ces deux niveaux de façon que la bulle d'air se place entre les deux zéros. Cette opération faite, les lignes des zéros de ces deux niveaux étant horizontales, sont perpendiculaires à l'axe de rotation. Alors, toutes les fois, qu'après un déplacement de l'instrument, on aura réglé sa position à l'aide des vis calantes de façon à ramener la bulle d'air de chacun de ces deux niveaux entre les zéros, l'axe de rotation sera de nouveau rendu vertical (1).

Défaut de rectitude de la règle. — Si la règle du cathétomètre sur laquelle glisse l'équipage qui porte la lunette était parfaitement droite, la bulle du niveau de la lunette ne se déplacerait pas quand on fait voyager celle-ci d'une extrémité de la règle à l'autre.

Si les bords de la règle, au contraire, ont une légère courbure, comme par le mode d'ajustement de l'équipage, la ligne des zéros reste toujours normale aux bords de la règle ou, du moins, fait toujours le même angle très petit avec la normale, il en résulte qu'en faisant voyager la lunette le long de la règle, la bulle du niveau ne conserve pas la même position. Il en est malheureusement assez souvent ainsi : c'est là un très grave défaut, car l'axe optique de la lunette, toujours parallèle à la ligne des zéros, ne reste pas parallèle à elle-même quand on lève ou abaisse la lunette. Par conséquent, si, dans une position AB (fig. 23) de la lunette, son axe optique est horizontal, il ne le sera plus pour une autre position A'B', et l'on voit, à l'inspection de la figure, que la distance des deux points P et Q visés successivement par la lunette n'est plus égale à son dé-

(1) Si nous avons tant insisté sur le réglage du cathétomètre, c'est non seulement à cause de l'importance de cet appareil, mais surtout parce que les procédés de réglage que nous avons décrits sont applicables à beaucoup d'autres instruments de mesure.

placement mesuré par la règle graduée. L'erreur est d'autant plus grande que les points visés sont plus loin de l'instrument.

On remédie en grande partie à cet inconvénient de la manière suivante. Quand la lunette est à peu près à la position convenable pour viser le point supérieur Q et qu'on s'aperçoit que la bulle n'est plus entre les deux zéros, comme elle l'était dans la position AB, on agit sur la vis de rappel horizontale T (fig. 15) pour donner une légère inclinaison à la lunette par rapport à l'instrument, de façon à ramener la bulle entre les deux zéros, c'est-à-dire de façon à ramener l'axe de la lunette à l'horizontalité; on déplace ensuite légèrement la lunette à l'aide de la vis de rappel G jusqu'à la placer dans la position A″B″ où elle vise le point Q (fig. 23). Le déplacement de la lunette entre les positions AB et A″B″ est alors à très peu près égal à la distance verticale des deux points P et Q.

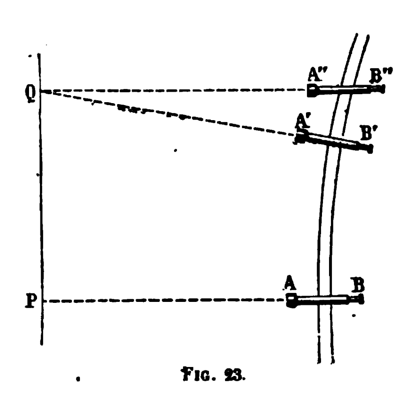


Fig. 23.

Mais on voit qu'en agissant ainsi on a déréglé la perpendicularité de l'axe optique et de l'axe de rotation.

Les erreurs relativement assez graves qu'on commet avec un cathétomètre dont le réglage n'est pas parfait, ou dont la règle présente une très légère courbure, ont fait renoncer aujourd'hui dans bien des cas, à l'emploi de cet instrument. Dans les mesures d'une très grande précision on se sert pour obtenir la distance de deux points situés sur la même verticale du procédé général indiqué plus haut (§ 6) pour la mesure des longueurs. La figure 11 représente précisément la disposition adoptée pour relever ainsi la hauteur du baromètre.

SUPPLÉMENT AU LIVRE III

CAPILLARITÉ

SUPPLÉMENT AU LIVRE III

CAPILLARITÉ

1. PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES. — Quand un tube de verre de faible diamètre intérieur est plongé dans un vase plein d'eau, on voit ce liquide monter dans le tube, et sa surface libre se maintient stationnaire à une hauteur d'autant plus grande

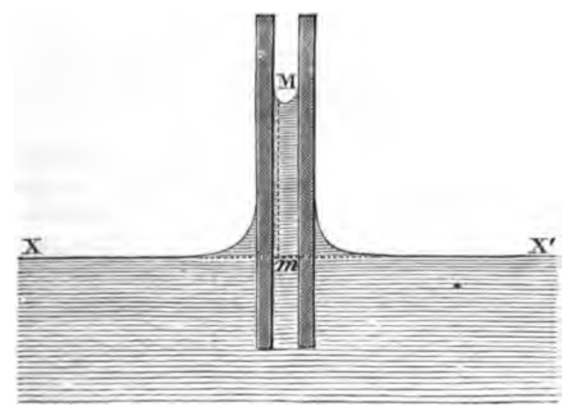


FIG. 1.

au-dessus du niveau du liquide dans le vase, que le tube est plus fin (fig. 1).

En outre, la surface terminale du liquide dans le tube n'est pas un plan horizontal mais une surface courbe M tournant sa concavité du côté de l'air. On désigne sous le nom de *ménisque* cette surface courbe terminale M.

Voilà deux exceptions aux règles de l'hydrostatique, qui nous apprennent que, dans deux vases communiquants renfermant le même liquide, les surfaces libres sont des plans horizontaux situés au même niveau.

Remarquons que les lois de l'hydrostatique ont été déduites *a priori* des règles de la mécanique et de la définition des *fluides parfaits*, c'est-à-dire de fluides dans lesquels les forces intérieures n'accompliraient aucun travail quand il y a déformation sans changement de volume. Aucun fluide réel ne répond rigoureusement à cette définition ; ils s'en approchent plus ou moins seulement. En outre, nous avons négligé les attractions que peuvent exercer les parois des vases sur les fluides qu'ils renferment. Si nous nous reportons à la formule (6) du Livre III, Chap. I § 4, qui représente le travail des forces agissant sur une masse fluide primitivement en équilibre quand elle subit une très faible déformation, et qui est tout à fait générale, nous y trouvons un terme w représentant précisément le travail des forces intérieures et des forces attractives entre le fluide et les parois. Nous avons négligé ce terme pour établir les lois de l'hydrostatique ; en en tenant compte nous trouverions la raison des phénomènes que nous venons de signaler.

On a donné aux phénomènes qui sont dus précisément à ces attractions des particules fluides entre elles ou des particules fluides sur les particules solides le nom de phénomènes *capillaires* ; parce qu'ils ont été observés d'abord dans des tubes fins comme des cheveux, des tubes *capillaires* (de *capillus* cheveu). La partie de la physique qui traite de ces questions a reçu le nom de *Capillarité*.

La première observation des phénomènes capillaires paraît remonter à Nicolas Aggiunti, membre de l'Académie del Cimento, au commencement du XVII siècle.

2. ATTRACTION MOLÉCULAIRE. — Entre les particules d'un corps

solide il existe des forces attractives qui s'opposent à sa rupture et auxquelles on a donné le nom de forces de *cohésion*.

Chez les liquides ces forces sont moindres, mais pourtant les expériences les plus simples en montrent l'existence. Si l'on trempe une baguette de verre dans l'eau, on enlève, en la retirant, une goutte de liquide. Or, si les particules liquides qui se trouvent à la partie inférieure de la goutte ne tombent pas, c'est qu'elles sont retenues par une attraction qui s'exerce entre elles et les particules situées au-dessus.

Cette même expérience montre qu'une force semblable agit entre les particules du liquide et du solide auquel adhère la goutte. Ces forces attractives existent encore quand le solide n'est pas mouillé par le liquide, (verre et mercure par exemple); on peut le montrer par l'expérience suivante. On accroche sous le plateau d'une balance hydrostatique un disque de verre, on fait équilibre au poids du disque à l'aide d'une tare placée dans le second plateau; puis, abaissant le fléau, on fait flotter le disque sur un bain de mercure. On constate alors que l'on peut mettre un certain nombre de grammes dans le second plateau sans arracher le disque du mercure; la force d'arrachement a été trouvée par Gay-Lussac égale au poids de 200 grammes (1) environ pour un disque de verre de 11^{c},836 de diamètre.

Les gaz adhèrent aussi aux corps solides; nous insisterons plus loin sur ce point à propos de l'ébullition (L. IV, Chap. VII, § 9).

Enfin, le phénomène de l'entraînement de l'air par un jet liquide dans une trompe (2), montre bien l'existence d'attraction entre les particules d'un gaz et celles d'un liquide.

Ces forces attractives ne s'exercent qu'à des distances extrêmement petites; ainsi, quand on a rompu un corps solide, on ne parvient généralement pas à souder entre elles les deux parties séparées en les rapprochant et même en les appuyant faiblement l'une contre l'autre : la distance entre les particules des deux

(1) Ce nombre est loin d'être constant pour des causes qu'il serait trop long d'énumérer ici. Gay-Lussac l'a vu varier, suivant la durée du contact, de 158^{gr} à 290^{gr}. (Laplace. *Supplément de la Mécanique céleste.*)

(2) Nous avons déjà décrit, dans les appareils pneumatiques la trompe à mercure de M. de Romilly (L. III. Chap. VI § 12 p. 323.)

La trompe à eau, dont on se sert depuis longtemps soit pour raréfier soit

portions reste encore trop grande. Pourtant, avec quelques précautions, on peut obtenir l'adhésion. Ainsi, on répète souvent dans les cours l'expérience suivante. On prend deux disques de verres égaux usés à l'émeri fin, parfaitement plans; on les fait glisser l'un contre l'autre, et l'on constate qu'ils adhèrent assez fortement entre eux (fig. 3). L'expérience réussissant dans le vide, on ne peut attribuer cette adhérence à la pression atmosphérique.



Fig. 3.

M. Walthère Spring [1] a constaté qu'en soumettant dans une matrice à l'action d'un piston d'acier, sur la tête duquel on exerçait une pression énergique, des poudres de presque toutes les substances, on arrivait à les

pour comprimer l'air, est fondée sur le même principe. La figure 2 en représente un modèle très employé. Un courant d'eau arrive par le tube C, s'échappe de ce tube par l'extrémité A en forme de tronc de cône pour s'engager dans un autre tube BD en forme de tronc de cône évasé en sens inverse. Il y a donc en O interruption des tubes; or, le gaz qui est dans le voisinage de cette ouverture O étant entraîné par le jet d'eau, se raréfie dans la cavité qui l'entoure et, par conséquent, dans le récipient communiquant avec elle par le tube E. Il est bon de munir ce tube E d'une soupape empêchant le retour du gaz dans le récipient, si par une cause quelconque la force élastique vient à augmenter en O.

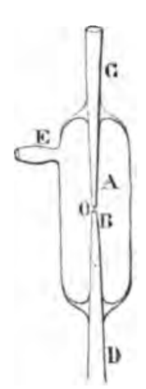


Fig. 2.

On peut ainsi rapidement obtenir une très faible force élastique.

Si le tube E est ouvert dans l'atmosphère, l'air entraîné constamment par l'eau peut être accumulé sous pression dans un récipient où aboutit le conduit. Le gaz gagne la partie supérieure de ce récipient dont l'eau peut s'échapper par un tuyau convenablement disposé.

(1) Walthère Spring, *Annales de physique et de chimie*, 5e série, t. XXII, p. 170 (1881).

transformer en des corps compacts, à la température ordinaire. C'est ainsi que des forces élastiques variant suivant les substances entre 2000 et 6000 atmosphères, ont transformé les limailles de plomb, de bismuth, d'étain, de zinc, de cuivre, d'aluminium en masses aussi compactes que celles qu'on obtient par fusion; les métaux cristallisables (bismuth, zinc), présentaient quand on cassait le bloc la même apparence de cristallisation. La poudre de soufre comprimée a donné un bloc de soufre cristallisé. Il en a été de même des précipités pulvérulents amorphes de sulfure de zinc, de sulfure de plomb, de bioxyde de manganèse, qui, par compression, ont donné des corps identiques aux cristaux que l'on trouve dans la nature (bleude, galène, pyrolusite). L'amidon sec s'est transformé sous une pression de 6000 atm., en une masse compacte transparente sur les bords, absolument dépourvue de structure organique. Enfin, des mélanges de soufre et de cuivre soumis, à la température ordinaire, à une pression de 5000 atm., ont donné du sulfure de cuivre cristallisé.

Ce remarquable travail montre bien qu'il suffit de rapprocher suffisamment les particules des solides, pour que les forces moléculaires agissent.

Par des pressions encore plus considérables que celles qui sont nécessaires à la transformation en bloc compacte, M. Walthère Spring a vu les métaux solides s'écouler par les fissures de la matrice comme le ferait un liquide, conformément aux expériences antérieures de M. Tresca.

3. THÉORIES DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES. — L'existence de ces forces attractives entre les particules des corps a servi de point de départ à toutes les explications des phénomènes capillaires.

C'est à Laplace qu'est due la première théorie satisfaisante de ces phénomènes (1). Le savant géomètre admet qu'une molécule de liquide est attirée par les molécules voisines avec une force proportionnelle aux masses et variant avec la distance suivant une fonction indéterminée, mais telle que cette force devienne insensible dès que la distance surpasse une très petite valeur.

1) LAPLACE, *Supplément au livre X de la Mécanique céleste*. Paris (1807).

En d'autres termes, les molécules qui peuvent agir sur la molécule considérée O sont comprises à l'intérieur d'une sphère (*sphère d'activité*) ayant O pour centre et un très petit rayon. Laplace admet, en outre, que les liquides sont incompressibles.

Gauss (1), en partant des mêmes principes et en faisant application du théorème des travaux virtuels, arrive à des formules plus générales que celles de Laplace et dont toutes les conséquences vérifiables ont été justifiées par l'expérience. Du reste, les formules qu'on a déduites de la théorie de Gauss pour l'ascension ou la dépression des liquides à l'intérieur des tubes ou entre les lames, et les formules qui donnent la forme des surfaces terminales des liquides ne diffèrent pas de celles qu'a établies Laplace.

On peut conclure de l'analyse de Gauss que la surface libre d'un liquide est le siège de forces de tension tendant à faire prendre à la surface une aire minimum, absolument comme si le liquide était enfermé dans une mince enveloppe de caoutchouc tendue.

Déjà dès 1752, Ségner (2) assimila la couche superficielle d'un liquide à une membrane élastique, et Young (3), en 1805, a tiré de cette idée l'explication de la plupart des phénomènes capillaires.

Nous allons montrer d'abord l'existence de cette tension superficielle, et cette notion nous permettra d'établir aisément toutes les lois de la capillarité.

4. **TENSION SUPERFICIELLE.** — Considérons une particule liquide située à une distance de la surface plus grande que le rayon de la sphère d'activité A (fig. 4). Cette particule est également attirée par toutes les parties du liquide contenu dans la sphère, et toutes ces forces attractives, par raison de symétrie, ont une resultante nulle. Il n'en est plus de même d'une particule, telle

(1) Gauss, *Commentationes Societatis scientiarum Gottingensis recentiores* VII, p. 39 (1828-32). Voir aussi Moutier, *Annales de l'École Normale supérieure* (2), III, 70, (1874).

(2) Ségner, *Commentationes Societatis scientiarum Gottingensis*, I; (1752).

(3) Young, *Philosophical transactions*; (1805).

que B (fig. 4) située à une distance de la surface moindre que le rayon de la sphère d'activité, si toutefois les molécules de la substance qui se trouve de l'autre côté de la surface de séparation exercent sur la particule B une action moindre que les molécules du liquide considéré ; ce que nous supposons (1). Menons, en effet, par la particule B un plan parallèle à la surface libre ; le nombre des molécules contenues dans la sphère d'activité entre ce plan et la surface étant moins grand que celui des molécules situées de l'autre côté de ce plan, la force attractive exercée par ces dernières l'emporte sur celle exercée par les premières, et la résultante totale est une force normale à la surface et dirigée vers l'intérieur du liquide ; sa grandeur dépend de la position de B et de la nature des deux substances en présence.

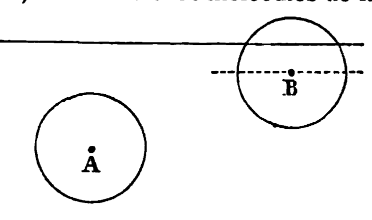


Fig. 4.

Il faut conclure de là que, si l'on donne à la surface d'un liquide une forme quelconque, puis qu'on l'abandonne à lui-même ces forces moléculaires feront rentrer dans l'intérieur de la masse liquide le plus grand nombre de molécules possible, c'est-à-dire que la *surface libre du liquide prendra l'aire minimum* compatible avec le volume de la masse et les liaisons qui peuvent exister, telles que l'adhérence à des parois solides. C'est, du reste, à cette conclusion que conduit la théorie de Gauss.

Plaçons, comme l'a fait Plateau (2), une certaine masse d'huile d'olive au milieu d'un mélange d'eau et d'alcool de même densité que l'huile (3). Quelle que soit la forme de cette masse d'huile,

(1) Le cas contraire correspond probablement à celui où les deux fluides en présence se dissolvent mutuellement.

(2) J. Plateau est né à Bruxelles le 14 octobre 1801 ; il est mort à Gand le 15 septembre 1883.

Ces expériences ont été publiées dans les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. XXIII, et dans les *Ann. de Phys. et de Chim.* 3e série, t. XXX p. 203 (1850).

(3) Il est commode de se servir pour cette opération d'une petite seringue en verre que l'on remplit de l'huile employée.

dans l'état d'équilibre, la résultante des actions de la pesanteur le *poids* est détruit par la résultante des pressions que supporte le pourtour de la masse d'huile, la *poussée*; aussi la masse est-elle abandonnée aux seules actions moléculaires. Dans ces conditions, elle prend une forme exactement sphérique (fig. 5). Si l'on vient à déformer cette masse en la touchant avec une baguette, par exemple, l'huile reprend immédiatement la forme d'une sphère dès que la cause qui a produit la déformation a cessé. Or, comme on le sait, la sphère est de toutes les figures de même volume celle qui présente la surface la moins étendue.

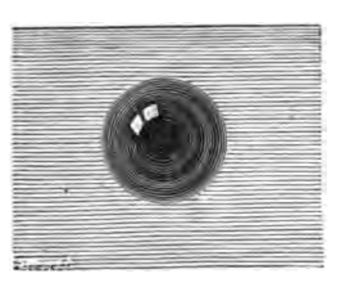


Fig. 5.

Quand, par une cause quelconque, une molécule liquide s'enfonce dans la masse, elle tire à sa suite les molécules situées plus près de la surface qui tirent les suivantes, et il finit par en résulter un glissement des particules tangentiellement à la surface. C'est ce qui est prouvé de la façon la plus nette par la jolie expérience suivante due à M. Pasteur. On saupoudre de grès fin la surface d'un bain de mercure; en enfonçant dans le bain une baguette de verre, on voit les grains de grès être entraînés vers la cavité creusée dans le mercure par la baguette et y disparaître, indiquant évidemment un déplacement tangentiel de toutes les particules de la surface. En retirant la baguette, on fait réapparaître ces grains de grès; on produit l'effet inverse. La même expérience peut être répétée avec l'eau en remplaçant le grès par de la poudre de lycopode et en employant une baguette de verre graissée, pour ne pas être mouillée par le liquide.

Il y a là un effet tout à fait analogue à celui qui se produit dans le cas d'une corde passant sur des poulies A et B et tendue par un poids P (fig. 6). Dans l'état d'équilibre, (les extrémités R et S étant fixées par exemple) chaque point M ou N des parties horizontales est sollicité par deux forces de tension en sens

inverse et égale à $\frac{P}{2}$. Si l'une des forces vient à faiblir, l'autre l'emporte et il y a déplacement des points M et N dans le sens de la plus grande force ; ainsi, si l'on permet le mouvement des extrémités R et S, les points M et N se rapprochent comme s'ils s'attiraient avec une force égale à $\frac{P}{2}$.

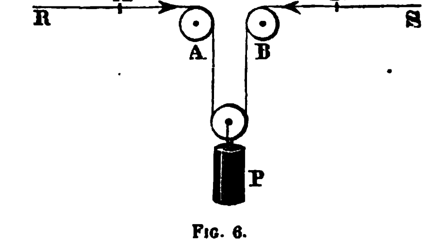


FIG. 6.

La tendance des particules de la surface d'un liquide à s'enfoncer dans l'intérieur de la masse doit donc donner naissance à un état de tension superficielle absolument comparable à l'état de tension de la mince membrane de caoutchouc de ces petits ballons rouges gonflés de gaz qui servent de jouets aux enfants.

Du reste, un grand nombre d'expériences permettent de montrer directement l'existence de cette tension superficielle (1).

Nous commencerons par rapporter une expérience de M. A. Dupré parce qu'elle nous semble des plus nettes (2).

Un vase rectangulaire, peu profond, ABCD (fig. 7), a trois de ses parois latérales fixes ; la quatrième CD est une lame métallique mince bien plane, posée simplement sur le fond et appuyée, dans une situation un peu inclinée, contre un butoir C. Cette lame est re-

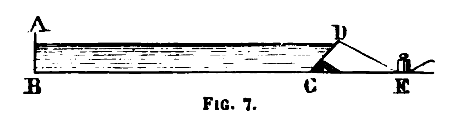


FIG. 7.

(1) Nous avons multiplié les descriptions d'expériences montrant la tension superficielle des liquides pour que l'existence de cette tension ne puisse faire aucun doute dans l'esprit du lecteur, au cas où les raisonnements précédents, par lesquels nous avons esssayé de l'établir *a priori*, ne lui paraîtraient pas suffisants.

(2) La description de cette expérience et de quelques-unes des expériences suivantes est tirée d'un article de M. Duclaux sur la capillarité qui a paru dans le *Journal de Physique*. (T. I p. 350, 1872.)

tenue par un fil DE. On verse dans le vase une petite quantité d'eau de façon que le niveau affleure à la partie supérieure de la lame mobile CD, puis on brûle le fil ED pour le rompre sans secousse. On voit alors la paroi mobile CD se redresser et se jeter en dedans malgré la pression hydrostatique qui tend à la pousser au dehors. Ainsi se trouve accusée l'existence de forces de tension qui ne peuvent avoir leur siège qu'à la surface libre du liquide.

M. Van der Mensbrugghe a modifié la forme de cette expérience de façon à la rendre d'une exécution beaucoup plus facile. En pliant convenablement une feuille de papier mince découpée en rectangle, on forme une boîte dont les bords ont environ un centimètre de hauteur. On mouille intérieurement les longs côtés de la boîte avec un liquide, de l'eau par exemple, et, après avoir bien dressé ces bords, on verse le même liquide dans la boîte. On voit alors les longs côtés s'incurver en dedans (fig. 8), sous l'influence de la tension superficielle qui tend à les rapprocher.

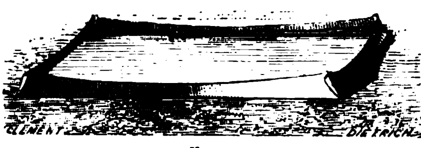


Fig. 8.

Voici une seconde expérience de M. Dupré, très facile à répéter. A une lame AB (fig. 9) en métal ou en bois on adapte un fil métallique courbé en cercle BC; un second fil métallique rectiligne DO peut tourner sans frottement en O, son extrémité recourbée s'engageant dans un trou suffisamment large de la lame AB. On mouille cette lame AB ainsi que les fils BC et OD avec un liquide visqueux tel que l'eau de savon, ou mieux le liquide glycérique de M. Plateau (1). Si alors on écarte de AB le fil

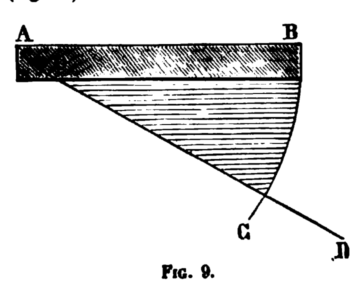


Fig. 9.

(1) C'est M. Plateau qui le premier a proposé d'ajouter de la glycérine à l'eau de savon pour avoir un liquide se prêtant mieux à la formation de lames

OD, une lame de liquide se forme entre AB, BC et OD et, si l'on abandonne le fil OD à lui-même, il remonte par l'action de cette lame liquide qui le tire.

Dans cette expérience, ainsi que dans les suivantes, la force est due aux tensions des deux faces de la lame liquide qui ajoutent leur effet.

Une expérience du même genre, due à M. Terquem, consiste à plonger dans le liquide glycérique deux tiges de bois de même longueur réunies à leurs extrémités par des fils de soie de même longueur aussi; en retirant ce petit appareil, une lame de liquide se forme entre les deux tiges et les fils, et ceux-ci sont fortement courbés en arc (fig. 10), au lieu d'être rectilignes comme cela aurait lieu si la lame liquide n'existait pas. La courbure de ces arcs est uniforme, ce sont des arcs de cercle.

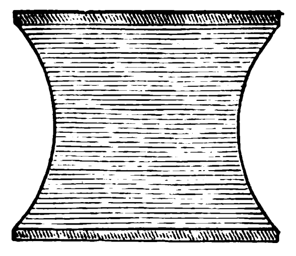


Fig. 10.

Une des plus curieuses expériences sur ce sujet a été imaginée par M. Van der Mensbrugghe; elle consiste à former une lame plane avec le liquide glycérique en y plongeant un cerceau métallique soutenu par trois fils (fig. 11) et à déposer doucement à la surface

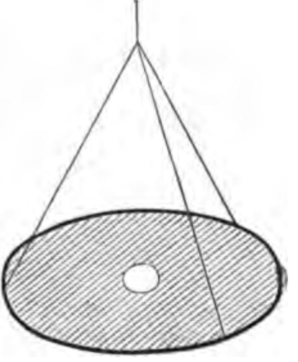


Fig. 11.

minces persistantes que l'eau de savon pure. (*Ann. de Phys. et de Chim.*, t. LXII, p. 213). M. Terquem, (*Journal de Physique* t. II, p. 409, 1873) a indiqué la recette suivante pour préparer convenablement ce liquide. On prend du savon de Marseille débité en minces copeaux avec un rabot et bien séché sur un poêle ou au soleil. On met le savon en digestion dans de l'alcool à 80° à la température ordinaire. Quand l'alcool est saturé de savon, il marque 74° à l'alcoomètre centésimal pour la température de 15°. On fait, d'autre part, un mélange de glycérine et d'eau marquant 17°, à l'aréomètre de Beaume (volumes égaux si la glycérine est anhydre). Le liquide final est préparé en prenant

de la lame un anneau en fil de coton fin, préalablement mouillé du même liquide, qui y prend une forme quelconque. Vient-on à percer la lame au milieu de l'anneau, celui-ci se tend brusquement en prenant une forme exactement circulaire, ce qui indique que la lame, qui a conservé son intégrité en dehors de l'anneau, exerce par unité de longueur des tensions égales sur tout le pourtour de celui-ci.

On obtient le même résultat, sans percer la lame, en déposant au milieu de l'anneau une goutte d'un liquide ayant une tension superficielle moindre que celui qui forme la lame (alcool, éther); l'anneau prend encore une forme circulaire à cause de l'exès de tension que présente la lame extérieure sur la lame intérieure.

Citons, pour terminer, l'expérience suivante : on souffle à l'extrémité d'un tube une bulle d'eau de savon; si l'on cesse de souffler, la bulle diminue de diamètre en chassant l'air contenu qui sort par le tube. On rend manifeste ce courant d'air en approchant l'orifice du tube de la flamme d'une bougie, qui est soufflée et peut être éteinte ainsi. On le voit, les parois de la bulle exercent sur l'air intérieur une pression semblable à celle que produirait la membrane tendue d'un ballon en caoutchouc.

5. VALEUR DE LA TENSION SUPERFICIELLE. — Divisons la surface libre d'un liquide par une ligne idéale PQ (fig, 12) en deux régions 1 et 2; la région 1 tire à elle la région 2, et réciproquement.

Si l'équilibre existe, nous pouvons supposer que l'une des régions, 2 par exemple, ait toutes ses particules invariablement

100 cent. cubes de glycérine étendue d'eau auxquels on ajoute 25 cent. cubes de la dissolution alcoolique de savon. On porte à l'ébullition pour chasser l'alcool; il a complètement disparu quand le point d'ébullition dépasse 100°. On laisse refroidir et l'on ajoute de l'eau distillée jusqu'à ce que le volume soit redevenu égal à 100 cent. cubes. Enfin on filtre plusieurs fois dans un entonnoir bouché avac du coton convenablement tassé pour avoir un liquide clair.

liées entre elles sur l'épaisseur extrêmement faible où s'exercent les forces de tension (longueur du rayon de la sphère d'activité). L'effet de la région 1 peut alors être considéré comme produit par des forces tangentes à la surface, et normales à la ligne PQ qui forme le bord de la région 2, par raison de symétrie.

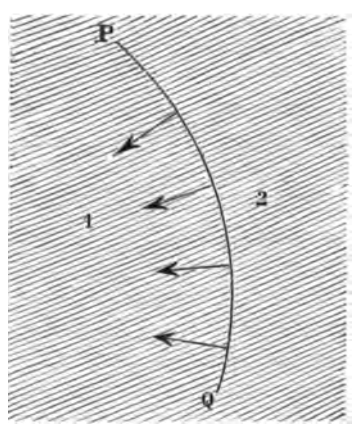


Fig. 2.

Pour que l'équilibre soit possible à la surface du liquide, il faut que chaque longueur égale d'une ligne de séparation telle, que PQ, soit soumise à des forces égales, quelles que soient la position et la direction de la ligne considérée PQ. Cette propriété, presqu'évidente, se démontre de la manière suivante. Supposons d'abord la surface plane et menons trois droites de direcction quelconque limitant un triangle ABC infiniment petit (fig. 13). Supposons les particules contenues à l'intérieur du triangle invariablement liées entre elles, sur l'épaisseur extrêmement faible ρ où la tension superficielle se manifeste, ce qui ne peut troubler l'équilibre. Le poids de ce triangle, vu la petitesse de ρ, étant absolument insignifiant vis-à-vis des tensions qui agissent sur ses trois côtés, et les pressions étant normales à la surface du triangle, il faut, pour que l'équilibre existe, que ces tensions se fassent mutuellement équilibre. Or, les tensions agissant sur chaque côté ont pour résultante une force F, F', F'' perpendiculaire à ce côté infiniment petit et appliquée en son milieu, par raison de symétrie. Pour que les trois forces F, F', F'', se fassent équilibre il faut, comme on le sait, qu'elles soient respectivement proportionnelles aux

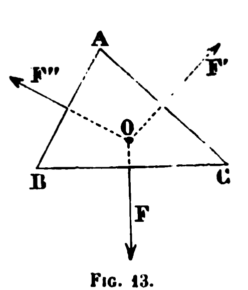


Fig. 13.

longueurs L, L', L'' des côtés auxquels elles sont appliquées (Dynamique § 26, note 2). On a donc :

$$\frac{F}{L} = \frac{F'}{L'} = \frac{F''}{L''} = A$$

Ainsi, quelle que soit la direction d'une ligne, en un même endroit le rapport de la force de tension F à la longueur de cette ligne L a une même valeur que nous représentons par A.

Cette quantité A, qui est la force appliquée à l'unité de longueur, est ce que nous appellerons *la valeur de la tension superficielle.*

Cette valeur est aussi la même en deux points différents de la surface d'un même liquide quelle que soit la distance de ces points. Imaginons, en effet, un long rectangle mené à la surface du liquide ayant deux bases infiniment petites, respectivement placées aux deux points M et N considérés. Supposons, comme plus haut, les particules de ce rectangle liées entre elles invariablement sur l'épaisseur ρ. Pour qu'il soit en équilibre, il faut évidemment que les bases M et N soient tirées par des tensions égales, et, comme elles ont même longueur, il faut que la valeur de la tension superficielle A soit la même en M et en N.

Si la surface du liquide est courbe, mais, comme cela a toujours lieu en pratique, d'un rayon très grand par rapport au rayon si petit ρ de la sphère d'activité, rien n'est changé à ce que nous venons de dire : autour de chaque point de la surface il est possible, en effet, de décrire un espace qui, quoique très grand par rapport à ρ, peut être considéré comme plan.

La valeur de la tension superficielle ne peut donc dépendre que de la nature du liquide et aussi de la nature du milieu qui se trouve de l'autre côté de sa surface.

On peut considérer comme une vérification de la constance de la valeur de la tension superficielle pour la surface de séparation de deux mêmes substances les expériences de Plateau sur les figures laminaires (1).

(1) Plateau, *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. XXXIII. *Ann. de Phys. et de Chim.*, 3e Série, t. LXII p. 210 (1861).

Dans ces expériences, le physicien belge s'est servi de carcasses en fils métalliques dessinant les arêtes de polyèdres,

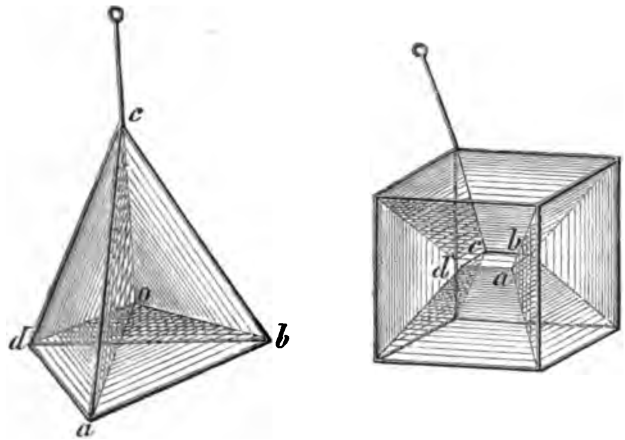


Fig. 14.

(tétraèdre, cube, etc. fig. 14). Ces systèmes sont immergés dans le liquide glycérique. En les retirant, il se forme des lames liquides partant de chaque arête solide et aboutissant à un même point O dans le cas du tétraèdre, aboutissant à une lame rectangulaire *a*, *b*, *c*, *d* dans le cas du cube, ou ayant d'autres dispositions suivant la forme de la carcasse métallique employée. Mais, dans tous les cas, Plateau a reconnu que les deux lois suivantes se vérifiaient toujours :

1° *Il n'y a pas plus de trois lames aboutissant à une même arête liquide, et elles forment entre elles des angles égaux* (de 120°, par conséquent).

2° *Si plusieurs arêtes liquides aboutissent à un même point où il n'y a pas de support solide, ces arêtes sont toujours au nombre de quatre et forment entre elles des angles égaux.*

La première loi montre bien que les trois forces de tensions agissant sur un élément d'une arête et provenant de chacune des lames sont égales entre elles. La seconde montre que les points d'une arête commune à trois lames liquides sont soumis à des tensions dirigées suivant cette arête et qui sont égales pour les quatre arêtes aboutissant en un même point.

6. MESURE DE LA VALEUR DE LA TENSION SUPERFICIELLE. — En unités C. G. S., la valeur de la tension superficielle s'exprime par le nombre de dynes exercées par centimètre de longueur.

Il existe plusieurs méthodes pour effectüer cette mesure; nous nous bornerons dans ce paragraphe à exposer une méthode directe imaginée par M. Van der Meusbrugghe; les autres méthodes trouveront mieux leur place plus loin.

Un fil de coton AB (fig. 15) est tendu horizontalement entre

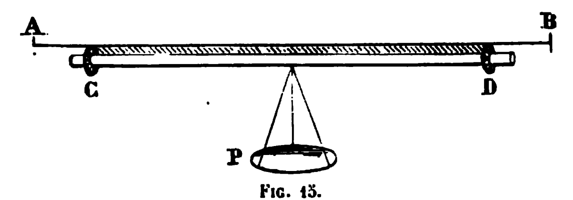


FIG. 15.

deux points fixes distants d'environ douze centimètres. D'autre part, on adapte aux extrémités d'un tube de verre ayant un millimètre de diamètre environ et dix centimètres de longueur deux petits anneaux C et D en fil de fer mince. Ce tube porte, en outre, vers son milieu, un plateau en papier P. Pour faire l'expérience, on mouille avec le liquide étudié le fil de coton; on dispose ensuite au-dessous de lui le tube de verre de façon que les anneaux touchent le fil, et, avec un pinceau, on introduit le liquide dans l'espace très étroit qui existe entre le fil et le tube. Celui-ci peut alors être abandonné à lui-même, il reste suspendu à cause de la tension superficielle des deux faces de la lame. Pour avoir la valeur de cette force, on dépose de petits grains de sable sur le plateau de papier, jusqu'à ce que le poids fasse détacher le tube du fil.

Le poids pg du tube, de son plateau et du sable déposé dessus (p masse donnée par la balance, g intensité de la pesanteur) est égal à la traction produite par la lame liquide. Or, soit l la distance CD des deux anneaux et A la valeur de la tension superficielle cherchée; chacune des faces de la lame produit une traction égale à Al, on a donc :

$$(1) \qquad 2Al = pg \qquad \text{d'où :} \qquad A = \frac{pg}{2l}$$

Pour avoir A en unités C.G.S., il faut exprimer p en grammes, l en centimètres, g en centimètre-secondes.

Il est clair que cette méthode directe n'est plus applicable quand le liquide ne mouille pas les supports employés, comme le mercure par exemple; nous verrons plus loin d'autres méthodes qui permettent de mesurer la tension superficielle dans tous les cas [1].

Voici un tableau déduit des résultats de M. Quincke [2], et qui donne en unités C.G.S. la valeur de la tension superficielle.

	Valeur de la tension superficielle à la surface de séparation de		
	AIR	EAU	MERCURE
Eau	81	0	418
Mercure	540	418	0
Sulfure de carbone	32,1	41,75	372,5
Chloroforme	30,6	29,5	399
Alcool	25,5	»	399
Huile d'olive	36,9	20,56	335
Essence de térébenthine	29,7	11,55	250,5
Pétrole (densité 0,7977)	31,7	27,8	284
Acide chlorhydrique (densité 1,1)	70,1	»	377
Solution d'hyposulfite de soude (densité 1,1248)	77,5	»	442,5

(1) Cette méthode doit donner des nombres un peu trop forts, car, outre la tension superficielle, la viscosité du liquide agit aussi pour empêcher le tube de tomber.

On entend par *viscosité* la difficulté qu'ont les molécules d'un corps à passer d'un état d'équilibre à un autre. La viscosité est maximum dans un solide dur et élastique et s'oppose à sa déformation; elle est moindre dans un corps mou comme le plomb et la cire; très notable encore dans les liquides dits *visqueux*, elle est très faible, mais pourtant pas tout à fait nulle, dans les liquides les plus mobiles comme l'alcool ou l'éther.

Pour en revenir à l'expérience dont nous venons de parler, il est clair que, si l'on introduisait entre le fil et le tube de la colle forte épaisse, on mesurerait plutôt la viscosité que la tension superficielle.

Il ne faudrait pas croire, du reste, que ce sont les liquides les plus visqueux qui ont la plus grande tension superficielle: l'huile est plus visqueuse que l'eau, et sa tension superficielle est beaucoup plus faible.

(2) Ce tableau est extrait de l'ouvrage de M. J. D. Everett. (*Units and physical constants*. London 1879).

7. VARIATION DE LA FORCE ÉLASTIQUE EN TRAVERSANT UNE SURFACE DE SÉPARATION COURBE. — FORMULE DE LAPLACE. — Si la surface de séparation d'un liquide et d'un autre fluide est plane, les tensions superficielles ne peuvent pas modifier la valeur des pressions hydrostatiques et, en passant d'un fluide à l'autre, il n'y a de ce fait [1] aucune brusque variation dans la valeur de la force élastique (pression hydrostatique par unité de surface). Mais il n'en est plus de même si, par une cause quelconque, la surface de séparation du liquide et de l'autre fluide est courbe. Dans ce cas, la surface de séparation, qui agit comme une membrane élastique tendue, comprime le fluide qui est situé du côté de sa partie concave, et, pour qu'il y ait équilibre, il faut que ce fluide possède une force élastique supérieure à celle qui existe du côté convexe de la surface de séparation. Ainsi, en passant du côté convexe au côté concave de la surface, il y a une brusque augmentation dans la valeur de la force élastique. C'est cette augmentation que nous allons calculer, en suivant la marche indiquée par M. A. Dupré.

Soit un point quelconque O de la surface libre d'un liquide (fig. 16); décrivons de ce point O pour centre avec un rayon infiniment petit r une sphère qui coupe la surface suivant une ligne MNPQ. L'équilibre existant, nous pouvons supposer que tous les points de la petite calotte OMNPQ soient invariablement

(1) Les forces normales à la surface du liquide et qui tendent à enfoncer les particules superficielles dans l'intérieur de la masse doivent donner lieu à un accroissement de force élastique, quand on passe de la surface à une couche située dans l'intérieur à une distance égale au rayon de sphère d'activité; à partir de cette couche la force élastique ne doit plus varier, au moins par suite des actions moléculaires.

Laplace faisait jouer, dans sa théorie, un grand rôle à cet accroissement de force élastique; il le considérait comme la somme d'un terme constant K et d'un terme proportionnel à la courbure de la surface, positif si elle est convexe, négatif si elle est concave, nul si elle est plane. C'est précisément ce terme variable dont nous tenons compte par la considération de la tension superficielle. Quant au terme constant K, il est impossible d'en démontrer l'existence expérimentalement; c'est dire qu'il s'élimine de lui-même dans tous les calculs qui aboutissent à un résultat vérifiable par l'expérience. Il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte, et la théorie de la tension superficielle, comme la théorie de Gauss, présente précisément l'avantage de conduire à des conséquences certainement exactes sans faire intervenir ce terme K.

liés entre eux sur l'épaisseur de la couche où s'exercent les tensions superficielles. Examinons maintenant les conditions d'équilibre de cette calotte sous l'action des pressions et des tensions superficielles et écrivons que la somme des projections de toutes les forces sur la normale OK à la surface en O est nulle.

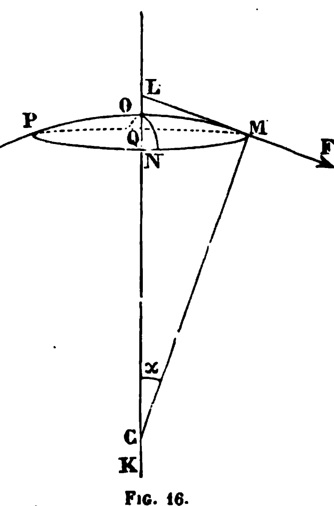


Fig. 16.

Menons par la normale OK un grand nombre pair $2n$ de plans équidistants, c'est-à-dire tels que les $4n$ angles dièdres formés par deux plans voisins soient égaux entre eux. Ces plans découpent la ligne MNPQ en $4n$ arcs, de longueur $\frac{\pi r}{2n}$, puisque, r étant infiniment petit, la longueur de ces arcs est la même que si la surface OMNPQ était plane, auquel cas chacun d'eux serait la $(4n)^{me}$ partie d'une circonférence égale à $2\pi r$.

La force telle que MF, qui tire chacun de ces arcs, est tangentielle à la surface et perpendiculaire à l'arc M sur lequel elle agit. En appelant, comme toujours, A la valeur de la tension superficielle, cette force est égale à $\frac{A\pi r}{2n}$.

Pour trouver l'angle que forme cette force avec OK, menons en M la normale à la courbe POM suivant laquelle le plan KOM rencontre la surface du liquide. Cette normale coupe OK en un point C. L'arc OM, étant infiniment petit, peut être considéré comme un arc de cercle dont CO et CM, normales à l'arc, sont deux rayons. Soit ρ la longueur de ces rayons, c'est-à-dire la valeur en O du rayon de courbure de la courbe POM, et soit α l'angle MCO; on a $OM = \rho\alpha$; et, comme OM, étant un arc infiniment petit, a même longueur r que sa corde, on a :

$$r = \rho\alpha \quad \text{d'où :} \quad \alpha = \frac{r}{\rho}$$

Or, la direction LMF de la force tangente à la surface fait avec la normale LOCK un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. On a donc pour la valeur de la projection de cette force sur OK :

$$\frac{A\pi r}{2n} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{A\pi r}{2n} \sin\alpha$$

et comme, l'angle α étant infiniment petit, son sinus peut être remplacé par l'arc, la valeur de cette projection devient :

$$\frac{A\pi r}{2n} \cdot \frac{r}{\rho} = A\frac{\pi r^2}{2n} \cdot \frac{1}{\rho}$$

Faisons remarquer que les deux plans qui limitent l'arc M limitent aussi un autre arc P diamétralement opposé au précédent; la force de tension appliquée en P a pour projection sur l'arc la même valeur $A\frac{\pi r^2}{2n} \cdot \frac{1}{\rho}$ que celle que nous venons de trouver; par conséquent, la somme des projections des deux tensions appliquées en M et en P est égale à $A\frac{\pi r^2}{n} \cdot \frac{1}{\rho}$.

Considérons maintenant les deux plans passant par OK et respectivement perpendiculaires à ceux qui limitent les arcs M et P; en appelant ρ' le rayon de courbure correspondant à la courbe QON découpée par l'un de ces plans (infiniment voisins) dans la surface libre du liquide, on a pour la somme des projections des tensions agissant sur les deux arcs N et Q qu'ils limitent $A\frac{\pi r^2}{n} \cdot \frac{1}{\rho'}$.

Ce qui fait que la projection sur OK des tensions agissant sur les quatre arcs M, N, P, Q, que nous venons de considérer et qui sont distants l'un de l'autre d'un cadran est égale à

$$A\frac{\pi r^2}{n}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$$

Or, en vertu du théorème de Meunier, la somme des inver-

ses des rayons de courbures $\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$ de deux sections rectangulaires menées par la normale OK à une surface est constante, quelle que soit la direction de ces plans (c'est la valeur de la courbure moyenne de la surface en O), et, en désignant par R et R' les rayons de courbùres principaux, c'est-à-dire la plus grande valeur de ρ et, par conséquent, la plus petite valeur de ρ', on a :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

d'où :

$$A\frac{\pi r^2}{n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

pour la somme des projections des quatre tensions. Comme il y a n groupes de quatre arcs semblables à ceux que nous venons de considérer, et que pour chacun de ces groupes nous avons la même expression, la somme des projections sur OK des tensions qui agissent sur tout le pourtour de la calotte O MNPQ s'obtient en multipliant par n la valenr précédente. Elle est donc égale à

$$A\pi r^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

D'autre part, la surface de la calotte infiniment petite est égale à πr^2. Si P est la force élastique du côté convexe de la surface, la pression qu'elle supporte de ce côté et qui se projette sur OK en vraie grandeur est $P\pi r^2$. Si $P + p$ est la force élastique du côté concave de la surface, la pression que la calotte supporte de ce côté est $(P + p)\pi r^2$, et sa projection sur OK est $-(P + p)\pi r^2$.

On a donc, puisque l'équilibre existe :

$$A\pi r^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + P\pi r^2 - (P + p)\pi r^2 = 0$$

d'où après réduction :

$$(1) \qquad p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

L'augmentation de force élastique en passant du côté convexe au côté concave de la surface de séparation d'un liquide et d'un autre fluide est égale au produit de la valeur de la tension superficielle par la courbure moyenne de la surface au point considéré.

Nous appellerons, pour abréger, *pression capillaire* ce accroissement de forco élastique p.

La formule (1) a été donnée pour la première fois par Laplace, vers 1806 et porte son nom (1).

8. **EXPÉRIENCES DE PLATEAU.** — Nous avons déjà parlé des expériences de Plateau qui consistent à mettre une masse d'huile en suspension dans un mélange d'eau et d'alcool de même densité.

Nous avons déjà dit que, si la masse d'huile est abandonnée à elle-même, elle prend la forme d'une sphère, figure de surface minimum pour un même volume.

Mais, en forçant la surface de la masse d'huile à passer par certaines lignes, on peut obtenir d'autres figures. Par exemple, on peut saisir une sphère d'huile avec un anneau en fil métallique, qui y adhère ; à l'aide d'une petite seringue en verre, on enlève une certaine quantité d'huile et l'on obtient une lentille (fig. 17).



Fig. 17.

Quelle que soit la forme de la masse d'huile, appelons P la force élastique de l'eau alcoolisée près d'un point M de la surface de séparation, et $P + p$ la force élastique de l'huile près de ce même point M. Si nous considérons un autre point N de la surface situé à une distance verticale z de M, près de ce point, la force élastique est pour l'eau alcoolisée $P + zd$ et pour l'huile $P + p + zd$, en désignant par d le poids spécifique absolu de l'eau alcoolisée et de l'huile de même densité. On voit qu'en M comme en N,

(1) LAPLACE. *Supplément de la Mécanique céleste.*

comme, par conséquent, en tout autre point de la surface de séparation, l'augmentation de force élastique en passant de l'eau alcoolisée à l'huile est égale à une même quantité p. Dès lors, en vertu de la formule de Laplace $p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, p et A étant constants pour tous les points de la surface de la masse d'huile, la courbure moyenne $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ doit être constante aussi. La surface appartient donc à la classe des surfaces à courbure moyenne constante; outre la sphère, il existe beaucoup d'autres surfaces satisfaisant à cette condition, le cylindre droit à base circulaire, le caténoïde (1), etc.

Les expériences de Plateau justifient pleinement cette conséquence de la formule de Laplace.

Une des plus remarquables est la suivante (2). On dispose au fond de la cuve contenant l'eau alcoolisée un anneau métallique porté par un trépied. Un second anneau de même diamètre est placé au-dessus. Avec une pipette, ou mieux avec une petite seringue, on introduit entre les deux anneaux une certaine quantité d'huile qui y adhère; en ajoutant de l'huile ou en en retirant on arrive à obtenir un cylindre droit entre les deux anneaux (3). Ce cylindre est alors terminé en haut et en bas par deux calottes sphériques de même rayon R (fig. 18). Si nous désignons par R' le rayon de courbure du cercle de base du cylindre, c'est un des rayons principaux; l'autre étant infini, la courbure moyenne en chaque point du cylindre est $\frac{1}{R'}$. En chaque point des calottes

(1) Le *Caténoïde* est une surface de révolution dont la section méridienne est une *chaînette* $\left[y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]$

(2) Plateau, *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. XXXI. — *Ann. de Phys. et Chim.* 3e Série t. LIII p. 26 (1858).

(3) Pour que l'équilibre de ce cylindre soit stable, il faut que le rapport de la hauteur du cylindre à son diamètre ne dépasse pas le nombre π. Au delà l'équilibre est instable, et on ne peut obtenir le cylindre.

sphériques la courbure moyenne est $\frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}$. Comme cette courbure doit être la même en tous les points de la surface de l'huile, on doit avoir :

$$\frac{1}{R'} = \frac{2}{R} \quad \text{ou} \quad R = 2R'$$

c'est ce que l'expérience vérifie.

En passant de l'eau dans l'huile il y a un accroissement de la force élastique égale à $\frac{2A}{R}$.

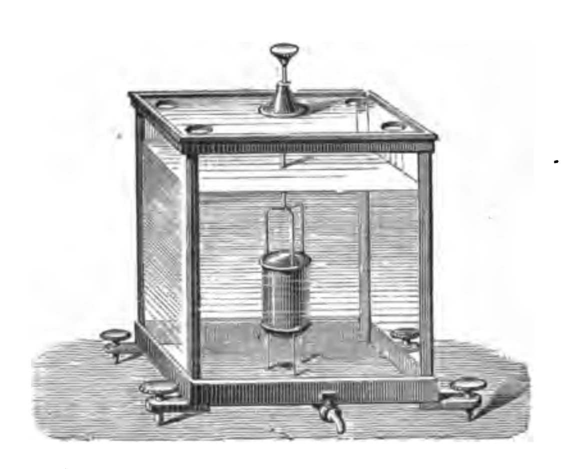


Fig. 18.

Si, maintenant on enlève, avec la seringue de verre, une certaine quantité d'huile, la surface comprise entre les anneaux se creuse. M. Plateau a désigné sous le nom d'*onduloïde* la figure de révolution qui se trouve alors entre les anneaux ; sa courbure moyenne étant moindre que celle du cylindre, les calottes sphériques qui servent de base sont devenues moins convexes.

En enlevant une quantité d'huile convenable, on arrive à rendre

ces bases complètement planes ; leur courbure moyenne étant nulle alors, il en est de même de celle de la surface de révolution comprise entre les anneaux. Cette forme limite de l'onduloïde est le *caténoïde* qui a pour section méridienne une chaînette (1). La force élastique est alors la même à l'intérieur et à l'extérieur de la masse d'huile à un même niveau.

Si l'on continue à enlever de l'huile, les bases sphériques deviennent concaves : leur courbure moyenne est négative. La surface comprise entre les anneaux s'est creusée davantage, elle a une courbure moyenne négative et elle porte le nom de *nodoïde*. La force élastique devient moindre maintenant en passant de l'eau alcoolisée à l'huile.

Les lames de liquide, telles que celle qui forme la paroi d'une bulle d'eau de savon, présentent deux faces parallèles très rapprochées ayant sensiblement même courbure. Aussi, en traversant la lame, on traverse deux surfaces libres tournant d'un même côté leur concavité et la variation de force élastique est le double de celle qu'on obtient en traversant l'une de ces surfaces.

Si une lame liquide sépare deux masses gazeuses, comme une bulle d'eau de savon qui contient de l'air à son intérieur, en traversant en un point quelconque la lame, il y a le même accroissement de force élastique ; par conséquent cette lame doit présenter en tous ses points la même courbure moyenne :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{constante}.$$

On doit donc obtenir avec ces lames les mêmes figures qu'avec l'huile en suspension dans l'eau alcoolisée.

Si la lame est fermée et n'est pas assujettie à toucher une paroi solide, comme une bulle d'eau de savon flottant dans l'air,

(1) La réalisation du caténoïde nécessite que la distance des deux anneaux n'excède pas les deux tiers de leur diamètre.

Au lieu d'enlever de l'huile, on peut passer du cylindre à ces diverses figures en écartant les deux anneaux.

elle doit affecter la forme d'une sphère, qui est la seule surface fermée ayant partout la même courbure moyenne (1).

Mais, en soufflant une bulle dans des carcasses en fils métalliques préalablement mouillés d'eau de savon, on peut obtenir d'autre surfaces à courbures constantes; avec deux anneaux superposés, comme ceux qui ont servi pour l'huile placée dans l'eau alcoolisée, on peut réaliser les mêmes surfaces que dans ce cas (calotte sphérique, cylindre, onduloïde, etc), la présence des arêtes métalliques permettant le raccord de surfaces différentes de même courbure.

Dans les figures laminaires dont nous avons parlé plus haut, et qu'on obtient en plongeant dans le liquide glycérique des carcasses en fils métalliques, les deux faces de la lame sont baignées par l'atmosphère. Puisqu'il n'y a pas de changement de force élastique en traversant ces lames, leur courbure moyenne doit être nulle $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0\right)$. Le plan satisfait à cette

(1) La force élastique à l'intérieur d'une bulle d'eau de savon de rayon R surpasse la force élastique extérieure de la quantité

$$p = \frac{4A}{R}$$

En formant à l'extrémité d'une pipe une bulle d'eau de savon on peut, en mettant le tuyau en communication avec un petit manomètre à eau, mesurer l'excès de force élastique p. C'est ce qu'a fait d'abord M. Henry en 1844 (communication à la *Société Américaine*) et ensuite Plateau. La connaissance de R et de p permet, d'après la formule ci-dessus, de calculer la valeur de la tension superficielle A. Plateau a trouvé ainsi pour le liquide glycérique qui lui servait à former ses bulles le même nombre que par la méthode décrite plus loin et qui est fondée sur l'ascension du liquide dans un tube capillaire.

Plateau a constaté aussi un point fort intéressant, c'est que la valeur de p ne change pas quand la bulle s'amincit, ce qui arrive quand on la conserve sous cloche pendant longtemps; elle est encore la même au moment où elle va éclater. Or, le phénomène des couleurs des lames minces fait voir que l'épaisseur de la bulle est alors environ de $\frac{1}{8\,500}$ de millimètre. Comme les tensions superficielles de l'une et l'autre face ne varient pas, même pour cette épaisseur très faible, il faut en conclure que le rayon de la sphère d'activité est inférieur à $\frac{1}{17\,000}$ de millimètre.

condition ; dans les exemples cités plus haut où la carcasse est un tétraèdre régulier ou un cube, les lames sont effectivement planes. Mais il y a des surfaces gauches qui jouissent aussi de la propriété d'avoir une courbure moyenne nulle en tous leurs points : l'une des courbures principales étant concave d'un côté, l'autre courbure principale concave de l'autre côté, et les deux rayons de courbure ayant la même valeur absolue.

M. Plateau a réalisé quelques-unes de ces surfaces laminaires. Ce sont là autant de confirmations de l'exactitude de la formule de Laplace.

9. ÉQUILIBRE DE TROIS FLUIDES AU CONTACT. — Supposons qu'une goutte d'eau soit déposée à la surface d'un bain de mercure; le pourtour de la surface de contact de l'eau et du mercure est une ligne commune aux trois fluides air, eau, mercure.

Quand trois fluides ont ainsi une ligne commune, les trois angles que forment entre elles les surfaces de séparation des fluides prises deux à deux sont déterminés, dans l'état d'équilibre, par la valeur des trois tensions superficielles.

Prenons comme plan de figure un plan normal à la ligne commune OX aux trois fluides, soit O sa trace (fig. 19), et soient OM, ON, OP les traces des surfaces de séparation des trois fluides 1, 2, 3.

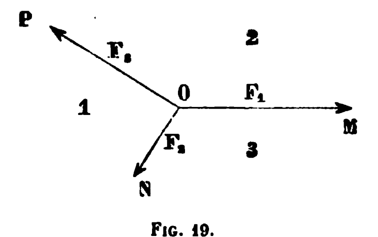


FIG. 19.

Une portion de longueur infiniment petite ε, prise en O sur la ligne OX, est soumise à l'action des trois tensions superficielles F_1, F_2, F_3 situées dans le plan de figure et dont les valeurs sont respectivement εA_1, εA_2, et εA_3. Si ces trois forces, appliquées en O, se font équilibre, on a, comme on le sait, la relation (Dynamique § 20, note 1) :

$$\frac{\sin NOP}{\varepsilon A_1} = \frac{\sin POM}{\varepsilon A_2} = \frac{\sin MON}{\varepsilon A_3}$$

Les sinus des angles de deux surfaces de séparation sont pro-

portionnels aux valeurs des tensions superficielles correspondant à la troisième surface, dans l'état d'équilibre.

On peut obtenir, par conséquent, la valeur de ces angles en construisant un triangle dont les trois côtés ont des longueurs proportionnelles aux valeurs des trois tensions superficielles A_1, A_2 et A_3. Pour que la construction de ce triangle soit possible, c'est-à-dire pour que l'équilibre soit possible, il faut qu'aucune des trois tensions superficielles ne soit supérieure à la somme des deux autres.

Par exemple, dans le cas de l'air, de l'huile d'olive et de l'eau, on a : $A_2 = 36,9$ (air et huile); $A_2 = 81$ (air et eau); $A_3 = 20,56$ (eau et huile). Comme on a $A_2 > A_1 + A_3$, l'équilibre est impossible; aussi, quand on vient à déposer une goutte d'huile à la surface de l'eau, celle-ci ne peut rester en équilibre et elle s'étale indéfiniment sur la surface de l'eau (1).

10. ANGLE DE RACCORDEMENT. — Au contact d'un fluide et d'un solide, il existe une tension superficielle comme au contact d'un fluide et d'un liquide, pour les mêmes raisons.

Fig. 20.

Considérons un solide 1 (fig. 20), baigné par un liquide 2 et par un autre fluide 3. Soit O la trace sur un plan normal de la ligne OX commune aux trois corps; soit NOP la trace de la surface solide et OM celle de la surface de séparation des deux fluides. Il existe aux trois surfaces de séparation OM, ON, OP, trois tensions superficielles; désignons par A_1, A_2, A_3 leurs valeurs respectives.

Ici le corps 1 étant solide et ne pouvant se déformer, comme

(1) Si a surface de l'eau est large et la goutte d'huile petite, celle-ci peut cesser de s'étaler avant d'avoir atteint les bords du vase. On conçoit, en effet, que la goutte puisse devenir assez mince pour que son épaisseur soit compa-

dans le cas précédent, les trois tensions superficielles peuvent avoir une résultante normale à la paroi solide NP; cette résultante est, dans l'état d'équilibre, détruite par l'adhérence du fluide au solide et par la résistance qu'oppose le solide à la déformation. Mais ces tensions superficielles ne peuvent avoir de résultante parallèle ou oblique à NP dans l'état d'équilibre, puisque rien ne s'opposerait au glissement des particules fluides de la ligne OX sur la paroi solide. Il faut donc que la somme de leurs projections sur NP soit nulle.

On appelle *angle de raccordement* l'angle MON que fait avec la surface solide ON la surface de séparation OM des deux fluides. En désignant par α sa valeur, on a donc la condition :

$$A_1 \cos\alpha + A_2 - A_3 = 0$$

ou

$$\cos\alpha = \frac{A_3 - A_2}{A_1} \qquad (1)$$

Si l'on a $1 > \frac{A_3 - A_2}{A_1} > -1$ l'équilibre est possible, car l'angle α est réel. Si, au contraire, la valeur absolue de la différence $A_3 - A_2$ est supérieure à A_1, l'équilibre est impossible ; dans ce cas, la ligne OX qui termine la surface OM glisse sur le solide jusqu'à son extrémité et la surface de séparation des deux fluides devient tangente à la surface solide. Si le fluide 3 est de l'air et le fluide 2 un liquide, c'est le liquide qui couvre toute la surface et l'on dit alors qu'il *mouille parfaitement* le solide. Tel est le cas, par exemple, de l'eau et du verre. Une goutte placée

rable au rayon de la sphère d'activité et pour que les lois précédentes se trouvent en défaut. Quand l'huile cesse de s'étaler, comme elle donne naissance au phénomène de coloration des lames minces, sa couleur permet, ainsi que nous le verrons en optique, d'obtenir son épaisseur et, par conséquent, d'obtenir une grandeur de même ordre que le rayon de la sphère d'activité. On trouve ainsi que ce rayon est de l'ordre des dix-millièmes de millimètre, comme dans l'expérience de Plateau rapportée plus haut.

sur du verre parfaitement propre s'y étale indéfiniment : l'eau mouille parfaitement le verre.

Il n'en est plus ainsi pour le mercure et le verre, il y a dans ce cas un angle de raccordement égal à 40° environ pour l'état d'équilibre ; aussi, une goutte de mercure déposée à la surface du verre ne s'étale pas, prend une forme presque sphérique si elle est petite, aplatie si elle est plus grosse, mais, dans tous les cas, la surface du mercure et celle du verre se raccordent sous l'angle de 40°.

La valeur de l'angle de raccordement ne dépend, d'après la formule (1), que des trois substances en présence.

On ne peut songer à vérifier expérimentalement l'exactitude de cette formule, car si l'on peut obtenir directement A_1, on ne saurait obtenir directement ni A_2 ni A_3 ni leur différence $A_3 - A_2$. Mais, au moyen de la formule (1) et de la valeur de l'angle de raccordement qui peut être mesuré, comme nous le verrons tout à l'heure, on peut en déduire $A_3 - A_2$.

Du reste, la valeur des tensions superficielles A_1, A_2, A_3, ne dépendant que de la nature des surfaces en contact et non de la nature des parties profondes, on conçoit que la moindre altération chimique des surfaces puisse complètement modifier ces valeurs et, par conséquent, la valeur de l'angle de raccordement. Par exemple, si la surface du verre est recouverte d'une couche de matière grasse, même tout à fait invisible, comme cela a toujours lieu si l'on n'a pas pris soin de nettoyer parfaitement le verre, l'eau ne mouille plus la surface graissée et une gouttelette de ce liquide peut être déposée sans s'étaler. Si le mercure est oxydé à sa surface il mouille le verre.

11. ÉQUATION DE LA SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE. — Il est clair que l'influence de la tension superficielle ne peut en rien fausser la loi trouvée en hydrostatique, *que tous les points d'un plan horizontal placés dans un même fluide en équilibre et tels qu'on puisse passer d'un point à l'autre sans sortir du fluide ont même force élastique* (même pression par unité de surface) et, plus généralement, que *deux points situés dans le même fluide de poids spécifique absolu d à une distance verticale h présentent une différence de force élastique hd*, au moins, si

aucun des deux points n'est situé assez près de la surface libre du liquide pour que sa distance à cette surface soit moindre que le rayon de la sphère d'activité.

Il n'y a qu'à reprendre les raisonnements faits pour démontrer ce théorème fondamental pour voir qu'ils ne sont en rien modifiés par l'existence de la tension superficielle.

Ce point établi, supposons que, par une cause quelconque, une portion de la surface libre d'un liquide soit courbe (fig. 21), tandis qu'il existe une portion plane et horizontale de la surface du même liquide; nous allons établir une relation entre la courbure en M et la distance y d'un point M de la surface libre au plan horizontal X'X auquel appartient la portion plane UX de la surface libre.

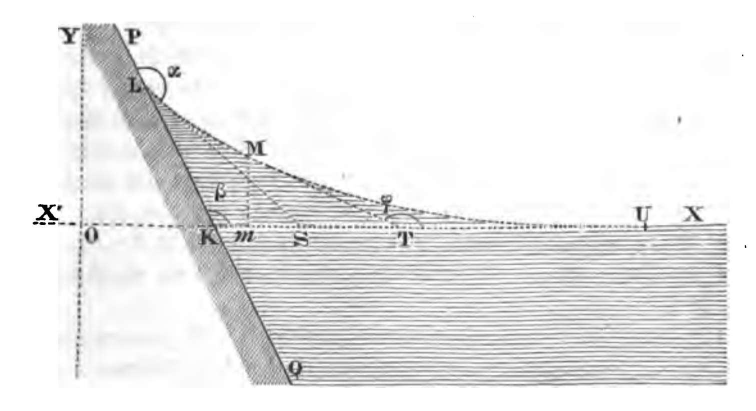


Fig. 21.

Soit P la force élastique de l'atmosphère qui surmonte le liquide. Comme en traversant la surface de séparation plane de deux fluides, il n'y a aucun changement brusque dans la valeur de la force élastique, P représente la force élastique de tous les points du liquide voisins de la surface UX et, par conséquent, P représente la force élastique en tous les points de la portion du plan horizontal X'X située dans le liquide. Supposons, pour fixer les idées, qu'en M la surface courbe tourne sa concavité du côté de l'atmosphère; en passant de l'atmosphère dans le liquide

en M, la force élastique éprouve une brusque diminution p et devient $P - p$. En un point m situé sur la verticale passant par M et dans le plan X'OX la force élastique est, par conséquent, $P - p + yD$, en désignant par D le poids spécifique absolu du liquide. Or en m la force élastique est égale à P, on a donc la relation :

$$P - p + yD = P$$

d'où :

$$y = \frac{p}{D} \tag{1}$$

Cette formule est générale, comme on peut le voir sans peine; elle s'applique que la surface libre tourne sa convexité vers l'extérieur ou sa concavité, à condition de considérer p comme positif, si, la surface libre tournant sa concavité vers l'atmosphère, il y a diminution de force élastique en passant dans le liquide, et de considérer p comme négatif si la surface tournant vers l'atmosphère sa convexité, il y a accroissement de force élastique en passant dans le liquide. Dans le premier cas, y est positif, la surface courbe s'élève au-dessus de X'X; dans le second cas, y est négatif, la surface courbe s'abaisse au-dessous de X'X.

Du reste, rappelons-nous qu'en appelant R et R' les rayons de courbure principaux en M la formule de Laplace donne :

$$p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

d'où :

$$y = \frac{A}{D}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \tag{2}$$

Avec les conventions de signe que nous venons de faire il faut considérer R et R' comme positifs, s'ils appartiennent à des courbes tournant leur concavité vers l'atmosphère, et comme négatifs dans le cas contraire.

Faisons remarquer, enfin, que y ne dépend pas de la force élastique de l'atmosphère. Quand, au lieu d'air, le vide existe au-dessus du liquide, la valeur de la tension superficielle A est peu changée et, par conséquent, y est à peu près le même. Dans le cas où le vide surmonte le liquide, la force élastique dans la partie soulevée au-dessus de X'X est *négative*, puisqu'elle est moindre que sur X'X où elle est nulle ; c'est à dire que dans cette partie le liquide est dans un état de tension, ses particules tendant à se rapprocher et non à s'écarter comme dans les circonstances les plus ordinaires (1).

Nous allons faire plusieurs applications de cette formule importante, qui représente l'équation de la surface libre du liquide.

12. FORME DE LA SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE QUI BAIGNE UNE PAROI PLANE. — Commençons par le cas simple où la paroi est plane et éloignée de toute autre paroi.

En vertu des lois de l'hydrostatique, la surface libre du liquide loin de la paroi est un plan horizontal; mais dans le voisinage de celle-ci la surface se recourbe pour la joindre sous l'angle de raccordement α. Du reste, comme la paroi est plane, cette surface courbe est cylindrique et ses génératrices sont horizontales. Un des rayons de courbure étant infini, la formule (2) du paragraphe précédent se réduit à

$$y=\frac{A}{D}\cdot\frac{1}{R} \tag{1}$$

et le rayon de courbure R est celui de la ligne d'intersection de ce cylindre et d'un plan perpendiculaire aux génératrices.

(1) Il est clair que dans ce que nous venons de dire, nous ne tenons pas compte du terme constant K de Laplace (voir page 174, note 1). Nous le répétons, l'influence de ce terme ne se faisant sentir sur aucun phénomène, nous le négligerons toujours.

Choisissons l'un de ces plans pour plan de figure; soit PQ (fig. 22) la section de la paroi; soit X'OX la trace du plan horizontal formant la surface libre du liquide loin de la paroi. Prenons cette droite OX comme axe des abscisses et prenons un axe des ordonnées OY perpendiculaire à X'OX; l'égalité (1) représente l'équation de la section de la surface libre.

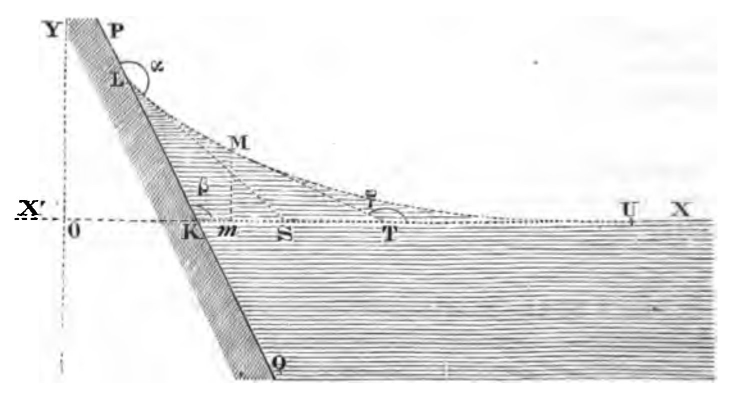


Fig. 22.

Le rayon de courbure R est variable avec x; en désignant par y'_x et y''_x la dérivée première et la dérivée seconde de y par rapport à x, on a, comme on le sait, la relation

$$\frac{1}{R} = \frac{y''_x}{\left(1 + y'^2_x\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

et, en remplaçant cette valeur dans (1), il vient

$$y = \frac{A}{D} \frac{y''_x}{\left(1 + y'^2_x\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

A et D étant des constantes. Telle est l'équation différentielle de la courbe. Pour la mettre sous forme finie, multiplions les deux

membres par $2y'_x$ et égalons les fonctions primitives de ces deux membres, il vient, en désignant par C une constante :

$$(4)\qquad y^2 = C - \frac{A}{D}\frac{2}{\sqrt{1+y_x'^2}}$$

Menons la tangente MT à la courbe en un point M; soit φ l'angle que forme cette tangente avec la direction positive de OX. On sait qu'on a $\text{tang}\,\varphi = y'_x$ d'où : $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+y_x'^2}}$. En substituant dans la formule, il vient :

$$(5)\qquad y^2 = C + \frac{2A}{D}\cos\varphi$$

Cette forme va nous être commode pour introduire l'angle de raccordement. Déterminons d'abord la valeur de C; pour cela considérons le point M assez loin de la paroi pour se trouver dans la région plane de la surface de séparation; on a alors $y=0$ et $\cos\varphi = -1$; d'où :

$$0 = C - \frac{2A}{D} \quad \text{ou} \quad C = \frac{2A}{D}$$

en remplaçant C par sa valeur dans (5), il vient :

$$(6)\qquad y^2 = \frac{2A}{D}(1+\cos\varphi)$$

Appliquons maintenant cette formule générale pour avoir l'ordonnée e du point L où la surface liquide touche la paroi. Si nous appelons β l'angle PKX que forme la paroi avec un plan horizontal et α la valeur de l'angle de raccordement PLS (LS étant la tengente à la courbe en L), on a, dans ce cas, pour la valeur particulière LSX de l'angle φ :

$$\varphi = \beta + \pi - \alpha \quad \text{et, par conséquent :} \quad \cos\varphi = -\cos(\beta - \alpha)$$

d'où :

$$(7) \qquad e^2 = \frac{2A}{D}\left[1 - \cos(\beta - \alpha)\right]$$

ou encore :

$$(8) \qquad e = \pm\sqrt{\frac{2A}{D}\left[1 - \cos(\beta - \alpha)\right]}$$

Le signe + convient si, comme nous l'avons supposé, la concavité de la surface est tournée vers le haut, c'est-à-dire quand on a $\beta < \alpha$. Si la convexité avait été tournée vers le bas, c'est-à-dire si $\beta > \alpha$ (fig. 23), nous aurions été conduit à la même formule, seulement le radical aurait dû être pris avec le signe —.

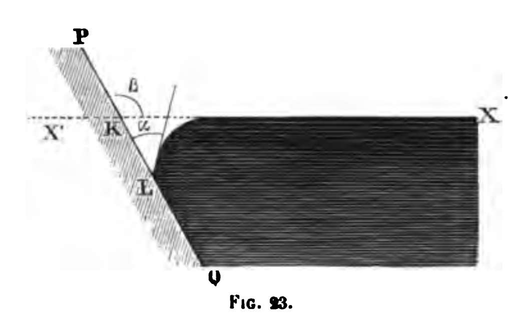


Fig. 23.

Nous allons examiner quelques cas particuliers où cette formule s'applique, pour arriver aux vérifications expérimentales.

1° La paroi est verticale. — Dans ce cas $\beta = \frac{\pi}{2}$ et la formule (8) donne :

$$(9) \qquad e_1 = \pm\sqrt{\frac{2A}{D}\left(1 - \sin\alpha\right)}$$

Le signe + devant se prendre si $\alpha > \frac{\pi}{2}$ le signe — dans le cas où $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (fig. 24).

Si le liquide mouille parfaitement la paroi, il s'étend jusqu'au

haut de la lame; mais la tangente à la courbe qui forme la surface libre du liquide devient verticale pour une hauteur finie que nous obtiendrons en faisant $\alpha = \pi$ dans la formule ci-dessus (fig. 25) :

$$(10) \qquad e_1 = \sqrt{\frac{2A}{D}} \text{ (1)}$$

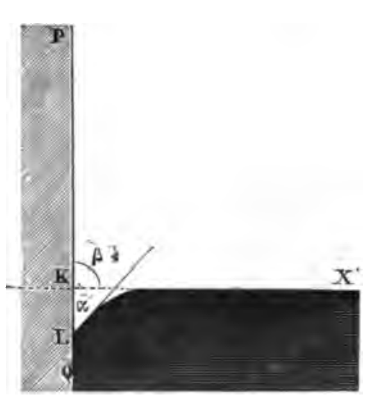


FIG. 24.

Au-dessus du point L d'ordonnée e_1 le liquide forme contre la paroi solide une couche extrêmement mince, d'épaisseur uniforme. En appelant l la largeur de la lame dans le sens horizontal, la tension superficielle de cette lame liquide verticale est Al; elle fait équilibre au poids du liquide LKR soulevé au-dessus de KX. Tel est le cas de l'eau et d'une lame de verre.

(1) Calculons le poids du liquide soulevé au-dessus de KX. Soit l la largeur de la lame comptée parallèlement aux génératrices de la surface cylindrique; on a pour ce poids P :

$$P = Dl \int_0^\infty y dx$$

et, d'après la formule (3) :

$$P = Al \int_0^\infty \frac{dy'_x}{\left(1 + y'^2_x\right)^{\frac{3}{2}}} = Al \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = Al \left[\sin\varphi\right]_\pi^{\frac{\pi}{2}} = Al$$

Le poids du liquide soulevé est égal à la tension superficielle Al. Ce n'est là qu'une vérification de l'exactitude de nos calculs, puisque ce résultat était évident *a priori* comme nous le montrons dans le texte.

2° La paroi est horizontale. — Si la paroi est horizontale, on a $\beta = 0$ ou $\beta = \pi$; nous examinerons seulement ce second cas (fig. 26), pour lequel la formule (8) devient :

$$(11) \qquad e_2 = -\sqrt{\frac{2A}{D}\left(1 + \cos\alpha\right)}$$

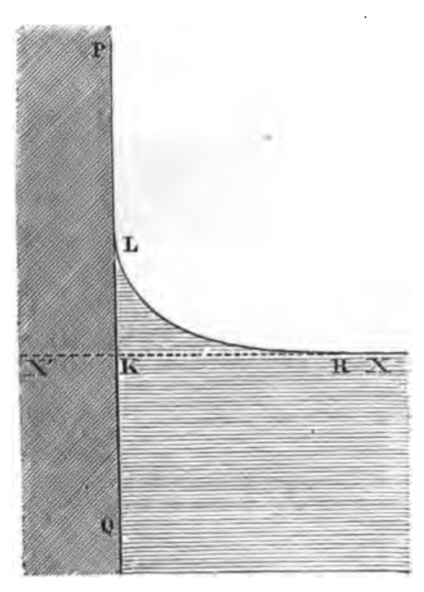


Fig. 25.

Supposons une large goutte de mercure posée sur un plan horizontal en verre; cette goutte est plane, excepté sur ses bords, et la circonférence du pourtour de la goutte ayant un rayon très grand vis-à-vis du rayon de courbure d'une section verticale du bord, on peut négliger l'inverse du grand rayon de courbure vis-à-vis de l'inverse du petit, ce qui revient à supposer le pourtour de la goutte cylindrique. La formule (11) s'applique à ce cas (fig. 26), et dans cette formule $-e_2$ représente l'épaisseur de la goutte. Si le rayon de la goutte n'est pas très grand, s'il est inférieur par exemple à un centimètre, on peut en tenir compte par des formules approchées dues à Laplace et dont M. Desains a vérifié l'exactitude (1).

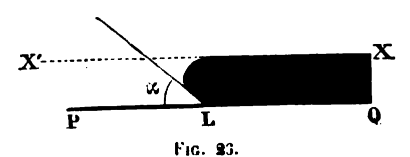


Fig. 26.

(1) Desains, *Ann. de Phys. et de Chim.* 3e série, t. LI (1857).

13. APPLICATION DES FORMULES PRÉCÉDENTES A LA MESURE DE L'ANGLE DE RACCORDEMENT ET DE LA VALEUR DE LA TENSION SUPERFICIELLE DU MERCURE. — En mesurant la dépression $-e_1$ que subit le mercure au contact d'une lame de verre verticale (fig. 24), et en mesurant l'épaisseur $-e_2$ d'une large goutte de mercure placée sur une plaque de verre horizontale (fig. 26), les formules (9) et (11) du paragraphe précédent permettent de calculer la valeur de l'angle de raccordement α et la valeur de la tension superficielle A.

On a, en effet :

$$e_1^2 = \frac{2A}{D}\left(1 - \sin\alpha\right)$$

$$e_2^2 = \frac{2A}{D}\left(1 + \cos\alpha\right)$$

Voici les résultats qui ont été obtenus pour le mercure et le verre (1), d'après les observations de

	Gay-Lussac	Danger	M. Ed. Desains
A	435,2	447,7	453,2
α	45° 30′	37° 52′ 33″	41° 36′ 30″

Il n'est pas surprenant de ne pas trouver un parfait accord entre les nombres déduits des observations de ces trois expérimentateurs. Comme nous l'avons déjà dit, la moindre altération superficielle du mercure peut modifier la valeur de A et de α. En outre, la nature du verre et surtout le plus ou moins de netteté de sa surface influent sur la valeur de α.

14. ASCENSION OU DÉPRESSION D'UN LIQUIDE ENTRE DEUX LAMES. — Nous venons de voir que dans le voisinage d'une lame plane, et jusqu'à une certaine distance que nous désignerons par a, la surface libre d'un liquide n'était plus un plan horizontal. Si deux

(1) DESAINS, *loc. cit.*

sa valeur. Si les lames sont très rapprochées, nous pouvons donc considérer R comme constant pour tous les points de la surface libre, c'est-à-dire considérer la surface comme une portion de cylindre à base circulaire. Il est facile alors de trouver une relation entre le rayon de courbure R, la distance d des lames et l'angle de raccordement α. Menons aux points de raccordement A et B (fig. 30) les tangentes AO et BO à l'arc du cercle; menons du centre C de ce cercle les rayons CA et CB de longueur R; enfin, menons la corde AB de longueur d. On a :

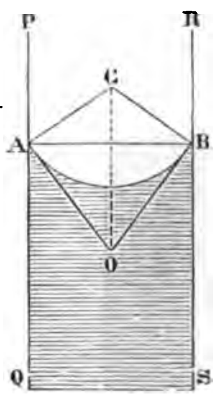


FIG. 30.

$$d = 2R \cos CAB$$

Et comme BA et CA sont respectivement perpendiculaires à la paroi PQ et à la tangente AO, on a :

$$CAB = \pi - PAO = \pi - \alpha$$

d'où :

$$(2) \qquad d = -2R \cos \alpha \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} = -\frac{2 \cos \alpha}{d}$$

Cette relation est générale, que le ménisque soit concave ou convexe; dans ce dernier cas, R est négatif et $\cos \alpha$ positif, ce qui donne bien encore une valeur positive pour d.

En remplaçant dans la formule (1), il vient :

$$(3) \qquad y = -\frac{2A \cos \alpha}{Dd}$$

On peut arriver plus directement à établir cette formule et même à établir une formule tout à fait rigoureuse. Considérons, par exemple, le cas où le liquide s'élève entre des lames paral-

lèles verticales. La pression sur la partie MN du plan horizontal XX' (fig. 31), comprise entre les lames, est la même que si cette partie MN formait la surface libre du liquide, la colonne ABMN n'existant pas. Il faut donc que le poids de cette colonne soit équilibré par les forces capillaires. Or, le poids de la colonne ABMN est égal à $y_1 l d D + p$, en désignant par l la longueur de la ligne horizontale suivant laquelle le liquide touche chaque lame,

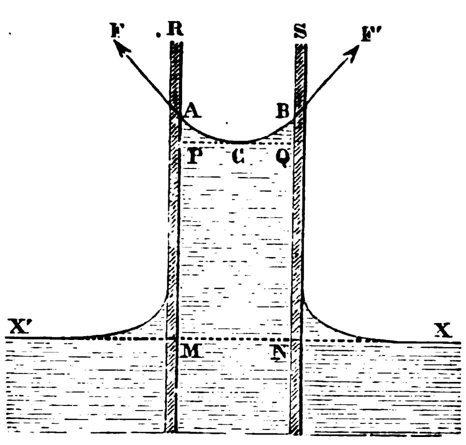


Fig. 31.

par y_1 la hauteur au-dessus de X'X du point C le plus bas du ménisque et par p le poids du ménisque lui-même, c'est-à-dire de tout le liquide qui se trouve au-dessus du plan horizontal PCQ tangent à la base du ménisque. D'autre part, nous pouvons considérer les forces capillaires comme provenant de l'action attractive produite par la ligne liquide de la surface libre qui est adhérente à la paroi en A ou en B sur une ligne liquide parallèle et infiniment voisine située aussi sur la surface libre. Entre ces deux lignes s'exerce une tension superficielle égale à Al; cette force AF (ou BF') fait avec la verticale AR un angle égal au supplément de l'angle de raccordement α. Les composantes verticales des deux forces AF et BF' sont donc égales chacune à $-Al\cos\alpha$, et, comme la somme de ces deux composantes doit faire équilibre au poids de la colonne soulevée, on a :

$$-2Al\cos\alpha = y_1 l d D + p$$

d'où :

$$y_1 = -\frac{2A\cos\alpha}{Dd} - \frac{p}{Ddl} \qquad (4)$$

Des considérations analogues conduiraient encore à la formule (4), dans le cas de la dépression du liquide entre les lames; dans ce cas, p est une quantité négative dont la valeur absolue est le poids du volume de liquide qui remplirait l'espace PCAQCB (fig. 32) compris entre le ménisque, le plan tangent au sommet de celui-ci et les parois.

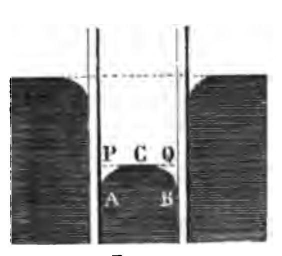
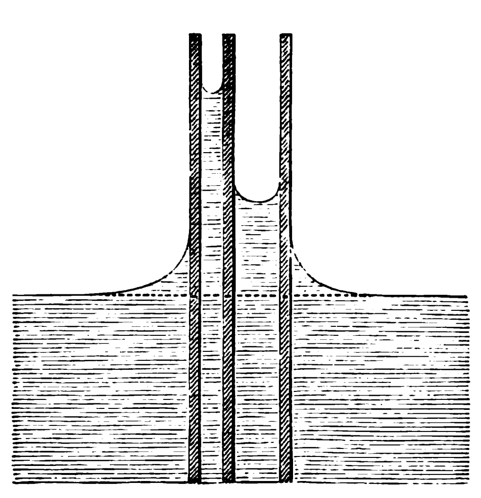


Fig. 32.

Si, dans cette formule rigoureuse, on considère comme négligeable le poids p du ménisque, on retombe sur la formule (3).

On voit que, si, dans la formule (3) l'angle de raccordement α est obtus, y est positif : il y a ascension du liquide entre les lames; si α est aigu, y est négatif : il y a dépression du liquide entre les lames.


Fig. 33.

La formule (3) montre que la quantité y dont s'élève ou s'abaisse un même liquide entre deux lames parallèles de même nature (pour que α soit le même), *varie en raison inverse de la distance des lames*, dès que celles-ci sont suffisamment rapprochées pour que la formule (3) soit applicable (fig. 33) (1).

(1) Supposons que les deux lames soient verticales, mais non parallèles, qu'elles se rencontrent suivant une droite, verticale nécessairement, et qu'elles fassent entre elles un très petit angle ω (fig. 34). Soit POR (fig. 35) la section de cet angle par le plan horizontal

Dans le cas où le liquide mouille les lames, α est égal à π et la formule (3) devient :

$$(5) \qquad y = \frac{2A}{Dd}$$

qui forme la surface libre du liquide dans la cuve loin des lames. Menons la bissectrice OX de cet angle; en un point M de cette bissectrice, situé à une distance $OM = x$ du sommet O de l'angle, menons une perpendiculaire AB à la bissectrice ; appelons d la longueur de cette ligne AB,
On a la relation :

$$d = 2x \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

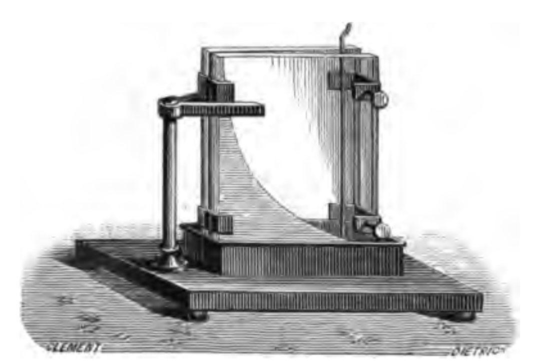


Fig. 34.

Or, on peut admettre, sans grande erreur, qu'en chaque point M la hauteur y du liquide contenu entre les lames est la même que la hauteur du même liquide entre deux lames parallèles situées à la même distance $AB = d$; cette hauteur étant donnée par la formule (3), si nous remplaçons dans celle-ci d par la valeur que nous venons de trouver, on a :

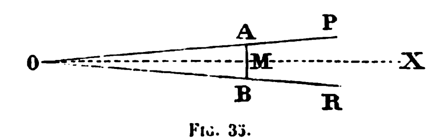


Fig. 35.

$$y = -\frac{2A \cos\alpha}{D \times 2x \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}}$$

d'où :

$$xy = -\frac{A \cos\alpha}{D \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}} = \text{constante}$$

Cette formule représente l'équation de l'intersection de la surface libre du liquide contenu entre les lames par le plan bissecteur du dièdre formé par

15. ASCENSION OU DÉPRESSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CAPILLAIRES. — Pour la même raison que dans le cas des lames, la surface terminale d'un liquide dans un tube de faible diamètre doit être courbe, excepté pour le cas tout particulier où l'angle de raccordement serait droit. Si l'angle de raccordement est obtus, le ménisque est concave, s'il est aigu le ménisque est convexe. Dans le premier cas, le liquide doit s'élever dans le tube à une certaine hauteur au-dessus du niveau XX' (fig. 36) de la cuve où est plongée son extrémité

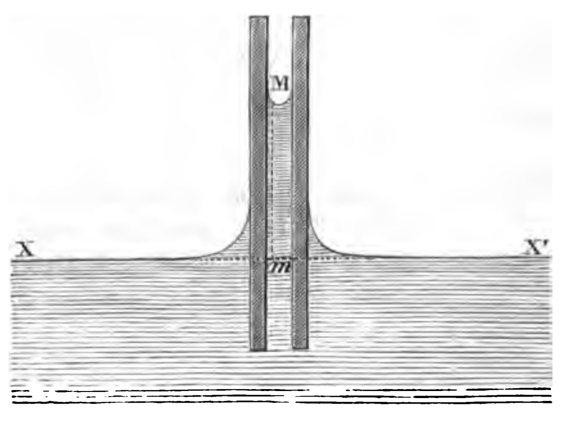


FIG. 36.

inférieure; dans le second cas, il doit s'abaisser (fig. 37). Soit, comme plus haut, y la distance au plan X'X d'un point de la surface libre; l'équation de cette surface (form. 2 § 11) est :

$$y = \frac{A}{D}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

Cette égalité montre que la hauteur y du liquide ne dépend

ces lames, en prenant pour axe des abscisses la ligne OX, et pour axe des ordonnées la ligne d'intersection OY des deux lames verticales. On reconnait l'équation d'une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes de coordonnées OX et OY. Tel est en effet, le résultat que donne l'expérience (fig. 34).

que des propriétés du tube à l'endroit où s'arrête le liquide; car, la valeur de l'angle de raccordement ne dépendant que de la nature du tube à la surface terminale, R et R' ne dépendent que de la nature, de la forme et des dimensions du tube à l'endroit où s'arrête le liquide et non ailleurs. C'est ainsi, en particulier, que y est indépendant de la forme du tube au-dessus ou au-dessous de l'endroit où s'arrête le liquide : dans un tube évasé et dans un tube cylindrique ayant mêmes diamètres à l'endroit où s'arrête le liquide, celui-ci s'élève aussi haut (fig. 38).

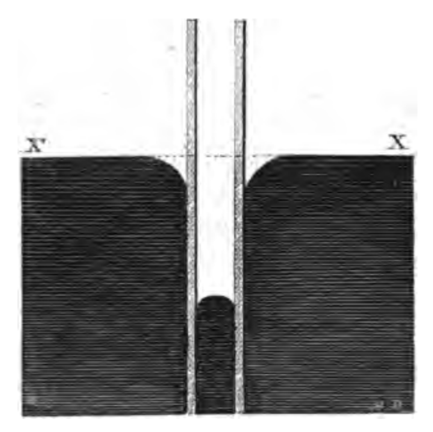
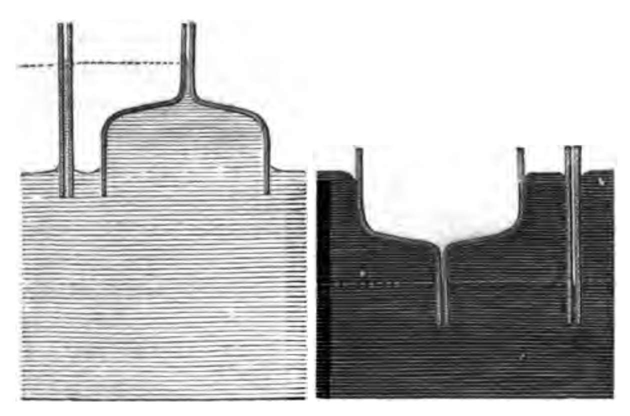


Fig. 37.

Si le tube est un cylindre à section circulaire, ce qui est


Fig. 38.

la forme la plus commune, la surface terminale est de révolution autour de l'axe du cylindre, et le point du ménisque si-

tué sur l'axe a ses deux rayons de courbures principaux égaux entre eux ; soit R_1 leur valeur, et y_1, l'ordonné de ce point ; on a :

$$(1) \qquad y_1 = \frac{A}{D} \cdot \frac{2}{R_1}$$

Pour les autres points, les deux rayons de courbures diffèrent entre eux; mais, si le diamètre du tube est suffisamment petit, R étant petit aussi, y est grand, et les variations de y pour les divers points du ménisque sont une très faible fraction de sa valeur; il en résulte que la variation de la courbure moyenne $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ est une faible fraction de sa valeur.

On peut alors négliger cette variation, c'est-à-dire considérer ce ménisque comme une portion de sphère, qui est la seule surface de révolution rencontrant l'axe ayant partout la même courbure moyenne; en appelant alors R_1 le rayon de cette sphère, la formule (1) donne la hauteur à laquelle le liquide s'élève ou dont il s'abaisse, suivant que R_1 est positif (ménisque concave) ou négatif (ménisque convexe).

Remplaçons le rayon de courbure de cette sphère par sa valeur en fonction de l'angle de raccordement α et du diamètre d du tube. Le raisonnement fait dans le cas des lames § 14 nous conduit évidemment à la même valeur de R_1

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{2 \cos \alpha}{d}$$

et, en substituant dans la formule (1) cette valeur, il vient :

$$(2) \qquad y_1 = -\frac{4A \cos \alpha}{Dd}$$

Comme dans le cas des lames parallèles, il est facile d'établir plus directement cette formule et même de trouver une formule tout à fait rigoureuse. Puisque la hauteur du liquide soulevé ne dépend que des propriétés du tube à l'endroit où s'arrête le liquide,

nous ne diminuerons en rien la généralité en considérant le cas où ce tube est vertical, et a partout la même section. En refaisant alors exactement le même raisonnement que dans le cas des lames, c'est-à-dire en écrivant que le poids de la colonne soulevée est égal à la somme des composantes verticales des tensions superficielles agissant sur le bord du ménisque, on obtient la relation :

$$-\mathrm{A}\pi d \cos\alpha = \frac{\pi d^2 y_1 \mathrm{D}}{4} + p$$

d'où :

$$(3) \qquad y_1 = -\frac{4\mathrm{A}\cos\alpha}{\mathrm{D}d} - \frac{4p}{\mathrm{D}\pi d^2}$$

Dans cette formule p représente : 1° si le ménisque est concave, une quantité positive égale au poids de la partie du liquide qui se trouve au-dessus du plan tangent à la base du ménisque; 2° si le ménisque est convexe, une quantité négative dont la valeur absolue est égale au poids du volume de liquide qui remplirait l'espace PCAQCB (fig. 39), compris entre le ménisque, le plan tangent au sommet de celui-ci et les parois du tube.

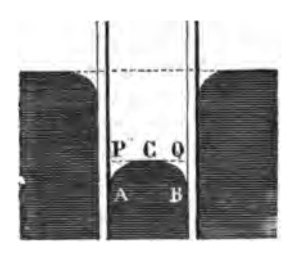


Fig. 39.

Si, dans cette formule rigoureuse, on considère p comme négligeable, on retombe sur la formule (2). Cette formule (2), applicable seulement dans le cas de tubes très étroits, montre que si α est obtus, y_1 est positif : il y a ascension du liquide (fig. 36) ; que si α est aigu, y_1 est négatif : il y a dépression (fig. 37). En outre, elle fait voir que :

Les hauteurs dont s'élève un même liquide à une même température dans un tube de même nature au-dessus de son niveau dans la cuve, ou les hauteurs dont il s'abaisse au-dessous de ce niveau, varient en raison inverse du diamètre du tube.

Cette loi, énoncée pour la première fois par Borelli (1), en 1670, puis par Newton, en 1704, a été étudiée par un grand nombre de physiciens, en particulier vers 1718, par Jurin (2) dont elle porte le nom (*Loi de Jurin*).

Si nous comparons maintenant la formule (2) avec la formule (3) du paragraphe 14, qui donne la hauteur à laquelle s'élève un liquide entre deux lames parallèles, nous voyons que :

Dans un tube cylindrique, la hauteur à laquelle s'élève un liquide au-dessus du niveau dans la cuve, ou dont il s'abaisse au dessous, est le double de celle qui correspond au cas de deux lames parallèles ayant pour distance le diamètre du tube.

Cette loi, trouvée expérimentalement par Newton (1704), a été énoncée par Laplace (1807) comme conséquence de sa théorie de la Capillarité ; elle porte habituellement son nom (*Loi de Laplace*).

16. VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES. — La mesure de la hauteur à laquelle s'élève un liquide, soit dans un tube capillaire, soit entre deux lames parallèles très rapprochées, fournit un des moyens les plus simples pour contrôler par l'expérience les lois de la Capillarité. Aussi, beaucoup de physiciens se sont-ils occupés de ces mesures. Nous n'indiquerons que les meilleurs travaux qui ont été faits à ce sujet, en commençant par ceux que Gay-Lussac a entrepris, sur la demande de Laplace.

Gay-Lussac a choisi des tubes aussi cylindriques que possible. Pour en obtenir le diamètre, il y introduisait un index de mercure, mesurait la longueur l de celui-ci, déterminait sa masse p par la balance et, de la formule $p = \pi r^2 l d$, où d est la densité du mercure, il déduisait le rayon r du tube.

Les tubes étaient bien lavés à l'acide sulfurique, à l'eau distillée, puis enfin avec le liquide étudié. Ces tubes étaient ensuite

(1) Jean-Alphonse Borelli, physiologiste et physicien, né à Naples en 1608 mort en 1672.

(2) Jacques Jurin, médecin et mathématicien anglais, mourut à Londres en 1750 à un âge avancé. Son travail sur la Capillarité a paru en 1718 dans les *Philosophical Transactions*.

fixés perpendiculairement à une règle de cuivre (fig. 40), que l'on plaçait sur les bords bien dressés d'un vase de verre contenant le liquide. Ce vase était porté par un trépied à vis calantes, ce qui permettait de mettre ses bords dans un plan horizontal, et, par conséquent, de rendre vertical l'axe des tubes.

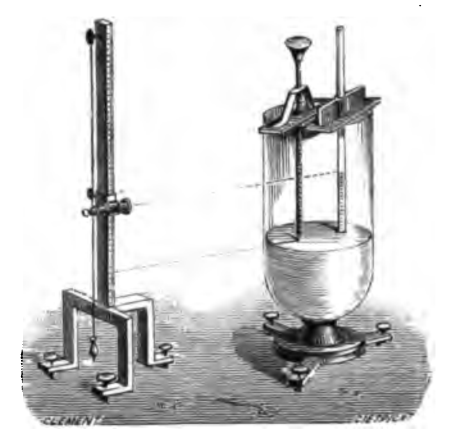


FIG. 40.

Pour faire l'expérience, on commençait par aspirer le liquide jusqu'au haut du tube pour le mouiller dans toute sa longueur; il se formait ainsi à l'intérieur du tube une gaine liquide au milieu de laquelle s'élevait le liquide lui-même; dans ces conditions on était assuré d'avoir un angle de raccordement égal à 180° (1).

S'il était facile de viser directement la base du ménisque, il

(1) Il est si difficile de bien nettoyer la surface du verre qu'on ne sait trop encore aujourd'hui si le verre propre est mouillé parfaitement par l'eau, l'alcool, etc., c'est-à-dire si ces liquides s'élèvent d'eux-mêmes le long des parois d'un tube ou d'une plaque de verre jusqu'à son extrémité. Par le fait, le verre le mieux nettoyé puis séché et trempé dans un de ces liquides ne se comporte pas ainsi : l'angle de raccordement n'est pas de 180° et a une valeur très variable. Il en résulte que la hauteur du liquide soulevé dans le tube, qui dépend non seulement de la tension superficielle, mais encore de la valeur de l'angle de raccordement, est variable et toujours moindre que quand on a pris la précaution de mouiller par aspiration toute la hauteur du tube. Ceci explique le désaccord qu'on trouve entre les nombres donnés par les physiciens qui n'ont pas pris cette précaution. Ainsi Haüy et Tremery qui, sur la demande de Laplace, avaient avant Gay-Lussac fait des expériences sur des tubes capillaires, sans les mouiller dans toute leur hauteur, ont trouvé pour l'ascension de l'eau dans un tube de 1 millimètre de diamètre un nombre qui est moins de la moitié de celui trouvé par Gay-Lussac (1^{c},350 au lieu de 3^{c},026).

n'en était pas de même du liquide contenu dans la cuvette; aussi Gay-Lussac s'est-il servi de l'artifice, bien souvent employé depuis, d'une vis terminée par une pointe qu'il faisait affleurer au liquide de la cuve. Avec la lunette d'une sorte de cathétomètre primitif, il visait la partie inférieure du ménisque dans le tube; cette opération faite, il enlevait un peu du liquide de la cuve pour pouvoir viser facilement l'extrémité inférieure de la pointe; le déplacement du zéro du vernier donnait le déplacement vertical de la lunette, et, par conséquent, la hauteur y_1 de la base du ménisque au niveau du liquide dans la cuve.

Pour tenir compte du terme p, de la formule (3) du paragraphe précédent, Laplace, dans le calcul des observations de Gay-Lussac, considérait le ménisque comme une calotte sphérique : en outre, comme l'angle de raccordement était de 180° la calotte sphérique était ici une hémisphère. D'après cette hypothèse, le volume du ménisque est la différence entre le volume d'un cylindre de hauteur et de rayon égal au rayon r du tube, soit πr^3, et le volume d'une hémisphère de rayon r, soit $\frac{2\pi r^3}{3}$; cette différence étant $\frac{\pi r^3}{3}$, le poids p est donné par

$$p = \frac{\pi r^3}{3} D$$

et la formule (3) devient, puisque $\alpha = \pi$ et $d = 2r$:

$$y_1 + \frac{r}{3} = \frac{2A}{Dr} \qquad (1)$$

Ce mode d'évaluation du terme correctif p est parfaitement suffisant pour tes tubes de 1 à 2 millimètres de diamètre dont se servait Gay-Lussac ; mais il serait insuffisant pour des tubes plus larges.

Si la loi est exacte, le produit $\left(y_1 + \frac{r}{3}\right)r$, qui est égal à $\frac{2A}{D}$ d'après la formule (1), doit être constant pour un même

liquide ; c'est ce que montre la quatrième colonne du tableau suivant qui donne le résultat des observations de Gay-Lussac.

	Rayon intérieur des tubes en cent. (r)	Élévation du point le plus bas du ménisque en cent. (y_1)	Valeur de $y_1 + \frac{r}{3}$	Valeur de $\left(y_1 + \frac{r}{3}\right)r$
Eau à 8°,5.	0c,06472	2c,31634	2c,33791	0,15131
	0c,09519	1c,55861	1c,59034	0,15139
Alcool à 8° (de poids spécifique relatif à l'eau à 8° 0,81961).	0c,06472	0c,918235	0c,939808	0,060824
	0c,09519	0c,608397	0c,640127	0,060933

Gay-Lussac a mesuré aussi l'ascension de l'eau entre deux lames de verre parallèles et verticales ; il a trouvé pour deux lames distantes de 0c, 1069 une hauteur de 1c,3374 pour le point le plus bas du ménisque. En faisant subir à ce nombre une correction analogue à la correction $\frac{r}{3}$ relative au tube pour tenir compte du poids du ménisque (correction additive égale à $\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right)d = 0,107d$), on trouve 1c,3689 pour la hauteur corrigée. Or, le produit $0,1069 \times 1,3689 = 0,14633$, doit, d'après la formule de Laplace, être égal à $\frac{2A}{D}$ comme les nombres inscrits dans la quatrième colonne du tableau précédent. On voit qu'il n'en diffère que d'une quantité assez faible, qui rentre dans les erreurs d'expérience ; ce qui vérifie la loi de Laplace.

Les expériences de Gay-Lussac étant peu nombreuses et quelques doutes s'étant élevés sur l'exactitude parfaite des lois de la Capillarité, M. Desains (1) a repris la mesure de la hauteur du liquide dans les tubes capillaires.

(1) Ed. Desains *loc. cit.*

Pour mesurer le diamètre des tubes, il employait, comme Gay-Lussac, des pesées au mercure dans le cas des tubes étroits, en ayant soin toutefois de tenir compte des ménisques terminant l'index. Pour les tubes plus larges, il employait l'eau au lieu de mercure [1]. Comme les tubes ne sont pas rigoureusement à section circulaire, mais plutôt assimilables à des cylindres à section elliptique, il mesurait au microscope l'excentricité de la section du tube et en tenait compte dans le calcul. Enfin, comme M. Desains a opéré avec des tubes assez larges pour qu'il ne fût plus permis de considérer la surface du ménisque comme une hémisphère, il évaluait, dans ce cas, le terme correctif p en admettant que la surface du ménisque était un ellipsoïde, comme l'avait proposé Hagen [2], ce qui est plus voisin de la forme exacte.

Quant au procédé d'observation, il était à peu près le même que celui de Gay-Lussac. Le tube était porté par un trépied, à vis calantes; on le rendait vertical en se servant d'un fil à plomb. Le vase était remplacé par une soucoupe assez pleine du liquide étudié, pour que celui-ci dépassât un peu ses bords. Une pointe était amenée à affleurer presque à la surface du liquide (fig. 41);

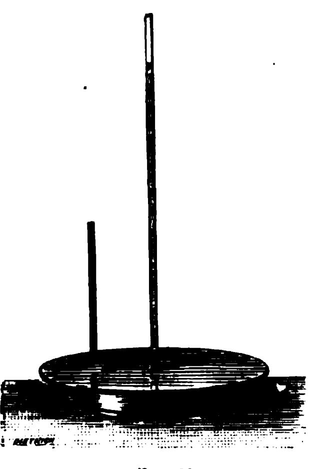


FIG. 41.

(1) M. Desains mettait une certaine quantité d'eau dans un tube, le pesait, puis le dressait verticalement et visait avec la lunette du cathétomètre le point le plus bas du ménisque. Il ajoutait ensuite une nouvelle quantité d'eau et mesurait au cathétomètre la hauteur dont le ménisque s'était déplacé. Cette hauteur était exactement celle du cylindre ayant même section que le tube et ayant pour volume celui de l'eau ajoutée, car l'un des ménisques compensait l'autre. Aussi suffisait-il de prendre à nouveau la masse du tube pour avoir par différence la masse de l'eau ajoutée et pour en déduire le diamètre du tube.

(2) HAGEN, *Académie de Berlin* (1845).

on visait avec la lunette d'un cathétomètre, 1° la pointe, 2° son image dans le liquide; la moyenne des deux positions donnait la position correspondant à la surface même du liquide. En visant ensuite la base du ménisque, on avait la hauteur cherchée.

Le tableau suivant, extrait du mémoire de M. Desains, permet de juger de l'exactitude des lois de la Capillarité.

RAYON des tubes en centimètres	HAUTEUR observée en cent.	HAUTEUR calculée en considérant le ménisque comme un ellipsoïde	DIFFÉRENCES
0c,0620	2c,414	2c,4166	— 0c,0026
0 ,0647	2 ,3163	2 ,3140	+ 0 ,0023
0 ,09519	1 ,5586	1 ,5562	+ 0 ,0024
0 ,2627	0 ,4998	0 ,4992	+ 0 ,0006
0 ,4639	0 ,2161	0 ,2209	— 0 ,0048

Pour vérifier la loi dans le cas de lames parallèles, M. Desains employait des lames de verre parfaitement nettoyées. Il les séparait par l'épaisseur de quatre bouts de fil de cuivre, pris dans le même morceau, et placés aux quatre coins des lames ; celles-ci étaient serrées en ces quatre angles par des presses à vis. On ne relevait la hauteur du liquide entre les lames que quand la ligne de raccordement du liquide et de la paroi de verre était des deux côtés horizontale dans sa plus grande étendue. Les résultats ont confirmé la loi de Laplace.

Enfin M. Quet (1) est arrivé à tenir un compte exact du poids du ménisque en calculant quelle devait être sa forme d'après les lois mêmes de la Capillarité. Il a appliqué ses formules aux expériences de Gay-Lussac, à celles de M. Desains, et à ses propres expériences faites en collaboration de M. Seguin. Dans celles-ci, le diamètre des tubes a atteint jusqu'à 2c,785, et, dans le cas des lames parallèles, l'écartement a atteint 1c,12. M. Quet

(1) Quet, *Rapport sur les progrès de la Capillarité*. Paris (1867).

a trouvé pour les tubes fins comme pour les tubes larges, et pour les lames quel que soit leur écartement, un parfait accord entre la hauteur donnée par les lois de la Capillarité et la hauteur observée.

Quant aux expériences faites pour vérifier les lois de la dépression d'un liquide dans un tube, lorsque l'angle de raccordement est aigu, elles n'ont guère porté que sur la dépression du mercure dans des tubes de verre.

On tourne la difficulté que présente l'observation de la position du ménisque dans le tube enveloppé par le liquide opaque, soit en appliquant le tube contre une paroi en verre verticale de la cuve, comme le faisait Gay-Lussac, soit en se servant de deux vases communiquants (fig. 42), dont l'un est le tube capillaire et l'autre un tube assez large pour que la surface du mercure y soit un plan horizontal. La différence de niveau entre les deux tubes est évidemment égale à la dépression capillaire que le mercure éprouverait dans un tube de même diamètre plongeant dans une cuve.



FIG. 42.

Les expériences sont difficiles, parce que l'angle de raccordement du mercure et du verre non seulement varie avec l'état de netteté des surfaces, mais encore n'est pas le même, suivant que le mercure a pris sa position d'équilibre en montant ou en descendant dans le tube capillaire (1) (nous reviendrons plus loin sur ce point). Malgré ces difficultés les expériences ont vérifié les lois de la Capillarité.

La connaissance de la dépression du mercure dans un tube, comme nous le verrons (L. III Chap. II § 8), présente un grand intérêt pour les mesures barométriques ou manométriques. Des tables ont été dressées qui donnent la valeur de cette dépression d'après le diamètre du tube et la hauteur de la flèche du ménisque.

(1) On peut arriver à obtenir l'angle de raccordement α par la mesure au cathétomètre de la *flèche* du ménisque, c'est-à-dire de la distance FF'

17. DÉTERMINATION DE LA VALEUR DE LA TENSION SUPERFICIELLE PAR LES TUBES CAPILLAIRES. — Dans le cas de liquides qui mouillent parfaitement les tubes, l'angle de raccordement étant de 180°, la formule (3) du § 15 se réduit à

$$y_1 = \frac{4A}{Dd} - \frac{4p}{D\pi d^2}$$

Les mesures indiquées au paragraphe précédent fournissant les valeurs de y_1, d et p, on déduit de cette formule la valeur de la tension superficielle A. C'est ainsi que M. Desains a trouvé, comme moyenne résultant de toutes ses expériences, que la tension superficielle de l'eau au contact de l'air à la température ordinaire a pour valeur 74,11 unités. Ce nombre est bien voisin du nombre 73,23 qu'on peut déduire des expériences de Gay-Lussac sur les tubes pour l'eau à 8°; il est plus faible que le nombre 81, donné d'après M. Quincke dans le tableau (§ 6); ce dernier nombre est probablement moins exact.

18. INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR L'ASCENSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CAPILLAIRES.— D'assez nombreux tra-

(fig. 43) entre le sommet et le plan horizontal qui contient la ligne de raccordement avec la paroi, si le tube est assez étroit pour qu'on puisse admettre que le ménisque est une calotte sphérique. En effet, on a dans ce cas :

$$FF' = R(1 - \sin\alpha)$$

en désignant par R le rayon de courbure de la calotte; et, comme on a:

$$r = R\cos\alpha$$

en désignant par r le demi-diamètre du tube, il vient :

$$FF' = r\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = r\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

La connaissance de FF' et de r permet ainsi de calculer α.

FIG. 43.

vaux ont été faits au sujet de l'influence de la température sur l'ascension des liquides dans les tubes capillaires. Nous nous bornerons à parler ici des expériences de M. Wolf [1].

L'appareil de M. Wolf se compose d'un cylindre C à double paroi en laiton (fig. 44), dans lequel circule un courant d'eau;

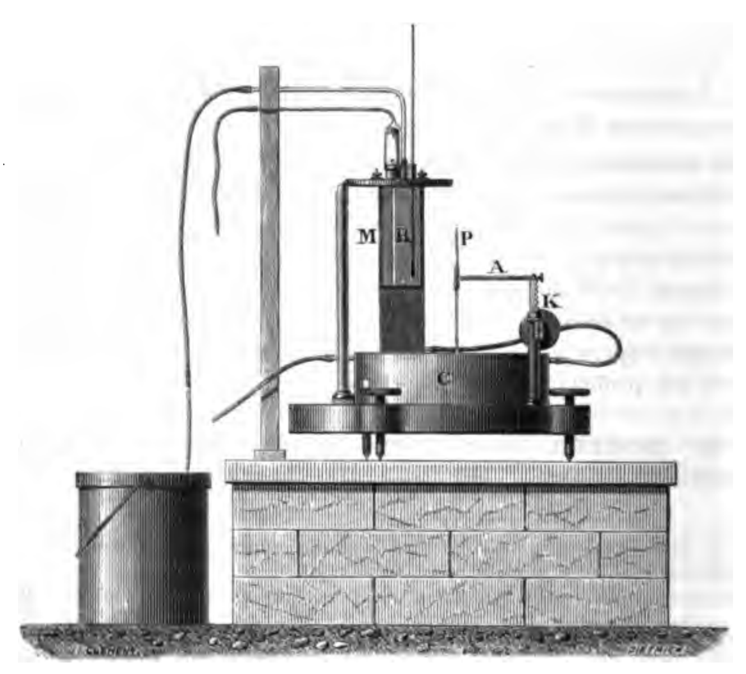


Fig. 44.

c'est au milieu que se trouve la cuvette. Le tube capillaire est entouré d'un manchon en cuivre M présentant deux fenêtres fermées par des glaces planes pour laisser voir le tube. L'eau qui a circulé dans le vase passe dans le manchon et ainsi toutes les parties du tube sont bien à la même température.

Les tubes dont s'est servi M. Wolf le plus souvent

(1) Wolf, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLIX, p. 230 (1857).

avaient été fermés aux deux bouts lors de leur fabrication; ils étaient parfaitement propres, ce dont on s'assurait en voyant que le liquide soulevé par aspiration ou refoulé par compression revenait au même point dans les deux cas.

Dans chaque expérience on prenait la précaution de ramener le ménisque à un même point de repère tracé sur le tube, en enlevant ou en ajoutant du liquide dans la cuvette. De cette façon on évitait l'inconvénient du défaut de cylindricité du tube.

On relevait au cathétomètre la distance verticale entre la partie inférieure du ménisque et une pointe P située presqu'au même niveau pour avoir peu à déplacer la lunette du cathétomètre. Cette pointe P termine une tige verticale qui porte une autre pointe à la partie inférieure. On avait soin, avant la mesure, de faire affleurer cette pointe inférieure à la surface du liquide dans la cuvette; pour cela, la tige A est mobile à l'aide d'une crémaillère très douce et d'un pignon K. Il suffisait alors d'ajouter à la distance verticale des deux pointes, mesurée au cathétomètre avant chaque expérience, l'excès positif ou négatif de la hauteur du ménisque au-dessus de la pointe P pour avoir la hauteur de la colonne liquide au-dessus du bain.

Pour les températures ordinaires, M. Wolf s'est servi des variations spontanées de la température du laboratoire; pour les températures plus élevées il a employé une circulation d'eau chaude dans le cylindre et dans le manchon.

Enfin, pour mesurer le diamètre du tube, l'expérience faite, on cassait celui-ci au point de repère où l'on avait fait affleurer le ménisque, et le diamètre était mesuré à l'aide d'une machine à diviser portant un microscope assez grossissant.

Laplace et Poisson avaient cru pouvoir déduire de leur théorie mathématique que la hauteur du liquide dans un même tube, aux différentes températures, variait proportionnellement à la densité du liquide. Les expériences de M. Wolf, confirmant les expériences antérieures de M. Brunner [1], ont montré que la décroissance de la hauteur du liquide dans un tube, quand la température s'élève, est beaucoup plus rapide que la variation de densité. Ainsi, tandis que pour l'eau la densité diminue entre 0° et 100°

(1) Brunner, *Annales de Poggendorff*, t. LXX, p. 481 (1847).

de la fraction 0,041 de sa valeur à 0°, la hauteur soulevée dans le tube diminue environ de la fraction 0,185 de la hauteur à 0°. L'eau ne présente pas un maximum de hauteur à 4° : depuis 0° la hauteur va constamment en diminuant quand la température s'élève. M. Brunner a montré qu'il en était de même pour l'éther et l'huile.

L'imperfection de ce point particulier de la théorie de Laplace paraît tenir à plusieurs causes [1]. Mais il en est une qui a été rendue bien évidente par M. Wolf: Laplace a admis que l'angle de raccordement restait toujours égal à 180° c'est-à-dire que le liquide mouillait parfaitement le tube à toute température ; or ce point n'est certainement pas exact. M. Wolf a montré directement que, dans un tube de 0,45 cent. de diamètre, la flèche du ménisque diminue de hauteur quand la température s'élève (pour l'eau, l'alcool et l'éther) ; ce qui ne peut s'expliquer que par une diminution de l'angle de raccordement.

Mais voici une expérience de M. Wolf bien plus démonstrative encore. Dans l'axe d'un tube de verre, fermé à la lampe, ayant environ un centimètre de diamètre intérieur, se trouve un tube capillaire, plongeant dans l'éther que contient la partie inférieure du gros tube. La partie supérieure a été privée d'air par les procédés habituels, elle ne contient que de la vapeur d'éther. A la température ordinaire le liquide s'élève dans le tube capillaire au-dessus du niveau dans le large tube. En chauffant ce tube dans un bain d'huile transparente, on voit que la hauteur du liquide dans le tube capillaire diminue à mesure que la température s'élève, et, vers 190° à 191° le niveau du liquide dans les deux tubes est sur le même plan horizontal. Du reste, on constate alors que la surface liquide est plane jusqu'aux bords dans le large tube ; ce qui indique que l'angle de raccordement est égal à 90°. En continuant à chauffer, on voit le ménisque dans le tube capillaire descendre au-dessous du niveau du liquide dans le tube large ; en même temps, comme cela doit être, la surface liquide devient convexe dans les deux tubes : l'angle du raccordement est inférieur à 90°. Enfin vers 198° un brouillard se forme sur la surface libre, et à 200° le liquide est complètement réduit en

(1) Voir aussi QUET, *loc, cit.*

vapeur, conformément aux expériences de Cagniard-Latour. En laissant refroidir le tube, le phénomène repasse en sens inverse par les mêmes phases.

M. Wolf a constaté, en outre, que le sulfure de carbone, l'huile de naphte et l'alcool donnent aussi dans les tubes de verre des ménisques convexes à une température suffisamment élevée.

Nous verrons, du reste, à propos de la caléfaction (L. IV, Chap. VII § 13), qu'à partir d'une certaine température les divers corps solides cessent d'être mouillés par les liquides qui les mouillent à la température ordinaire : l'état sphéroïdal d'un globule caléfié le montre.

En résumé, la diminution de hauteur d'un liquide dans un tube capillaire, quand la température s'élève, tient non seulement à ce que la tension superficielle diminue de valeur, mais aussi à ce que l'angle de raccordement devient de plus en plus faible.

19. MOUVEMENT D'UNE GOUTTE DE LIQUIDE DANS UN TUBE CONIQUE. — Quand on introduit dans un tube conique fin une goutte d'un liquide mouillant parfaitement le tube, comme de l'eau dans un tube de verre, ou tout au moins donnant naissance à un ménisque concave (fig. 45), on voit la goutte s'avancer vers l'extrémité la plus étroite du tube. Si le liquide donne un ménisque convexe, comme une goutte de mercure dans un tube de verre (fig. 46), la goutte, au contraire, s'avance de la partie étroite vers la partie large.

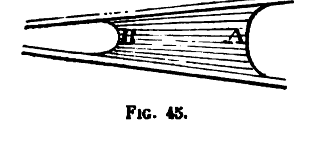
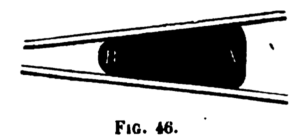


FIG. 45.

Ces mouvements s'expliquent aisément. Considérons d'abord le cas du ménisque concave. Si P est la force élastique de l'air, la force élastique à l'intérieur du liquide de l'autre côté de la surface concave est $P-p$ en A, $P-p'$ en B, en désignant par p et par p' les diminutions de force élastique en traversant la surface de séparation courbe en A et en B. Or, en B, le tube étant plus étroit


FIG. 46.

qu'en A, la courbure est plus forte et l'on a $p' > p$; d'où par conséquent :

$$P - p > P - p'$$

il s'ensuit que le liquide, possédant une force élastique plus grande en A qu'en B, s'avance de ce dernier côté. Du reste la force qui agit est indépendante de P, aussi ce phénomène a-t-il lieu dans le vide aussi bien que dans l'air. Dans le cas du vide, le liquide est dans un état de tension, et cette tension est plus grande en B qu'en A.

Pour un liquide qui donne des ménisques convexes, on a à l'intérieur du liquide en A et en B des forces élastiques respectivement égales à $P + p$ et $P + p'$: et, comme la convexité est plus forte dans la partie étroite B que dans la partie plus large A, on a :

$$p' > p \quad \text{d'où} \quad P + p' > P + p$$

En vertu de l'excès de force élastique en B, le liquide s'avance vers le côté le plus large.

Il est clair que des phénomènes du même genre se produisent quand une goutte liquide est placée entre deux lames voisines formant entre elles un petit angle. La goutte s'avance vers la partie étroite ou large suivant que les ménisques sont concaves ou convexes.

20. ATTRACTION OU RÉPULSION PRODUITE PAR LES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES. — Si, dans l'expérience des lames parallèles (§ 14), les lames sont mobiles, on les voit se rapprocher vivement l'une de l'autre, soit que le liquide s'élève entre ces lames, soit qu'il s'abaisse. La raison de ce phénomène est simple. Considérons d'abord le cas où le liquide s'abaisse (fig. 28); dans les régions où les deux faces d'une des lames sont baignées par un même fluide, air ou liquide, les pressions sur ces faces sont les mêmes et se font mutuellement équilibre ; mais il n'en est plus ainsi dans la partie où intérieurement les lames sont soumises à la force élastique de l'air et extérieurement à la force

élastique du liquide qui est plus grande : l'excès de pression extérieure les fait se rapprocher l'une de l'autre, si elles sont mobiles.

Si le liquide s'élève entre les lames, il en est encore de même; toute la portion du liquide comprise entre les lames au-dessus du niveau de la cuve (fig. 27) se trouve avoir une force élastique moindre, comme nous le savons, que l'air extérieur ; il y a encore dans ces régions un excès de pression à l'extérieur qui fait rapprocher les lames.

Du reste, à chaque hauteur l'excès de la force élastique extérieure sur la force élastique intérieure est indépendant de la force élastique de l'air ambiant. Aussi le phénomène reste-t-il encore le même si le vide existe autour des lames. Le liquide soulevé, dans ce cas, est dans un état de tension, et c'est cette tension qui produit l'attraction des deux lames. Quelle que soit la force élastique extérieure, la force élastique du liquide soulevé entre les lames est égale à cette force élastique extérieure diminuée de la valeur de la tension qui existerait en ce point si le vide parfait existait au dehors, sans que les forces capillaires fussent modifiées (1).

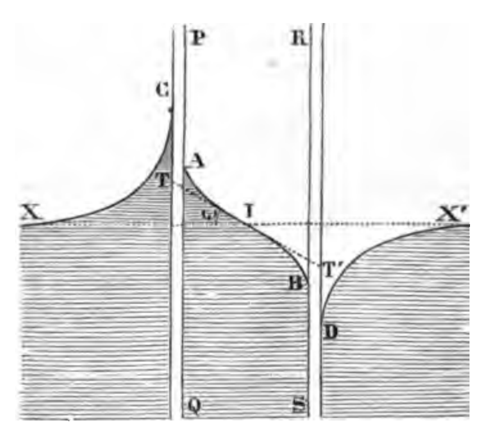


Fig. 47.

Ainsi il y a attraction quand le liquide s'abaisse ou quand il s'élève le long des deux lames; mais on observe, au contraire, une répulsion si le liquide s'élève le long d'une des lames PQ (fig. 47) et s'abaisse le long de l'autre RS, ce qu'on obtient, par exemple, en trem-

(1) Cette restriction est imposée par le fait que la valeur de la tension superficielle varie un peu quand on passe de l'air au vide.

pant dans l'eau une lame de verre légèrement grasse à sa surface.

Il est aisé de montrer par le calcul (1) ou de constater par ex-

(1) Faisons remarquer que, si le liquide s'abaisse d'un côté, il s'élève de l'autre; la formule $y = \frac{A}{D}\frac{1}{R}$ nous montre que, y ayant changé de signe, il en est de même du rayon de courbure R quand on passe d'un point de la surface libre intérieure, situé près d'une des lames, à un point situé près de l'autre lame. Si R change de signe, la ligne AIB, qui représente la section droite de la surface libre intérieure, doit présenter un point d'inflexion I; pour ce point, R étant infini, y est nul : ce point d'inflexion se trouve sur le plan horizontal XX' formant la surface libre du liquide dans la cuve loin des lames.

Supposons les lames assez rapprochées pour que la tangente d'inflexion TIT' ne soit pas horizontale; elle est alors relevée du côté où le liquide s'élève; soit ω la valeur de l'angle aigu TIX qu'elle forme avec XX'.

Reprenons maintenant l'équation générale de la surface libre du liquide (§ 12, form. 5).

$$y^2 = C + \frac{2A}{D}\cos\varphi$$

Dans ce cas, pour déterminer la constante arbitraire C, introduisons dans la formule les valeurs correspondant au point I, ($y = 0$, $\varphi = \pi - \omega$), il vient :

$$0 = C - \frac{2A}{D}\cos\omega \quad \text{d'où:} \quad C = \frac{2A}{D}\cos\omega$$

en remplaçant C par sa valeur, l'équation de la surface devient :

$$y^2 = \frac{2A}{D}(\cos\omega + \cos\varphi)$$

Pour avoir la valeur ε de y au point A, il faut remplacer φ, comme au § 12, par la valeur $\frac{\pi}{2} + \pi - \alpha$, en appelant α l'angle de raccordement obtus, ce qui donne

$$\varepsilon^2 = \frac{2A}{D}(\cos\omega - \sin\alpha)$$

mais la hauteur e à laquelle le liquide s'élève le long de la paroi verticale à l'extérieur C est donnée (§ 12, form. 9) par

$$e^2 = \frac{2A}{D}(1 - \sin\alpha)$$

on voit que l'on a $\varepsilon < e$.

La même démonstration ferait voir que le liquide s'abaisse plus en D à l'extérieur de la lame qu'en B à l'intérieur.

périence que le liquide monte moins haut le long de PQ du côté interne A que du côté externe C, et que le long de RS, le liquide s'abaisse moins à l'intérieur B qu'à l'extérieur D. Il en résulte qu'entre D et B, ainsi qu'entre A et C, la force élastique à l'intérieur des lames est plus grande qu'à l'extérieur pour deux points de même hauteur, tandis qu'elle est la même pour les parties où les deux faces sont baignées par le même fluide. L'excès de pression intérieure détermine l'écartement des lames si elles sont mobiles.

Les mouvements d'attraction ou de répulsion qu'on observe sur les corps flottants sont dus à la même cause. Si le liquide se relève sur la paroi de deux corps flottants, comme dans le cas de deux balles de liège flottant sur l'eau, dès qu'ils arrivent dans le voisinage l'un de l'autre ils s'attirent, parce que le liquide monte plus haut entre eux que sur leurs parois extérieures (fig. 48 A). Il en est encore de même si le liquide s'abaisse le long des deux corps flottants (fig. 48 B), comme pour des billes de verre sur du mercure, des balles de liège passées au noir de fumée ou bien graissées flottant sur l'eau; car le liquide s'abaisse plus entre ces deux corps que sur la paroi extérieure. Mais, pour la raison indiquée à propos des lames, il y a répulsion si le liquide s'élève le long de l'un des corps et s'abaisse le long de l'autre (fig. 48 C), comme dans le cas de deux balles de liège l'une graissée l'autre non graissée flottant à la surface de l'eau.

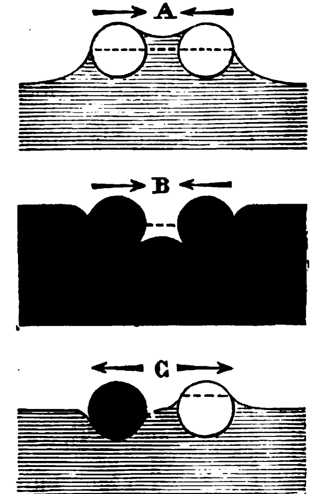


FIG. 48.

Les bords des vases, les objets plongés dans le liquide exercent des actions attractives ou répulsives sur les corps flottants, suivant qu'il y a ascension ou dépression du liquide pour les deux corps, ou suivant qu'il y a dépression d'un côté, ascension de l'autre.

C'est à Mariotte [1] et à Monge [2] que l'on doit l'explication de ces phénomènes.

21. PRESSION NÉCESSAIRE POUR FAIRE ÉCOULER UN LIQUIDE PAR UN ORIFICE ÉTROIT. — FORMATION DES GOUTTES. — Quand un liquide est contenu dans un vase terminé par un orifice étroit à sa partie inférieure, un tube, par exemple, il faut un certain excès de pression pour faire écouler le liquide par cette ouverture.

La goutte de liquide qui vient perler à l'orifice, en effet, a sa convexité tournée à l'extérieur, quelle que soit la nature du liquide et des parois du vase. Dès lors, en passant de l'atmosphère à l'intérieur du liquide, il y a une brusque augmentation $p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ dans la valeur de la force élastique, et c'est cette pression capillaire p qu'il faut vaincre.

A mesure que la pression exercée sur le liquide augmente, la goutte s'avance de plus en plus, et par là, prend une courbure moyenne $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ plus grande; il en résulte que la pression capillaire p augmente jusqu'à ce qu'elle ait atteint la différence entre la force élastique du liquide et la force élastique extérieure : il y a alors équilibre. C'est ainsi qu'un tube plein d'eau ou de mercure peut être ouvert aux deux bouts, sans que le liquide s'écoule, si l'orifice inférieur est suffisamment étroit (fig. 49).

Nous verrons, à propos de la caléfection (L. IV, Chap. VII, § 13), d'autres exemples de ce genre.

La courbure moyenne $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ d'une goutte qui se présente à un orifice étroit ne pouvant augmenter au

FIG. 49.

(1) MARIOTTE, *Traité du mouvement des eaux*; Paris, 1700.

(2) Gaspard Monge, inventeur de la géométrie descriptive, est né à Beaune en 1746 et mort en 1818.

Son travail sur *les attractions et les répulsions apparentes des corps flottants* a paru dans le *Nicholson Journ.* III p. 269-273 (1800).

delà d'une certaine limite, la pression capillaire p ne peut dépasser une certaine valeur p_1 d'autant plus grande : 1° que l'orifice est plus étroit, ce qui permet d'atteindre une plus petite valeur pour le minimum de R et de R' ; 2° que la valeur de la tension superficielle A est plus grande. Si donc on augmente de plus en plus la force élastique à l'intérieur du liquide, la goutte fait de plus en plus saillie, et, dès que l'excès de cette force élastique sur celle de l'atmosphère dépasse la valeur p_1, l'équilibre ne peut plus avoir lieu, la goutte se gonfle comme un petit ballon élastique et finit par se détacher.

Quand une goutte est sur le point de tomber, il se forme un léger étranglement AB (fig. 50) dont le diamètre, peu différent de celui de l'orifice, peut être considéré comme lui étant proportionnel. Si l est le périmètre de cette partie étranglée et A la valeur de la tension superficielle, Al est la valeur de la tension verticale qui soutient la goutte. Au moment où elle se détache, la rupture ayant lieu à l'endroit étranglé, on a, en appelant P le poids de la goutte :

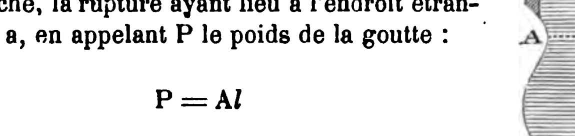


Fig. 50.

(1) $$P = Al$$

On voit par cette formule :

1° *Que, pour un même liquide, le poids des gouttes est proportionnel au périmètre de l'orifice* (1).

Cette loi a été vérifiée expérimentalement par Tate (2) et porte son nom.

2° *Que, pour un même orifice, le poids des gouttes est proportionnel à la valeur de la tension superficielle* A.

M. Hagen (3) a proposé de se servir de la mesure du poids des gouttes pour obtenir le rapport des tensions superficielles de divers liquides s'écoulant successivement par le même ori-

(1) Ceci montre qu'il est important que les *comptes-gouttes* dont se servent les pharmaciens pour obtenir, d'après le nombre de gouttes, une masse déterminée d'un liquide, aient des orifices de même diamètre.

(2) Tate *Philosophical Magazin*, 4e série, XXVII, p. 176 (1864).

(3) Hagen *Annales de Poggendorff*, t. LXVII, p. 152 (1846).

fice. M. Duclaux (1) a montré que ce procédé conduit à des résultats qui sont d'accord avec ceux fournis par les autres méthodes ; ce qui est la démonstration expérimentale de la seconde loi.

22. **CORPS POREUX.** — Un corps poreux, tel qu'un morceau de plâtre, de craie, de sucre ou tel qu'une mèche de coton, est un corps qui présente de nombreuses cavités très étroites communiquant entre elles et formant quelque chose d'analogue à un ensemble de tubes capillaires.

Aussi, quand on vient à plonger un corps poreux dans un liquide qui le mouille, celui-ci s'élève-t-il dans les nombreux interstices que laissent entre elles les particules : le corps poreux s'imbibe du liquide. Si les interstices sont très étroits, le liquide peut s'élever à une grande hauteur et même dépasser de beaucoup la hauteur à laquelle la pression atmosphérique le ferait élever dans le tube d'un baromètre. Dans ce cas, les parties du liquide qui dépassent la hauteur barométrique sont dans un état de tension.

Des pressions considérables peuvent être développées par l'infiltration d'un liquide dans un corps poreux. On le montre avec l'appareil suivant : dans un bloc de plâtre bien sec on creuse une petite cavité et l'on mastique à sa partie supérieure un manomètre formé d'un tube de verre vertical fermé en haut et contenant un index de mercure. En immergeant dans l'eau le bloc de plâtre, on voit l'index de mercure s'élever indiquant que l'air de la cavité est comprimé. On peut obtenir ainsi une force élastique de deux ou trois atmosphères.

Ce fait s'explique aisément si l'on remarque que l'air qui occupait un volume considérable à l'intérieur des pores s'est réfugié dans la cavité quand l'eau a imbibé le plâtre ; la surface terminale des colonnes liquides étant fortement concave du côté de la cavité, à cause de la finesse des espaces capillaires, la pression capillaire $p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ est énorme et peut faire

(1) Duclaux *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXI, p. 378.

équillibre à la force élastique de l'air comprimé à l'intérieur de la cavité.

23. RETARD AU DÉPLACEMENT DES MÉNISQUES. — Quand on augmente un peu la force élastique du côté concave d'un ménisque, les bords de celui-ci peuvent ne pas se déplacer, mais alors le ménisque se creuse davantage, et l'accroissement de pression capillaire qui en résulte fait équilibre à l'accroissement de force élastique. De même, si l'on augmente un peu la force élastique du côté convexe, il peut se faire que les bords du ménisque ne se déplacent pas et que le ménisque s'aplatisse un peu plus pour compenser la variation de force élastique. Il y a une sorte de *frottement au départ* qui empêche les bords de la colonne liquide de se déplacer sous l'influence de faibles forces.

Le fait s'observe aisément dans un baromètre dont le tube est assez étroit pour que la dépression capillaire soit notable. En donnant quelques petits chocs sur les parois du tube, on voit le ménisque se déformer en général et prendre une position plus stable. Si, à partir de cet état, la pression atmosphérique augmente un peu, les bords de la colonne ne se déplacent pas, mais le ménisque devient plus convexe; au contraire, si la pression atmosphérique diminue un peu, le ménisque s'aplatit.

Ces faits donnent l'explication d'un phénomène très remarquable étudié par M. Jamin. Supposons que, dans un tube capillaire, on introduise une série de gouttes liquides formant autant d'index séparés par des bulles d'air (fig. 51), et qu'à l'une des extrémités du tube, on vienne à augmenter ou à diminuer la force élastique; on voit le premier index se déplacer, mais les suivants se déplacent de moins en moins, et, si leur nombre est assez considérable, les derniers ne se déplacent pas du tout. Ainsi, un chapelet de gouttes liquides séparées par des bulles d'air peut empêcher la transmission des pressions.

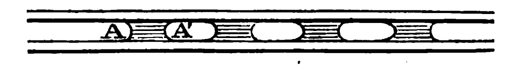


FIG. 51.

Considérons un des index, et, pour fixer les idées, supposons

que ses deux ménisques terminaux A et A' soient concaves. Augmentons la force élastique du côté de A d'une petite quantité; d'après ce que nous venons de dire, le ménisque devient plus concave en A, moins concave en A'. Il en résulte que les pressions capillaires p et p' en A et A' deviennent différentes et qu'on a $p > p'$. Or, si P est la force élastique de l'air du côté de A, $P - p$ est la force élastiqne à l'intérieur du liquide et $P - p + p'$ est la force élastique de l'air du côté de A'. On voit que cette quantité est inférieure à P, et, si nous posons $p - p' = k$ (k quantité positive), cette force élastique est $P - k$. Le ménisque A ne peut se creuser au delà d'une certaine limite, et A' ne peut aussi s'aplatir indéfiniment; il en résulte qu'il y a une valeur maximum pour k que nous désignerons par K. Si la différence de force élastique de l'air du côté de A et de A' est inférieure à K, le ménisque se déforme et l'index ne s'avance pas. Si la différence de force élastique est supérieure à K, l'index s'avance; mais la pression par unité de surface transmise à l'air du côté de A' est seulement $P - K$. S'il y a plusieurs index, la pression transmise diminue de K en passant d'un index au suivant, de façon à devenir $P - nK$ après le n^{me} index, et, si la différence de force élastique $P - P'$ entre les deux extrémités du tube contient n fois K et ne le contient pas $(n+1)$ fois, le $(n+1)^{me}$ index se déforme sans se déplacer, et il en est de même des suivants.

Il est clair que la valeur de K est d'autant plus grande que le tube est plus fin.

Avec un tube très étroit et contenant de nombreuses bulles, M. Jamin est parvenu à conserver pendant plus de quinze jours une pression de 3 atmosphères dans un vase communiquant avec l'une des extrémités du tube, dont l'autre débouchait librement dans l'atmosphère. Un pareil tube soudé à l'extrémité d'un baromètre a permis au vide de se maintenir dans la chambre barométrique.

Le phénomène est encore plus marqué, si le tube présente des renflements et des étranglements successifs. Quand on introduit un peu d'eau dans un pareil tube, celle-ci chemine, comme nous le savons, de façon à occuper les parties étranglées; si les parties larges restent pleines d'air, il en résulte qu'une augmentation

de pression creuse plus l'un des ménisques et aplatit plus le ménisque opposé que dans le cas d'un tube cylindrique, ce qui rend la valeur de K plus considérable. En effet (fig. 52), à mesure que la goutte s'enfonce sous l'excès de pression, le ménisque antérieur A s'avance vers une partie où le diamètre du tube est de plus en plus faible, le ménisque postérieur A' vers une partie où le diamètre est de plus en plus grand.

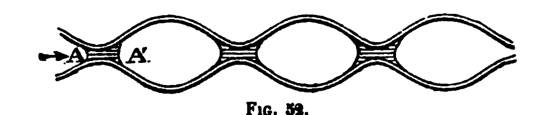


Fig. 52.

Le travail de M. Jamin explique un certain nombre de phénomènes naturels. Par exemple, on sait que quelques bulles d'air introduites dans le sang amènent la mort : il se forme dans les vaisseaux capillaires des chapelets de bulles qui arrêtent la circulation du sang, la force musculaire du cœur n'étant plus suffisante pour vaincre les pressions capillaires.

24. INFLUENCE DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES SUR LA PROFONDEUR A LAQUELLE S'ENFONCENT LES CORPS FLOTTANTS. — Supposons qu'un corps flotte en équilibre, une partie du corps étant immergée; outre les poussées exercées par les deux fluides, liquide et air, il faut tenir compte aussi de la traction que le corps flottant subit, par suite de la tension superficielle du liquide qui se relève ou s'abaisse autour de lui, ce qui donne naissance à une composante verticale.

Soit λ la longueur d'un élément de la ligne suivant laquelle le liquide touche le corps; si A est la valeur de la tension superficielle, cet élément est tiré tangentiellement à la surface du liquide avec une force $A\lambda$. Si, en cet endroit, la surface du liquide fait un angle β avec la verticale, la composante verticale de cette traction est égale à $A\lambda \cos \beta$. En comptant l'angle β à partir de la portion de la verticale dirigée vers le haut, on voit que, si $\beta < \frac{\pi}{2}$, la tension tend à relever le corps flottant, et que si $\beta > \frac{\pi}{2}$, elle tend à l'enfoncer.

Dans le cas où la paroi du corps est verticale, l'angle β est égal à l'angle de raccordement α. La résultante des composantes verticales des tractions exercées sur tous les éléments de la ligne où la surface libre du liquide rencontre le corps est alors égale à

$$\sum A\lambda \cos\alpha = A \cos\alpha \sum \lambda = Al \cos\alpha$$

en désignant par l la longueur de cette ligne.

On voit que, si le liquide se relève sur les parois du corps, cas où $\cos\alpha$ est négatif, le corps doit s'enfoncer plus que ne l'indiquent les lois de l'Hydrostatique [1], la traction exercée par la tension superficielle s'ajoutant numériquement au poids. Si, au contraire, le liquide s'abaisse le long des parois du corps, cas où $\cos\alpha$ est positif, le corps s'enfonce moins que ne l'indique le principe d'Archimède : la traction causée par la tension superficielle se retranchant numériquement du poids.

Il peut même se faire que, grâce à cette traction, un corps de densité plus grande que le liquide, mais qui ne le mouille pas, puisse flotter à sa surface. C'est ainsi qu'une mince aiguille d'acier, très légèrement graissée, peut flotter à la surface de l'eau, si on l'y dépose délicatement : l'eau s'abaisse tout autour de l'aiguille et la traction capillaire suffit à compenser la différence entre le poids et la poussée.

C'est par suite d'un phénomène de même nature que certains insectes, appelés *tisserands*, peuvent courir à la surface de l'eau.

(1) C'est pour cela qu'un aréomètre à tige de verre mouillée par les liquides dans lesquels on l'enfonce, ne peut pas être un bon densimètre comme l'a fait remarquer M. Duclaux (Voir *Journ. de Physique*, 1re série, t. 1er, p. 197). En effet, deux liquides de même densité, mais de natures différentes, pouvant avoir une tension superficielle différente, l'aréomètre s'enfoncera plus dans celui qui a la plus forte tension. Par exemple, plongeons dans l'eau pure un aréomètre sensible, et versons un peu de vapeur d'éther à la surface; cette vapeur se dissout dans les couches d'eau superficielles et l'on voit l'instrument se relever d'une façon notable. La vapeur d'éther n'a pas modifié la densité du liquide, mais en se dissolvant dans la couche d'eau superficielle, elle diminue notablement la valeur de la tension. Une trace presque imperceptible d'un corps gras répandu à la surface de l'eau et qui s'y étend comme un voile produit le même effet.

25. TRAVAIL DES FORCES CAPILLAIRES DANS LA DÉFORMATION D'UNE MASSE LIQUIDE. — Quand la surface libre d'une masse liquide vient à diminuer par suite de la rentrée à l'intérieur d'un certain nombre de molécules primitivement à la surface, les forces moléculaires accomplissent un travail positif, puisque les molécules se dirigent dans le sens des forces qui les sollicitent : l'énergie potentielle du système diminue. Quand, au contraire, la surface libre d'un liquide devient plus grande par suite du passage d'un certain nombre de molécules de l'intérieur à la surface, celles-ci se dirigeant en sens inverse des forces moléculaires qui agissent sur elles, le travail de ces forces est négatif : l'énergie potentielle de la masse liquide augmente.

Il est aisé de voir que le travail de ces forces moléculaires, ou la variation d'énergie potentielle, est égal au produit de la valeur de la tension superficielle par la variation de l'aire de la surface libre.

Remarquons d'abord que, dans le cas d'un poids soutenu par une corde passant sur deux poulies (fig. 53), on peut évaluer le travail de la pesanteur, si le poids monte ou descend, soit en multipliant le poids par le déplacement vertical, soit, ce qui donne le même résultat, en multipliant la valeur de la tension de la corde dans l'état d'équilibre, en M ou en N, par le déplacement de ces points et faisant la somme des deux travaux en M et en N (1). Ce n'est, en effet, que faire application de la loi que la somme des travaux de forces qui se font équilibre est nulle. De même, pour évaluer le tra-

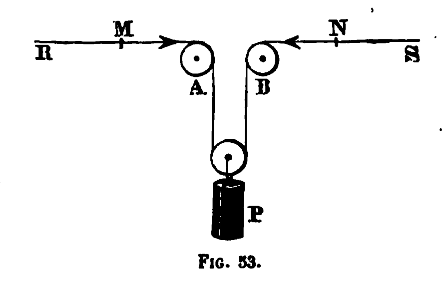


FIG. 53.

(1) Dans la première évaluation en appelant a le déplacement du poids et P sa valeur, le travail est Pa; dans la deuxième évaluation le travail en M ou en N est Ta, en appelant T la tension, et la somme des travaux en M et N est $2Ta$; ce qui est égal à Pa, puisque $2T$ est égal à P.

vail élémentaire des forces moléculaires dans une déformation infiniment petite de la masse liquide, nous pouvons multiplier la tension superficielle qui agit sur un élément linéaire de la surface libre par le déplacement de cet élément, dans la direction de la tension, et faire la somme pour tous les éléments linéaires d'un contour fermé. Nous aurons ainsi le travail des tensions superficielles correspondant à la partie de la surface comprise à l'intérieur de ce contour fermé, et, en faisant la somme des termes semblables pour toutes les parties en lesquelles on peut décomposer la surface totale, nous aurons le travail de toutes les forces moléculaires dans cette déformation.

Pour faire ce calcul, considérons sur la surface libre du liquide un contour quelconque ACB (fig. 54) assez petit pour que la surface qu'il enveloppe puisse être considérée comme plane. Soit MN un élément de ce contour; la force qui tend à l'entraîner vers l'intérieur du contour est égale à $A\lambda$, en désignant par A la valeur de la tension superficielle et par λ la longueur infiniment petite de l'élément MN; cette force est normale à l'élément.

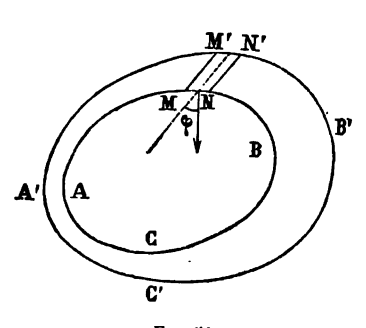


Fig. 54.

Supposons maintenant que, par suite d'une déformation infiniment petite de la surface liquide, les molécules limitant le contour précédent s'écartent et forment un contour A'C'B' plus grand que ACB, mais infiniment voisin. Soit M'N' la nouvelle position des molécules qui se trouvaient suivant MN, soit φ l'angle que forme la direction de la normale à MN avec la direction du déplacement, enfin, soit ε la longueur du chemin parcouru par chacune des molécules de MN. La force appliquée à l'élément MN, et qui tend à l'entraîner vers l'intérieur du contour, accomplit pendant ce déplacement un travail négatif égal à $-A\lambda\varepsilon \cos \varphi = -A\sigma$, en désignant par σ l'aire du quadrilatère MN M'N', qui peut être considéré comme un parallélogramme.

Par conséquent, la somme Δw des travaux des forces de tension

sur tout le contour pendant sa déformation infiniment petite est donnée par

$$\Delta w = - A \sum \sigma = - A \Delta s \tag{1}$$

en appelant Δs la variation de l'aire de la surface comprise à l'intérieur du contour pendant la déformation élémentaire (Δs = aire A'B'C' — aire ABC).

Cette formule est générale évidemment et s'applique que Δs soit positif ou négatif.

Décomposons toute la surface libre du liquide en éléments infiniment petits. Le travail ΔW, correspondant à tout le liquide, pendant une transformation infiniment petite dans laquelle ΔS est la variation de l'aire totale de la surface, s'obtient en faisant la somme des termes Δw correspondant à chaque élément de surface ; on a donc :

$$\Delta W = \sum \Delta w = - A \sum \Delta s = - A \Delta S \tag{2}$$

Et, enfin, le travail total W pour une déformation où l'aire de la surface libre passe de la valeur S_1 à la valeur S_2 est donné par

$$W = - A \sum \Delta S = A (S_1 - S_2) \tag{3}$$

Si l'on a $S_1 > S_2$, le travail des forces moléculaires est positif ; si l'on a $S_1 < S_2$ il est négatif.

Quand une masse liquide a sa surface en mouvement, comme la mer lorsqu'elle est agitée, l'énergie sensible se trouve sous les deux formes principales : la masse liquide possède une certaine quantité d'énergie actuelle (moitié de la force vive), puis-

qu'il y a mouvement; elle possède aussi une certaine quantité d'énergie potentielle, puisque la surface libre ne présente pas l'aire minimum qui correspond à l'état d'équilibre..

Si, par une cause quelconque, la surface libre devient plus grande, l'énergie potentielle augmente et l'énergie actuelle diminue d'autant : la vitesse des particules liquides devient plus faible. Si, au contraire, la surface libre devient moins grande, comme cela a lieu quand une couche d'eau vient à recouvrir une autre couche, alors l'énergie potentielle diminue et l'énergie actuelle augmente d'autant (1) : la vitesse des particules liquides devient plus considérable.

On doit à M. Van der Mensbrugghe d'avoir montré le rôle que jouent ces transformations des deux formes de l'énergie dans la production des vagues (2).

(1) Il paraît, en effet, n'y avoir qu'une fraction très faible de l'énergie sensible transformée en énergie calorifique à chaque modification, puisqu'il faut beaucoup de temps pour qu'une tempête se calme, après que le vent qui lui a donné naissance a cessé de souffler; c'est-à-dire qu'il faut beaucoup de temps pour que l'énergie sensible communiquée à la surface de la mer par le vent se soit transformée en énergie calorifique.

(2) Van der Mensbrugghe, *Nouvelles applications de l'énergie potentielle des surfaces liquides*. (*Bull. de l'Acad., roy. de Belgique*, t. XLVII, p. 326 (voir p. 341), 1879).

Sur les moyens proposés pour calmer les vagues de la mer. (ibid. 3e série, t. IV, n° 8, 1882).

COURS

DE

PHYSIQUE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

COURS

DE

PHYSIQUE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

H. PELLAT

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PROFESSEUR A LA MAISON D'ÉDUCATION
DE LA LÉGION D'HONNEUR DE SAINT-DENIS

TOME SECOND

Deuxième Partie — OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE



PARIS

SOCIÉTÉ D'IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ADMINISTRATIVES ET CLASSIQUES

Paul DUPONT, Éditeur

41, RUE JEAN-JACQUES-ROUSSEAU, 41

1886

DEUXIÈME PARTIE

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

LIVRE V

OPTIQUE

CHAPITRE PREMIER

GÉNERALITÉS

1. **SENSATION LUMINEUSE. — LUMIÈRE.** — Il existe dans le fond de l'œil un nerf de sensibilité spéciale, qu'on appelle le *nerf optique*. Quelle que soit la manière dont on agisse sur ce nerf, qu'on le comprime, qu'on le galvanise par un courant électrique, etc., il ne transmet au cerveau que la seule sensation qu'il soit capable de transmettre, la *sensation lumineuse*. Mais il est un agent physique qui est la cause habituelle de l'impression du nerf optique; c'est à cet agent qu'on a donné le nom de *lumière*.

La science qui fait l'étude de la lumière a reçu le nom d'*Optique*.

La nature de la lumière n'étant nullement évidente au premier abord, nous procéderons comme pour la chaleur : nous commencerons par une étude expérimentale, et celle-ci nous conduira à la découverte de la nature probable de la lumière.

Entre autres résultats remarquables, cette étude fera voir que l'agent physique que nous appelons *lumière*, quand il im-

pressionne le nerf optique est le même que celui que nous appelons *chaleur rayonnante*, quand il se manifeste par l'échauffement des corps qu'il frappe.

2. SOURCE LUMINEUSE. — Le Soleil, les corps en combustion, etc., jouissent de la propriété de dissiper l'obscurité : ce sont des *sources lumineuses*. La plupart des corps froids ou à une température n'atteignant pas 500° ne sont pas des sources lumineuses, d'après la définition que nous venons de donner; mais la présence d'une de ces sources les rend visibles; ce qu'on exprime en disant qu'ils renvoient à l'œil une partie de la lumière qu'ils ont reçue. Du reste, cette lumière, renvoyée par un corps non lumineux par lui-même, peut servir à éclairer d'autres corps de la même catégorie, tout comme la lumière arrivant directement de la source. Ainsi, par exemple, un mur blanc, vivement éclairé par le Soleil, peut éclairer l'intérieur d'une pièce, qui, sans la présence du mur, serait beaucoup plus sombre : on peut considérer le mur comme une source lumineuse, par rapport à la pièce.

3. CORPS OPAQUES, CORPS TRANSLUCIDES, CORPS TRANSPARENTS. — Une lame de métal ne permet pas de distinguer les objets éclairés qui sont derrière ; en outre, si un métal entoure complètement la source lumineuse, à moins qu'il ne soit d'une extrême minceur, il produit l'obscurité. On dit que la lumière ne traverse pas le métal, et tout corps qui jouit de cette propriété est appelé un corps *opaque*.

Une lame de verre dépoli ne permet pas non plus de distinguer les objets qui sont derrière elle ; mais pourtant elle laisse passer la lumière d'une source lumineuse, car, si un verre dépoli entoure complètement la flamme d'une lampe, la pièce reste éclairée; les corps qui jouissent de la propriété optique du verre dépoli sont appelés *corps translucides*.

Enfin, une lame de verre polie sur ses deux faces non seulement permet à la lumière d'une source de passer au travers, comme le verre dépoli, mais aussi elle permet de voir nettement les objets placés derrière elle; les corps, qui jouissent de la propriété optique du verre poli, sont appelés *corps transparents*.

Il est bon de faire remarquer qu'il y a des transitions entre les corps transparents, les corps translucides et les corps opaques. Un morceau de verre enfumé, un peu épais, nous paraît opaque, si nous essayons de regarder au travers des objets peu éclairés; mais il nous laisse voir le disque du Soleil, parce que celui-ci envoie beaucoup de lumière.

Du reste, l'opacité ou la transparence dépendent aussi de la couleur de la lumière, certains corps étant opaques pour une couleur et transparents pour une autre; nous ne faisons que signaler ici cette propriété, que nous étudierons plus loin.

4. PROPAGATION DE LA LUMIÈRE. — RAYON LUMINEUX. — Si l'on vient à placer un corps opaque sur la ligne droite OA, qui joint l'œil à un point A d'une source lumineuse, ce point A cesse d'être vu. Si le corps opaque interposé est une plaque percée d'un trou, il faut placer le trou de cet *écran* sur la ligne droite OA pour que le point A soit vu; et, si plusieurs écrans percés de trous sont placés entre le point lumineux et l'œil, il faut que tous ces trous soient sur la ligne droite OA pour que l'œil voie le point A.

On exprime ce fait en disant que la lumière se propage *en ligne droite*. Du reste, il n'en est ainsi qu'à la condition que le milieu traversé par la lumière soit homogène. Nous verrons plus loin que la lumière peut se propager suivant une ligne brisée, si le milieu est hétérogène, et même suivant une ligne courbe, si les propriétés du milieu varient d'une façon continue.

Quelle que soit la nature du milieu, on appelle *rayon lumineux* la ligne droite, brisée ou courbe, suivant laquelle il faut disposer tous les trous des écrans pour que la lumière émise par un point lumineux puisse les traverser. C'est encore le lieu géométrique des points situés derrière un écran percé d'un trou, et qui sont éclairés par un point de la source lumineuse. Ainsi, quand on vient à pratiquer une petite ouverture dans le volet d'une pièce obscure, la lumière envoyée par le Soleil et qui traverse le trou, éclaire sur son passage toutes les poussières qui flottent dans l'air, les rend visibles, ce qui dessine le rayon lumineux, ou plus exactement l'ensemble

des rayons lumineux correspondant à chacun des points du Soleil (1).

Dans ce qui suivra, toutes les fois que nous n'indiquerons pas spécialement que le milieu traversé par la lumière est hétérogène, il sera entendu que le milieu dont il s'agit est homogène, et, par conséquent, que le rayon lumineux est une ligne droite.

En général, un point lumineux envoie de la lumière de tous côtés, c'est-à-dire que, quelle que soit, autour de ce point, la position d'un écran percé d'un trou, il passe par celui-ci un rayon lumineux. On peut dire, d'après cela, que ce point lumineux émet des rayons dans toutes les directions.

Les faits d'observations et d'expériences qui nous ont servi à établir la notion du rayon lumineux, et ceux qui nous montreront comment est modifiée la marche des rayons dans le cas où ils frappent une surface polie (*réflexion*), ou traversent la surface de séparation de deux milieux transparents (*réfraction*), suffisent pour qu'à l'aide de la géométrie, on puisse en déduire un grand nombre de propriétés de la lumière. En particulier, ils ont suffi pour conduire à l'invention de la plupart des instruments d'optique (*microscope*, *télescope*, *etc.*). Aussi, a-t-on donné le nom d'*Optique géométrique* à cette partie de l'Optique.

C'est par elle que nous commencerons.

5. OMBRE. — Supposons que devant une source lumineuse de dimension négligeable, devant un point lumineux S, nous pla-

(1) Pour que la définition que nous venons de donner du rayon lumineux fût précise au point de vue mathématique, il faudrait ajouter que les trous des écrans *sont de dimensions infiniment petites*; on doit bien se garder d'ajouter ce complément à la définition : en effet, si les trous des écrans deviennent très petits, par exemple de la grosseur de celui que ferait dans une carte la pointe d'une fine aiguille à coudre, le phénomène optique change complètement. Dans un milieu homogène, au lieu d'avoir de la lumière seulement suivant la ligne droite qui joint un trou au trou précédent, on en trouve dans tout l'espace situé derrière l'écran. Nous étudierons plus loin ce phénomène, connu sous le nom de *diffraction*, et, connaissant mieux les phénomènes optiques, nous pourrons préciser la définition du rayon lumineux pour qu'elle ne laisse rien à désirer au point de vue de la rigueur mathématique.

cions un corps opaque A (fig. 1). Tout point qui, comme le point L, est tel que la droite qui le joint au point S ne traverse pas le corps A, est eclairé par S ; tout point qui, comme le point O, est tel, au contraire, que la droite qui le joint au point S traverse le corps A, n'est pas éclairé par S, puisque le rayon lumineux SM, qui peut lui arriver, est arrêté par le corps opaque : ce point est dans l'*ombre*.

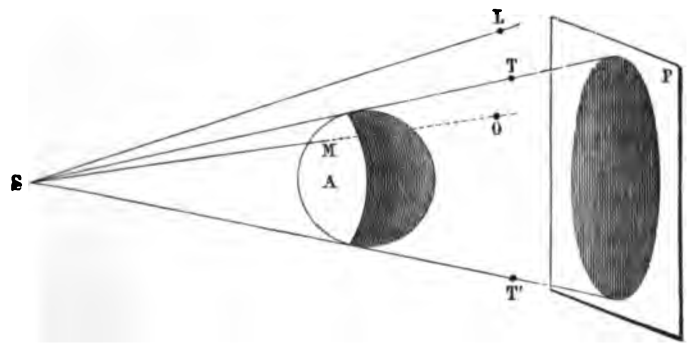


Fig. 1.

Il est évident que la limite de l'ombre est formée par la portion située derrière le corps A de la surface engendrée par une droite ST qui passerait par S et qui s'appuierait constamment dans son mouvement sur le pourtour du corps opaque A, c'est-à-dire de la surface du cône ayant la source pour sommet et tangent au corps opaque (*cône d'ombre*). Bien entendu, du côté de la source lumineuse, l'ombre est limitée par la partie de la surface du corps placée en avant de la ligne de contact de ce cône, et, de l'autre côté, l'ombre s'étend indéfiniment.

Par exemple, supposons que le corps opaque A soit une sphère ; dans ce cas, le cône d'ombre est de révolution. Si le point lumineux S éclaire un plan au-devant duquel est placé la sphère opaque A, la portion de ce plan dans l'ombre aura comme contour une section conique, en général une ellipse ou une branche d'hyperbole, suivant la position du plan, et pour des positions particulières, ce contour peut prendre la forme d'une parabole ou d'un cercle.

6. PÉNOMBRE. — Les sources lumineuses réelles ne sont pas réduites à des points mathématiques, elles ont une certaine dimension. Il en résulte, comme nous allons le montrer, que la partie dans l'ombre n'est pas séparée de la partie en pleine lumière par une surface géométrique, mais qu'il existe autour de l'ombre une région éclairée par une portion de la source lumineuse seulement, qui forme une transition entre l'ombre et la partie éclairée par tous les points de la source. C'est cette région intermédiaire qu'on appelle *la pénombre.*

A chaque point de la source, en effet, correspond un cône d'ombre. Il se trouve évidemment derrière le corps opaque A (fig. 2),

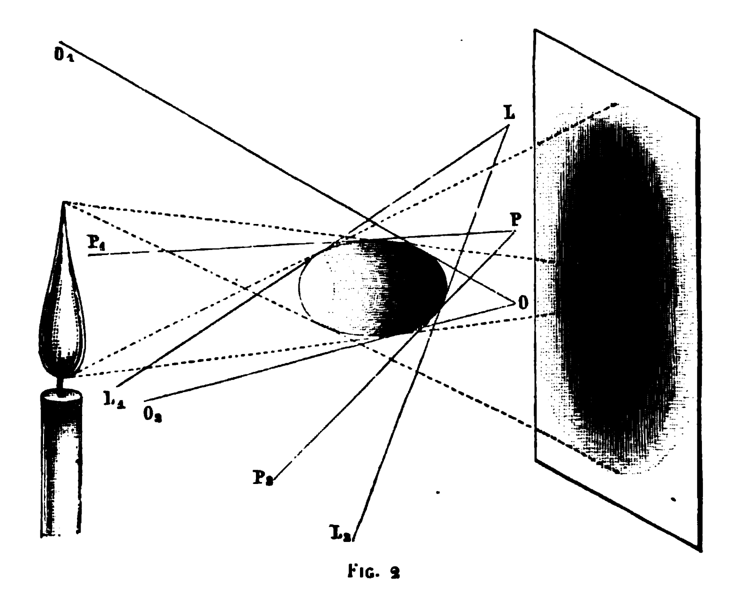


FIG. 2

une partie commune à tous les cônes d'ombre, et qui, par conséquent, ne reçoit de lumière d'aucun des points de la source : c'est *l'ombre* proprement dite. Il y a aussi des parties de l'espace qui, étant en dehors de tous les cônes d'ombre, sont éclairées par tous les points de la source. Enfin, il existe des points de l'espace, tels que P, compris à l'intérieur des cônes d'ombre correspondant à certains points de la source, non éclairés par

ces points, par conséquent, mais qui, étant en dehors des cônes d'ombre des autres points de la source, sont éclairés par ceux-ci : ces points P sont dans la pénombre.

Pour décider si un point lumineux appartient à l'ombre, à la pénombre ou à la partie éclairée par tous les points de la source, il faut prendre ce point comme sommet d'un cône tangent au corps opaque. Si le cône, comme le cône O_1OO_2, contient toute la source à son intérieur, le sommet O de ce cône est dans l'ombre, puisque les rayons lumineux issus des divers points de la source et qui pourraient aboutir en O sont des droites contenues à l'intérieur du cône, rencontrant, par conséquent, le corps opaque. Si le cône, comme le cône P_1PP_2, contient une portion seulement de la source, la partie contenue à l'intérieur n'envoie pas de lumière au sommet P du cône, mais la portion de la source extérieure au cône éclaire le point P : ce point appartient à la pénombre. Enfin, si le cône, comme le cône L_1LL_2, laisse toute la source en dehors de lui, tous les points de celle-ci éclairent son sommet L : ce point est en pleine lumière.

On voit par là que plus un point P de la pénombre est près de l'ombre, plus faible est la portion de la source qui l'éclaire. C'est donc par degrés continus qu'on passe, en traversant la pénombre, de l'ombre complète à la lumière complète.

On voit aussi que plus est petit l'angle solide sous lequel on voit la source à la distance où l'on considère le phénomène, plus la pénombre est étroite (1) ; et que plus on est près du corps opaque, plus faible aussi est l'épaisseur de la pénombre. C'est ainsi que la source lumineuse étant le Soleil, l'ombre portée sur le sol par un objet placé près de lui n'est entouré que d'une pénombre insensible, tandis que l'ombre projetée par une maison dont le faîte est assez loin du sol a, au contraire, une pénombre très appréciable.

7. IMAGES FOURNIES PAR LES PETITES OUVERTURES. — Suppo-

(1) On peut obtenir des ombres n'ayant pas de pénombre appréciable en se servant comme source lumineuse de l'image réelle du Soleil fournie par un microscope solaire (voir Chap. VII, § 5). Cette image très lumineuse est extrêmement petite ; elle est vue des divers points de la pièce sous un angle tellement faible que la pénombre n'a pas une épaisseur sensible.

sons qu'une petite ouverture, de forme quelconque O (fig. 3), soit percée dans le volet d'une pièce obscure ; supposons, en outre, qu'extérieurement à la pièce il y ait un point lumineux A. Ce point envoie des rayons dont quelques-uns pénètrent par l'ouverture. Ceux-ci sont contenus à l'intérieur du cône décrit par une droite passant par le point lumineux et s'appuyant sur le pourtour de cette ouverture. Si l'on place derrière l'ouverture un écran blanc, ces rayons forment une tache lumineuse A' sur l'écran ; la forme et la grandeur de la tache dépendent de la forme et de la grandeur de l'ouverture.

Supposons maintenant qu'il y ait en dehors de la pièce obscure plusieurs points lumineux A, B, C... ; à chacun d'eux correspond une tache lumineuse A', B', C',... sur l'écran. Si O est un point vers le milieu de l'ouverture, le milieu de chacune des taches lumineuses est à l'endroit A', B' ou C', où la droite qui joint le point lumineux A, B ou C au point O rencontre l'écran. Quand les points lumineux sont dans un même plan, et quand l'écran est parallèle à ce plan, le milieu des taches A', B', C'... ou les taches elles-mêmes si elles sont petites, dessinent ainsi sur l'écran une figure géométriquement semblable à celle formée par les points A, B, C... En outre, les taches sont de la même couleur que les points correspondants et présentent entre elles le même rapport dans leur intensité lumineuse. Si donc l'ouverture est assez petite pour que chacune d'elles soit assimilable à un point, on a sur l'écran une image fidèle de la figure formée par les points

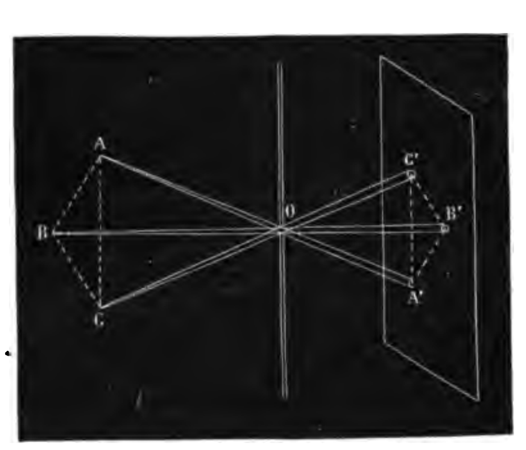


Fig. 3.

lumineux. Les dimensions linéaires de cette image sont évidemment proportionnelles à la distance de l'écran à l'ouverture.

Si les points lumineux ne sont pas dans un même plan ou sont dans un plan non parallèle à l'écran, on a sur celui-ci une image semblable à la projection conique de la figure formée par les points sur un plan parallèle au plan de l'écran, en prenant l'ouverture pour point de vue.

L'image est renversée; car si A est au dessus de C, la tache A' est au-dessous de la tache C'.

Quand les points lumineux sont très rapprochés, comme les taches correspondantes ont toujours une certaine largeur, elles peuvent empiéter les unes sur les autres par leurs bords, ce qui rend l'image un peu confuse. Cette image est donc d'autant plus nette — 1° que l'ouverture est plus étroite, — 2° que l'écran est plus loin de l'ouverture, car la largeur des taches augmente peu avec la distance à l'ouverture (augmente proportionnellement à la distance au point lumineux), tandis que leur écartement varie proportionnellement à la distance de l'écran à l'ouverture.

Enfin, considérons le cas général où, extérieurement à la pièce obscure, se trouve un objet quelconque suffisamment éclairé. Cet objet se composant d'une infinité de points lumineux, chacun d'eux donne naissance à une tache d'une certaine largeur, qui empiète nécessairement sur les taches correspondant aux points voisins; il se forme donc sur l'écran une image plus ou moins confuse de l'objet, renversée par rapport à lui (fig. 4). Si cette image gagne en netteté, en diminuant la largeur de l'ouverture, elle perd en intensité lumineuse, car un moins grand nombre de rayons concourent à la formation de la tache qui correspond à chaque point lumineux. Il en est de même si l'on écarte l'écran de l'ouverture, l'image qui grandit proportionnellement à la distance devient plus nette, puisque les taches correspondant à deux points voisins empiètent moins les unes sur les autres, mais elle perd en intensité. En effet, toute la lumière répandue sur un centimètre carré de la surface se trouve répandue sur un carré ayant n centimètres de côté, si la distance de l'écran à l'ouverture devient n fois plus grande, c'est-à-dire sur un carré d'une surface n^2 fois plus considérable; il y a donc par unité de

surface de l'image, dans la seconde position de l'écran, une quantité de lumière qui est la fraction $\frac{1}{n^2}$ de celle qui existait dans la première position.

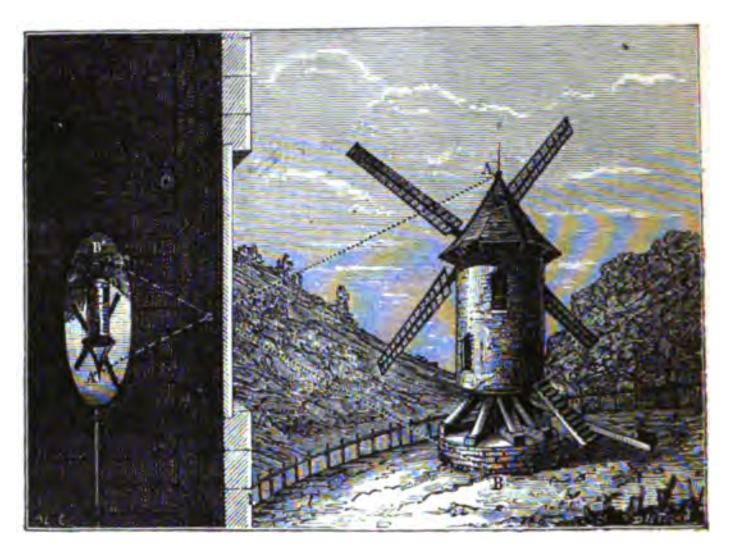


FIG. 4.

Ces phénomènes s'observent très aisément ; ils donnent l'explication des taches lumineuses rondes ou plus souvent ovales, qui se voient sur le sol à l'ombre d'un arbre éclairé par le Soleil. Les feuilles laissent entre elles des interstices qui jouent chacune le rôle de l'ouverture de la chambre obscure. Si la surface du sol est perpendiculaire à l'axe du cône sous lequel on voit de l'ouverture le contour du Soleil, la tache lumineuse est ronde ; si le sol est oblique à l'axe de ce cône, ce qui est le cas général, la tache est elliptique, étant dans tous les cas et quelle que soit la forme de l'ouverture, semblable à la projection conique du Soleil sur un plan parallèle au sol, en prenant comme point de vue l'ouverture. Au moment d'une éclipse partielle ou annulaire, ces taches présentent la forme d'un croissant ou d'un anneau

Le phénomène des images fournies par les petites ouvertures a été observé dès l'antiquité; mais l'explication exacte n'en a été donnée que dans les temps modernes par Maurolyco (1) d'abord, puis plus complètement par Kepler (2). C'est en 1560 que Porta (3) fonda sur ce principe l'appareil d'optique connu sous le nom de *chambre noire*. Il consiste en une caisse à parois noircies intérieurement; dans le fond est un écran blanc et, vis-à-vis, la paroi est percée d'une petite ouverture qui donne sur l'écran une image renversée des objets extérieurs. Nous verrons plus loin comment l'emploi d'une ou de plusieurs lentilles a permis de donner une grande netteté à l'image tout en augmentant son intensité.

(1) François Maurolyco, géomètre, né à Messine en 1494, mort en 1575.

(2) Jean Kepler, célèbre astronome, né à Magstatt, près de Weil (Wurtemberg) en 1571, mort en 1630.

(3) Giambattista Porta, physicien italien, né à Naples en 1540, mort en 1615.

CHAPITRE II

RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

1. **RÉFLEXION ET DIFFUSION.** — Quand un rayon lumineux rencontre la surface de séparation du milieu qu'il vient de traverser et d'un second milieu de nature différente, une portion de la lumière revient vers le premier milieu.

Si la surface de séparation est mate, c'est-à-dire présente de nombreuses aspérités très petites, la lumière revient vers le premier milieu dans toutes les directions, à partir du point frappé par le rayon; on donne à ce phénomène le nom de *diffusion.* C'est la lumière diffusée qui, arrivant à l'œil, nous fait voir la surface.

Mais si la surface de séparation est parfaitement polie, la lumière revient non plus dans toutes les directions, mais en formant un rayon dont la position est parfaitement déterminée par rapport à la position du rayon qui a frappé la surface (*rayon incident*) et par rapport à la surface elle-même. Ce rayon est appelé *rayon réfléchi,* et l'on donne au phénomène le nom de *réflexion.*

Il est bon de faire remarquer qu'entre une surface complètement mate et une surface parfaitement polie, il y a toutes les transitions possibles. Aussi, comme une substance ne peut avoir qu'un poli plus ou moins imparfait, il y a toujours une diffusion plus ou moins faible qui accompagne la réflexion. Cette diffusion est presque nulle avec les métaux bien polis, le verre, la surface de l'eau, etc.

Nous reviendrons plus loin sur le phénomène de la diffusion; nous allons d'abord nous occuper de la réflexion.

2. LOIS GÉOMÉTRIQUES DE LA RÉFLEXION. — Au point I (fig. 5), où le rayon incident SI frappe la surface réfléchissante (*point d'incidence*), menons la normale à cette surface. Cette normale IN et le rayon incident IS déterminent un plan, qu'on appelle le *plan d'incidence*.



Fig. 5.

L'angle SIN, que forme le rayon incident avec la normale, s'appelle l'*angle d'incidence*; l'angle RIN, que forme le rayon réfléchi avec la même normale, s'appelle *l'angle de réflexion*.

Ces définitions étant données, voici les lois qui font connaître la position du rayon réfléchi :

1° *Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.*

2° *Le rayon réfléchi et le rayon incident sont situés de part et d'autre de la normale, et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.*

D'après ces lois, on voit qu'il y a réciprocité entre la marche du rayon incident et celle du rayon réfléchi; c'est-à-dire que, si un deuxième rayon incident a la direction du premier rayon réfléchi, le second rayon réfléchi a la direction du premier rayon incident.

On peut établir expérimentalement ces lois de plusieurs manières.

Dans les cours, on se sert souvent d'un appareil représenté figure 6 (1). Il se compose d'un petit miroir plan O placé au centre d'un cercle gradué GG′, et perpendiculairement à son plan. Deux alidades, A et D, disposées comme deux rayons du cercle gradué, peuvent tourner autour de son centre. L'une porte un tube B, présentant un écran percé d'un trou sur l'axe

(1) Cet appareil très simple est connu aujourd'hui sous le nom d'*appareil de Silbermann*; mais il est d'origine bien plus ancienne puisqu'il se trouve déjà décrit dans les *Leçons de Physique* de l'abbé Nollet (1768).

du tube; un petit miroir M, mobile à volonté, permet de renvoyer, suivant cet axe, la lumière du Soleil. On obtient ainsi un faisceau qui vient frapper la surface réfléchissante sur la per-

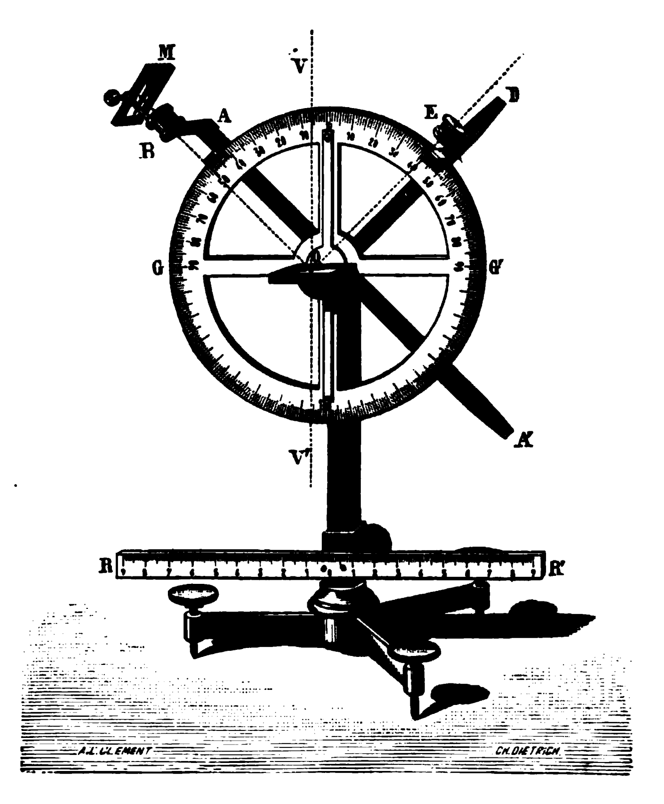


FIG. 6.

pendiculaire au cercle gradué passant par son centre. Le rayon qui forme l'axe du faisceau étant considéré comme rayon incident, le plan d'incidence est parallèle au plan du cercle, puisque la normale VV' à la surface réfléchissante et le rayon incident lui sont parallèles. La seconde alidade D porte un petit écran de verre dépoli E, présentant en son milieu un point de repère situé à une distance du cercle gradué égale à la distance à ce cercle de l'axe du tube B. On voit que, dans le mouvement de

la seconde alidade, ce point de repère reste toujours dans le plan d'incidence.

Or, on constate que, quelle que soit la position du faisceau incident, on peut toujours disposer l'alidade D de façon que le verre dépoli qu'elle porte soit frappé par le faisceau réfléchi, le milieu de la tache lumineuse étant sur le point de repère, ce qui démontre la première loi.

D'autre part, la normale VV′ à la surface réfléchissante correspond au zéro de la graduation du cercle, et les deux alidades portent des lignes de repère suivant un rayon exact de celui-ci, pour l'une, vis-à-vis de l'axe du tube B, pour l'autre, vis-à-vis du point de repère du verre dépoli. Or, quand on a disposé l'expérience de façon à recevoir sur ce point le milieu de la tache lumineuse, l'angle indiqué par le repère de la seconde alidade est précisément l'angle de réflexion, tandis que l'angle indiqué par le repère de la première alidade est l'angle d'incidence. On constate par la lecture que ces angles sont égaux entre eux, ce qui démontre la seconde loi.

Cette expérience a le mérite d'être une vérification directe; mais on voit aisément qu'elle ne saurait comporter une grande précision. La suivante est susceptible d'une exactitude bien plus grande.

Pour comprendre ce que nous allons exposer, rappelons qu'on appelle *viser* un point avec une lunette astronomique disposer celle-ci de façon que le point soit vu en coïncidence avec la croisée des fils du réticule; dans ce cas, comme nous le verrons plus loin, le point visé se trouve sur une droite dont la position est fixe par rapport à la lunette, et qu'on appelle son *axe optique* (1).

Ceci posé, pour la vérification, on se sert d'un théodolite (2) bien réglé, c'est-à-dire dont le plan de mobilité de l'axe optique est parfaitement vertical dans tous les azimuts où on le place.

(1) Voir Chap. VII, § 15. la description de a lunette astronomique.

(2) Le théodolite (fig. 7) consiste en une lunette astronomique L qui peut tourner autour d'un axe horizontal perpendiculaire à son axe optique, de façon que dans son mouvement celui-ci décrive un plan vertical. Les dépla-

On détermine, en outre, la position de l'alidade, qui rend l'axe optique vertical.

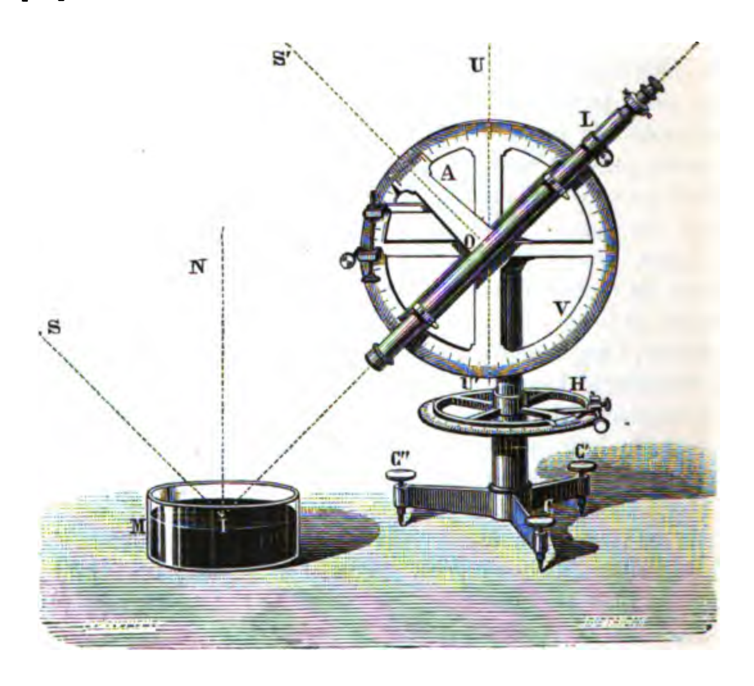


Fig. 7.

Au devant du théodolite, on dispose un bain de mercure M (fig. 7), et, faisant l'expérience la nuit, on vise avec la lunette

cements angulaires de l'axe optique dans ce plan sont donnés par une alidade A pourvue d'un vernier et par un cercle gradué vertical V. Tout ce système est mobile autour d'un axe vertical, de façon à pouvoir placer la lunette dans tous les azimuts. L'angle dont tourne le plan vertical V est donné par une alidade pourvue d'un vernier, et se déplaçant sur un cercle gradué horizontal H (cette graduation est inutile pour l'expérience que nous avons en vue); des vis calantes C, C', C'' et un niveau à bulle d'air permettent de rendre l'axe de rotation parfaitement vertical. A l'aide de boutons de serrage, on peut fixer les pièces mobiles dans la position convenable, et, au moyen de vis de rappel, il est facile de les amener à la position voulue.

l'étoile polaire, dont la position ne change pas d'une quantité appréciable pendant la durée de l'expérience.

Alors, si l'on déplace la lunette dans son plan vertical de mobilité, sans modifier l'azimut de celui-ci, on constate qu'on peut viser l'étoile polaire par réflexion sur la surface du mercure : c'est une vérification de la première loi. Remarquons, en effet, que l'étoile est assez loin pour que les rayons lumineux qu'elle envoie et qui tombent dans le voisinage de l'opérateur puissent être considérés comme parallèles entre eux ; or, comme les normales à la surface du mercure sont verticales, les plans d'incidence de tous les rayons qui tombent sur cette surface sont des plans verticaux parallèles entre eux. Ces plans sont, en outre, parrallèles au plan de mobilité de l'axe optique de la lunette, puisque celui-ci est un plan vertical qu'on a disposé de façon à contenir l'un des rayons S'O émis par l'étoile polaire, quand on a visé directement cette étoile. Or, soit I le point où l'axe optique de la lunette perce la surface du mercure, quand celle-ci occupe la seconde position. Le plan de mobilité de l'axe optique se confond avec le plan d'incidence SIN. L'étoile étant vue par réflexion, il faut que le rayon réfléchi provenant de SI soit suivant l'axe optique, c'est-à-dire dans le plan d'incidence.

En outre, si l'on fait la lecture du vernier dans la première et dans la deuxième position, on constate que l'axe optique fait avec la verticale UU' des angles S'OU et IOU' égaux entre eux : c'est la démonstration de la deuxième loi. En effet, l'angle S'OU est égal à l'angle d'incidence SIN, comme ayant ses côtés parallèles et dirigés dans le même sens, et l'angle IOU' est égal à l'angle de réflexion NIO comme alternes-internes.

Enfin, l'une des meilleures preuves de l'exactitude des lois de la réflexion est le parfait accord qui existe entre la théorie de la réflexion à la surface des miroirs plans ou courbes fondée sur ces lois et le résultat de l'expérience même, comme le montre tout ce qui va suivre.

3. RÉFLEXION A LA SURFACE D'UN MIROIR PLAN. — Soit S un point lumineux placé devant un miroir plan M (fig. 8). Considérons un rayon quelconque SI issu du point S et frappant en I

la surface réfléchissante ; soient IN la normale en I et IR le rayon réfléchi. Abaissons du point S la perpendiculaire SPS' sur le plan du miroir. D'après la première loi de la réflexion, le rayon réfléchi IR est dans le plan d'incidence NIS ; par conséquent, le prolongement IS' de ce rayon rencontre nécessairement, en un certain point S', la perpendiculaire SPS' située aussi dans ce plan comme parallèle à IN.

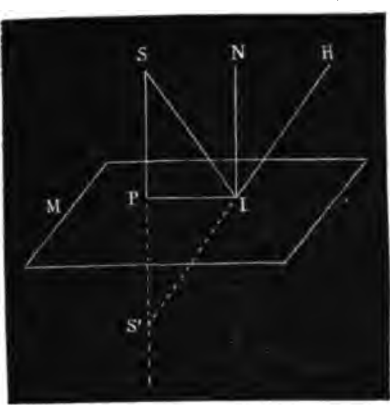


FIG. 8.

Or, les deux triangles SPI et S'PI sont égaux entre eux. En effet, les angles en P sont droits ; les angles PSI et PS'I sont égaux, comme égalant respectivement l'angle d'incidence SIN et l'angle de réflexion RIN, [angles égaux entre eux d'après la seconde loi de la réflexion ; enfin, le côté PI est commun. Il en résulte que les côtés SP et S'P opposés aux angles en I sont égaux. On voit ainsi que le point de rencontre S' du prolongement du rayon réfléchi et de la perpendiculaire SP est le symétrique du point lumineux S par rapport au plan réfléchissant.



FIG. 9.

Le rayon considéré SI étant quelconque, tous les rayons issus du point S donnent naissance à des rayons réfléchis dont les

prolongements de l'autre côté du plan M se coupent en un même point S' symétrique de S. Quand un faisceau de ces rayons réfléchis pénètre dans un système optique quelconque, il y produit évidemment le même effet que s'il provenait réellement du point S'; en particulier, si l'œil le reçoit (fig. 9), l'observateur croit voir en S' un point lumineux jouissant des mêmes propriétés optiques que celles du point S, c'est-à-dire étant de la même couleur, ayant le même éclat relatif, etc. (1)

Par conséquent, si un objet est placé devant un miroir plan, les rayons provenant de chaque point de l'objet, après réflexion, paraissent venir du point symétrique; l'œil (ou un instrument d'optique quelconque) doit donc éprouver le même effet que si chaque point de l'objet, en gardant les mêmes propriétés optiques, avait été transporté dans la position symétrique par rapport au miroir, formant ainsi le *symétrique* de l'objet lui-même : *un miroir plan donne d'un objet une image qui est le symétrique de cet objet* (2).

Cette image est dite *virtuelle*, parce que n'étant pas formée par le concours réel des rayons lumineux, elle ne peut se peindre sur un écran blanc, comme les images fournies par les petites ouvertures, qui sont dites *images réelles.*

Les glaces d'appartement étant des miroirs plans, l'observation de tous les jours justifie pleinement cette conséquence des lois de la réflexion (3).

(1) Nous supposons implicitement ici que la surface réfléchissante jouit de la propriété de réfléchir en même proportion toutes les couleurs du spectre, comme cela a lieu pour l'argent poli, le verre et la plupart des substances employées pour faire des miroirs. Mais il existe des substances, le cuivre par exemple, qui ne réfléchissent pas en proportions égales toutes les couleurs et, dans ce cas, l'image S' du point S peut être colorée différemment; ainsi le cuivre donne un ton rouge à la lumière qu'il réfléchit.

(2) On sait que le symétrique d'une figure n'est généralement pas superposable à la figure même; cela n'a lieu que si la figure présente un plan de symétrie. Ainsi, quand, devant une glace d'appartement, on étend le bras droit, l'image que l'on voit paraît étendre le bras gauche.

(3) On peut montrer d'une façon très élégante, dans un cours, cette propriété des miroirs plans. De part et d'autre d'une glace transparente on dispose deux flambeaux portant des bougies de même hauteur, en plaçant symétriquement les mèches par rapport à la glace. On allume la bougie qui

4. OBJET VIRTUEL. — On peut, à l'aide d'un miroir concave, d'une lentille convergente ou d'autres dispositions optiques, amener tous les rayons qui partent d'un même point lumineux A (fig. 10), et qui vont en divergeant à partir de ce point, à con-

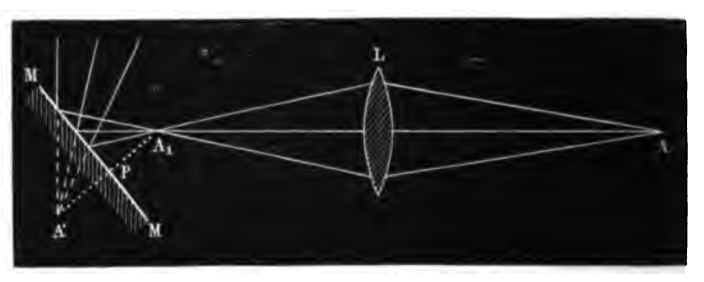


FIG. 10.

verger en un autre point A_1. Ce point A_1 jouit des mêmes propriétés optiques que le point A, il en est une *image réelle*. Ce phénomène se produisant pour tous les points d'un objet lumineux, l'ensemble des images réelles des divers points forme une image réelle de l'objet, ressemblant plus ou moins à l'objet luimême.

Si, au delà de l'image réelle de l'objet, on vient à placer un miroir MM, ou toute autre surface optique, cette image réelle se comporte absolument comme un objet lumineux réel, car les rayons qui se sont entrecroisés en un point A_1 de l'image réelle divergent ensuite à partir de ce point. Aussi, pour les phénomènes auxquels donne lieu la surface optique MM, on appelle souvent cette image A_1 un *objet réel.*

Mais supposons que l'on place la surface optique, par exem-

est du côté des auditeurs : l'image virtuelle de la flamme donnée par réflexion sur ce miroir plan est superposée à la mèche de la seconde bougie qui paraît ainsi allumée,

C'est par un procédé analogue qu'on produit dans les théâtres les *spectres impalpables* : une glace transparente, convenablement inclinée, est disposée entre la scène et les spectateurs , elle donne une image virtuelle placée sur la scène d'un personnage fortement éclairé et qui n'est pas directement visible pour le public.

ple le miroir MM, en avant du point A_1, où les rayons convergaient (fig. 11) : la marche de ces rayons est modifiée par la rencontre de la surface MM, et ils ne vont plus concourir en A_1. En général, on peut déterminer facilement leur nouvelle direction en consi-

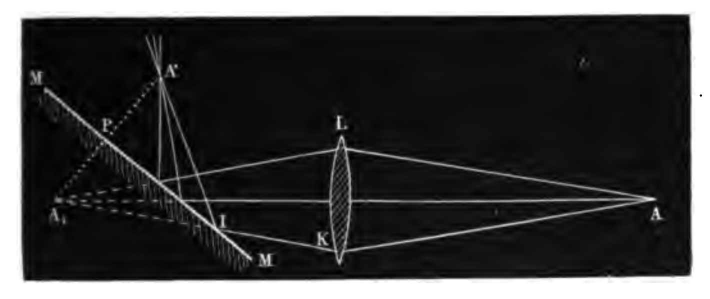


Fig. 11.

dérant le point A_1 ; ou, plus généralement, on peut trouver la marche de l'ensemble des rayons, en considérant l'image réelle que formeraient les points tels que A_1, si la surface optique MM n'existait pas. Par rapport à celle-ci, le point A_1, ou l'ensemble des points tels que A_1, prend le nom d'*objet virtuel.*

Nous allons montrer tout de suite, pour mieux faire saisir cette notion, comment se fait la réflexion à la surface d'un miroir plan dans le cas d'un objet virtuel.

Considérons un certain nombre de rayons, rencontrant un miroir plan MM (fig. 11), et supposons que ces rayons prolongés derrière le miroir aillent se rencontrer en un même point A_1 : ce point A_1 est un objet virtuel par rapport au miroir. Parmi ces rayons, considérons en un, le rayon KI ; ce rayon se réfléchit suivant IA' et rencontre en A' la perpendiculaire A_1PA' abaissée de A_1 à la surface du miroir MM, car elle se trouve dans le plan d'incidence du rayon KI. On démontre, absolument comme précédemment au § 3, que le point A' est symétrique du point A_1 par rapport à la surface du miroir plan. Par conséquent, tous les rayons qui convergeraient en A_1, si le miroir MM n'existait pas, vont converger en A' symétrique de A_1, après leur réflexion : le point A' est une image de l'objet virtuel A_1.

Cette image est *réelle* puisque les rayons se rencontrent réellement en A′ et pourraient donner naissance à un point lumineux sur un écran qu'on placerait en cet endroit : ***un miroir plan donne d'un objet virtuel, une image réelle symétrique de l'objet.***

Pour faire l'expérience, on forme, à l'aide d'une lentille ou d'un miroir concave, une image réelle d'un objet lumineux, d'une bougie allumée par exemple ; cette image peut se peindre sur un écran blanc convenablement placé. On dispose ensuite en avant de cette image le miroir plan, et l'on constate alors, qu'en plaçant l'écran blanc dans une position symétrique de la première, par rapport au miroir, il s'y peint une image réelle de même grandeur que l'image précédente.

5. Réflexions successives sur deux miroirs plans parallèles. — Soient deux miroirs plans parallèles MN et M′N′ (fig. 12).

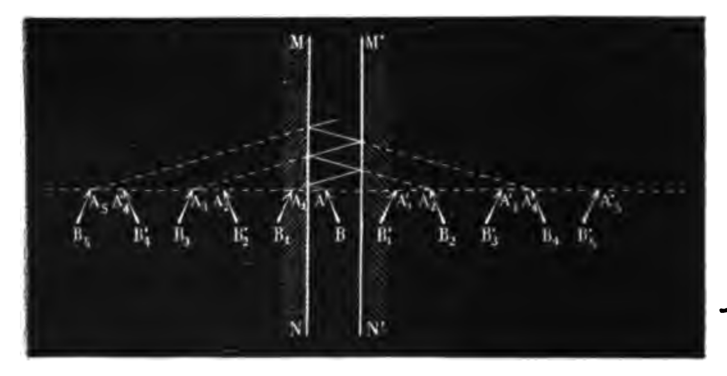


Fig. 12.

Un point lumineux A placé entre eux envoie des rayons dans toutes les directions ; considérons d'abord ceux qui tombent sur le miroir MN : après réflexion, ils se dirigent comme s'ils venaient de A_1 symétrique de A par rapport à MN. Ces rayons subissent une seconde réflexion sur M′N′, et après ils se dirigent comme s'ils venaient de A_2 symétrique de A_1 par rapport à M′N′. Puis, ils subissent une troisième réflexion sur MN, et se dirigent

ensuite comme s'ils venaient de A_3 symétrique de A_2 par rapport à MN, et ainsi de suite. Toutes ces images A_1, A_2, A_3... du point A sont sur une perpendiculaire commune aux deux miroirs passant par A.

Ce que nous venons de dire pour un point s'appliquant à tous les points d'un objet, l'œil tourné vers MN peut voir une succession indéfinie d'images, A_1B_1, A_3B_3 A_5B_5, ..., d'un objet AB placé entre les miroirs, toutes symétriques de cet objet et correspondant à 1, 3, 5... réflexions. Si l'œil était tourné du côté de M'N', il verrait une série indéfinie d'images A_2B_2, A_4B_4, ... correspondant à 2, 4... réflexions; ces images étant les symétriques des symétriques de l'objet, lui sont superposables.

Mais, outre cette première série d'images, il est clair que l'œil tourné vers M'N' voit aussi une seconde série d'images symétriques de l'objet $A_1'B_1'$, $A_3'B_3'$, ... correspondant à un nombre impair de réflexions, la première ayant lieu sur M'N'. De même, l'œil tourné vers MN, voit, outre la première série d'images indiquée plus haut, une seconde série d'images superposables à l'objet $A_2'B_2'$, $A_4'B_4'$,... correspondant à un nombre pair de réflexions, la première ayant lieu sur M'N'. Ainsi, en regardant de l'un ou de l'autre côté, on voit deux séries d'images, les unes symétriques de l'objet, les autres superposables à l'objet.

Il est aisé de voir que les images symétriques de l'objet doivent alterner avec les images qui lui sont superposables. Désignons, en effet, par a la distance des deux miroirs et par x la distance d'un point A compris entre eux au miroir MN vers lequel nous supposerons le spectateur tourné. On voit immédiatement que les distances à MN des images symétriques A_1, A_3, A_5, ... sont x, $2a + x$, $4a + x$, ... $2na + x$ tandis que les distances à MN des images superposables A_2', A_4', etc., sont $2a - x$, $4a - x$, ... $2na - x$. Or, x pouvant varier de 0 à a, les images symétriques fournies par 1, 3, 5... réflexions, sont à des distances respectivement comprises entre 0 et a, $2a$ et $3a$, $4a$ et $5a$, etc., tandis que les images identiques fournies par 2, 4... réflexions sont respectivement comprises entre a et $2a$. $3a$ et $4a$, etc...; elles sont donc alternes avec les précédentes,

Tout le monde a pu constater le phénomène que nous venons

de décrire, dans un salon où deux glaces parallèles se font face l'une à l'autre. Les images successives sont de plus en plus pâles, parce qu'à chaque réflexion, il y a une perte de lumière (1).

(1) Les glaces des appartements sont formées par une lame de verre plus ou moins épaisse à faces planes et parallèles. La face postérieure PQ (fig. 13) étant étamée ou argentée, réfléchit une portion de la lumière incidente beaucoup plus considérable que la face antérieure MN qui laisse passer dans le verre une fraction considérable de la lumière incidente.

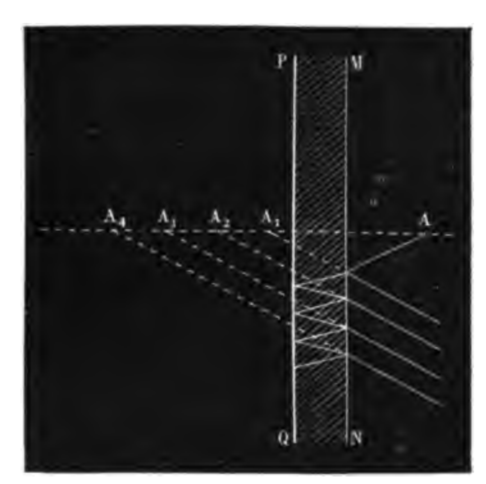


Fig. 13.

Un objet A placé au devant de ce miroir donne une première image pâle A_1, par suite de la réflexion sur la face antérieure, symétrique de l'objet par rapport à cette face MN, puis une deuxième image brillante A_2, due à la réflexion sur le métal PQ de la lumière qui a traversé le verre. Mais une faible fraction de la lumière réfléchie par le métal, et qui traverse le verre se réfléchit sur l'air à la première face MN, retourne sur la seconde face PQ où elle subit une troisième réflexion, ce qui donne une troisième image A_3 moins intense que la première A_1. De même une fraction de la lumière qui a subi déjà trois réflexions se réfléchit sur l'air à la première face MN, puis se réfléchit une cinquième fois sur le métal, ce qui donne une quatrième image A_4; et ainsi de suite, il se forme une série d'images de plus en plus pâles. Quand on regarde les objets par réflexion dans une direction voisine de la normale, ces images successives qui sont très rapprochées se superposent en partie: en outre, comme la seconde est de beaucoup la plus intense on ne voit guère qu'une image de l'objet. Mais, si l'on regarde dans le miroir un objet brillant, comme la flamme d'une bougie, sous une incidence tres oblique, les images successives se détachant mieux les unes des autres, et, en outre, le rapport de leur intensité à celle de la seconde image augmentant, on les distingue nettement.

6. RÉFLEXIONS SUCCESSIVES SUR DEUX MIROIRS PLANS FAISANT ENTRE EUX UN CERTAIN ANGLE. — Considérons maintenant deux miroirs plans MO et M'O (fig. 14) faisant entre eux un certain angle. Soit un point lumineux A situé entre ces miroirs; prenons comme plan de figure le plan mené par A perpendiculairement à l'arête du dièdre que forment entre eux les deux miroirs; soit O la trace de cette arête.

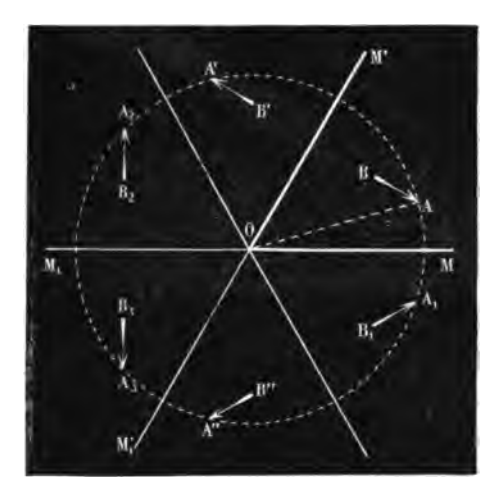


Fig. 14.

Le point A par réflexion sur MO' donne une première image A_1 symétrique de A par rapport à MO et par conséquent à la même distance du point O; cette image se trouve ainsi sur la circonférence décrite de O pour centre, avec AO pour rayon. L'image virtuelle A_1 fonctionne comme objet vis-à-vis du miroir M'O, et les rayons deux fois réfléchis semblent provenir du point A_2 image virtuelle de A_1 par rapport à M'O, par conséquent, située sur la même circonférence, et ainsi de suite. On voit, de même que dans le cas précédent, qu'il existe une série d'images alternativement symétriques de l'objet et superposables à lui; les premières sont dues à un nombre impair de

Il est aisé de voir que malgré le phénomène de la réfraction, qui complique un peu ce que nous venons d'exposer, toutes ces images doivent être équidistantes, comme le montre l'observation.

C'est la formation de ces images multiples qui empêche d'employer les glaces métallisées sur leur face postérieure dans la construction des instruments d'optique.

réflexions, dont la première commence sur le miroir dans lequel on regarde; les secondes sont dues à un nombre pair de réflexions, dont la première s'effectue sur l'autre miroir.

Si nous désignons par a l'angle des deux miroirs et par x l'angle AOM, on voit immédiatement que les images symétriques sont dans des plans passant par l'arête O et faisant avec OM des angles respectivement égaux à x, $2a + x$, $4a + x \ldots 2na + x$; tandis que pour les images superposables à l'objet, les angles avec OM sont $2a - x$, $4a - x \ldots$, $2na - x$. Or, x pouvant varier de 0 à a, les images symétriques fournies par 1, 3, 5... réflexions sont à des distances angulaires de OM, respectivement comprises entre 0 et a, $2a$ et $3a$, $4a$ et $5a$, etc...; tandis que pour les images superposables, ces distances sont respectivement comprises entre a et $2a$, $3a$ et $4a$, etc...

Mais ici le nombre des images n'est pas infini; en effet, une image telle que A_3 (fig. 14), qui est fournie par une dernière réflexion sur OM, et qui se trouve derrière la surface du miroir OM' (prolongée en OM_1'), ne peut envoyer aucun rayon frappant cette surface réfléchissante: l'image A_3 est, par conséquent, la dernière image de A.

D'après cela, si l'on a $na = \pi$, en désignant par n un nombre entier, on pourra voir dans chacun des miroirs n images, la dernière image étant dans l'angle opposé par le sommet à l'angle des deux miroirs et, par conséquent, occupant la même position que l'on regarde dans l'un ou dans l'autre miroir. Comme on peut voir à la fois les images dans les deux miroirs, l'objet est répété par réflexion $2n - 1$ fois: tant directement que par réflexion, on voit $2n$ fois l'objet ou son symétrique (n fois l'un n fois l'autre alternativement) [1].

Si maintenant l'angle a n'est pas une fraction exacte de la

(1) C'est sur ce principe qu'est fondé le *kaléidoscope*. Ce petit instrument, inventé par Brewster en 1817, se compose de deux lames de verre faisant entre elles un angle qui le plus souvent est de 60° $\left(a = \frac{\pi}{3}\right)$. Ces lames, très allongées dans le sens de l'arête du dièdre qu'elles forment, sont contenues dans un tube, fermé en arrière par deux lames de verre, la première transparente, la seconde dépolie. Entre les deux lames se trouvent de petits morceaux de verre ou de gélatine colorés. L'autre extrémité du tube est fermée par

demi-circonférence, c'est-à-dire si l'on a $na + \alpha = \pi$, α étant plus petit que a, on peut voir, comme dans le cas précédent par réflexion, dans chaque miroir n images de tous les points compris entre les deux miroirs; mais (fig. 15) les dernières images fournies dans chaque miroir ne sont plus superposées qu'en partie : elles ne se rencontrent que sur un angle égal à $a - 2\alpha$, si l'on a $a > 2\alpha$, et ne se rencontrent plus si $a \leq 2\alpha$. En outre, ces dernières images complètes de tout l'espace compris entre les miroirs sont sui-



Fig. 1

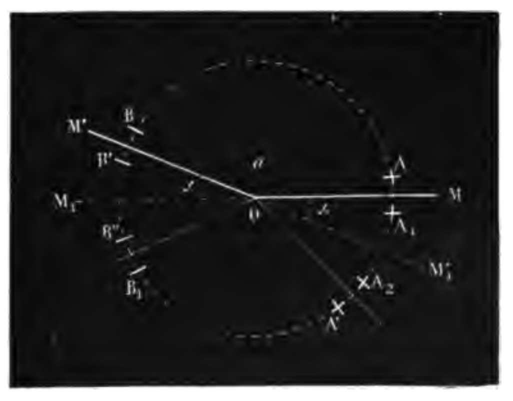


Fig. 16.

une plaque opaque percée d'un trou, qui permet de regarder dans l'intérieur. Les petits objets colorés forment une figure qui change chaque fois qu'on agite l'instrument; par suite de la réflexion sur les lames, on voit six fois cette figure ou son symétrique, ce qui donne un dessin étoilé d'un

vies d'images dues à une réflexion de plus et ne comprenant qu'une portion d'angle α de l'espace compris entre les miroirs. Si n est pair, comme la $n^{ème}$ réflexion donne une image superposable à l'objet, c'est la portion d'angle α adjacente au miroir dans lequel on regarde qui est reproduite par la $(n+1)^{me}$ réflexion (fig. 15), tandis que si n est impair, c'est la portion adjacente à l'autre miroir (fig. 16).

7. **MIROIRS SPHÉRIQUES.** — On donne le nom de *miroir sphérique* à un miroir dont la surface est une portion de sphère. Les miroirs sphériques peuvent être *concaves* ou *convexes*, suivant que la réflexion se fait sur le côté de la surface sphérique qui est tourné vers le centre de courbure ou sur le côté opposé. Ces deux formes de miroirs jouissent évidemment de propriétés optiques différentes.

Après les miroirs plans, ce sont les miroirs sphériques dont l'étude est la plus simple, et ce sont eux aussi qui sont les plus employés en optique. Du reste, on peut considérer le miroir plan comme un cas particulier des miroirs sphériques, celui où le rayon de courbure est infini : le miroir plan forme la transition entre les miroirs sphériques concaves et les miroirs sphériques convexes.

Dans l'étude de la réflexion à la surface d'un miroir sphérique de rayons issus d'un même point, nous supposerons d'abord que ces rayons s'écartent peu les uns des autres. La considération de ce cas conduit à des résultats simples et d'une grande importance par leur fréquente application. Sous le titre d'*aberrations de sphéricité*, nous verrons dans un autre chapitre comment ces résultats doivent être modifiés, si l'on considère des rayons s'écartant notablement les uns des autres.

joli effet, d'où le nom de *kaléidoscope*. (καλος beau, εἶδος aspect, σκοπέω je regarde). Les lames de verre sont couvertes d'un vernis mat sur leur face postérieure de façon à ne réfléchir la lumière que sur la face antérieure. Comme la réflexion se fait sous un angle très grand, il y a une notable proportion de lumière réfléchie ; pourtant les images sont de plus en plus sombres à mesure qu'elles correspondent à un nombre plus grand de réflexions.

8. THÉORIE DE LA RÉFLEXION A LA SURFACE D'UN MIROIR SPHÉRIQUE CONCAVE. — Nous diviserons l'étude de la réflexion à la surface d'un miroir sphérique concave en quatre parties, selon la position de l'objet.

1° IMAGE D'UN POINT PLACÉ AU DELA DU CENTRE DE COURBURE. — Soit A un point lumineux placé devant un miroir sphérique concave à une distance supérieure au rayon de courbure de la sphère dont le miroir fait partie; soit O le centre de cette sphère (fig. 17). Joignons le point A au centre O; la droite AO s'appelle l'*axe* du point A. Si cet axe rencontre le miroir et qu'un rayon lumineux prenne cette direction, ce rayon tombant normalement à la surface réfléchissante, revient exactement sur lui-même après réflexion.

Considérons maintenant, parmi les rayons lumineux issus de A, un autre rayon quelconque AI, frappant en I le miroir. Pour avoir le rayon réfléchi qui en provient, menons la normale au point I; celle-ci n'est autre que le rayon OI de la sphère. Le rayon réfléchi IA', se trouvant dans le plan d'incidence AIO, coupe en un point A' l'axe du point A.

Nous allons montrer que tous les rayons lumineux issus du point A vont, après réflexion, passer par ce même point A', à condition, pourtant, que l'on ne considère que les rayons qui s'écartent peu de l'axe OA.

Prenons comme plan de figure le plan d'incidence AIO; ce plan coupe suivant un arc de grand cercle le miroir. Menons par le point I la tangente IT, à cet arc de cercle, et soit T le point de rencontre de cette tangente avec l'axe AO.

D'après l'égalité de l'angle d'incidence AIO et de l'angle de réflexion A'IO, la droite IO est la bissectrice de l'angle AIA' du triangle AA'I; la droite IT, perpendiculaire à IO, est la bissectrice de l'angle A'IV extérieur à ce triangle. On sait que ces deux bissectrices et les côtés du triangle forment un faisceau harmonique, et qu'on a la relation :

$$(1) \qquad \frac{OA}{OA'} = \frac{TA}{TA'}$$

Si le rayon AI s'écarte peu de l'axe AO, l'angle IOT est petit et le point T est très voisin du point C où l'axe perce le miroir.

En effet, désignons par α la valeur de l'angle IOT, on a dans le triangle rectangle OIT :

$$OT = \frac{OI}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

en appelant R le rayon de la sphère. Or :

$$CT = OT - OC = \frac{R}{\cos\alpha} - R = R\left(\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) = R\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

Ainsi, en négligeant CT devant OC, on ne commet qu'une erreur qui est de l'ordre du carré de $\sin\frac{\alpha}{2}$ et, par conséquent, de l'ordre du carré de α.

Par exemple, si l'angle IOT est égal à 5°, on a :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}0436 \quad \text{et} \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = 0{,}001901$$

ce qui fait que CT est inférieur à $\frac{R}{250}$.

Négligeons donc, pour simplifier, la distance CT ; la relation (1) devient :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{CA}{CA'} \tag{2}$$

Posons, pour abréger, $CA = p$, $CA' = p'$, $CO = R$; la relation (2) s'écrit alors :

$$\frac{p - R}{R - p'} = \frac{p}{p'} \tag{3}$$

On voit que chaque rayon issu d'un point A situé à une distance p du miroir, va, après réflexion, couper l'axe OA, en un point A' dont la distance p' au miroir est donnée par la rela-

tion (3). Ce point, par conséquent, est le même pour tous les rayons issus de A, puisque la distance p' est indépendante de l'angle α : *il se forme en* A' *une image réelle du point* A.

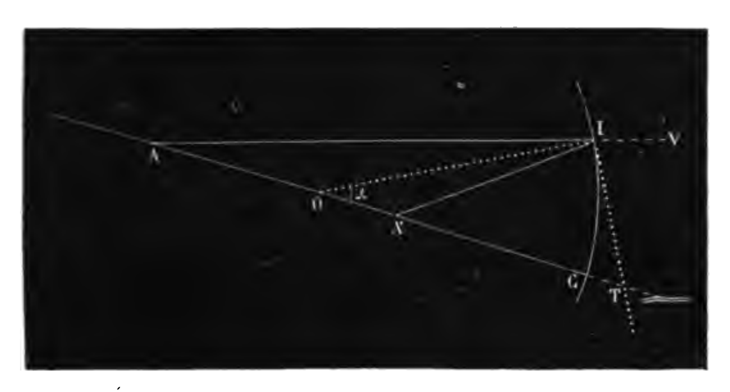


Fig. 17.

Mettons la relation (3) sous une forme plus simple ; on tire de (3)

$$pp' - p'R = pR - pp' \quad \text{d'où :} \quad p'R + pR = 2pp'$$

Et en divisant les deux nombres par $pp'R$, il vient :

$$(4) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}$$

qui est la forme sous laquelle on écrit le plus habituellement cette relation.

2° **Les images de points situés dans un plan perpendiculaire a un axe qui rencontre le miroir, se trouvent dans un plan parallèle.** — Soit AB (fig. 18) une portion d'un plan perpendiculaire à un axe AO qui rencontre le miroir. Les points de ce plan qui sont peu éloignés de l'axe AO sont très voisins des points d'une sphère ayant O pour centre et OA ($=r$) pour rayon. Or, les points de cette sphère sont tous situés à une même distance

$p = r + R$ du miroir ; ils ont, par conséquent, leurs images à une même distance p' de celui-ci (form. 4), sur des droites passant par le point O ; ces images étant à une distance invariable $R - p$



Fig. 18.

du point O, sont sur une sphère A'B' ayant ce point pour centre. Les images sont, du reste, voisines de l'axe AOA' ; or, les points de cette sphère qui sont peu éloignés de AOA', sont très voisins des points du plan tangent à la sphère en A'. On voit par là que des points situés dans un plan AB perpendiculaire à un axe AO qui rencontre le miroir, ont sensiblement leurs images dans un même plan A'B' parallèle à AB, pourvu que ces points soient peu éloignés de l'axe AO.

3° L'image est semblable a l'objet. — Puisque l'image de chacun des points d'un petit objet plan est situé sur l'axe correspondant à ce point, et à l'endroit où cet axe perce un même plan parallèle à celui de l'objet, on voit immédiatement que les images dessinent une figure semblable à celle qui est formée par les divers points de l'objet, et semblablement placée.

Comme, en outre, les points-images présentent les mêmes colorations et les mêmes intensités relatives que les points-objets correspondants, l'ensemble constitue une image de l'objet ; cette image est *réelle* puisqu'elle est formée par la rencontre même des rayons.

On voit aussi que la position de l'image est *renversée* par rapport à celle de l'objet, le point O, où se coupent les axes, étant situé entre l'image et l'objet.

4° Relation entre la grandeur de l'objet et la grandeur de

L'IMAGE. — Considérons un petit objet plan ; menons un axe OA (fig. 19) perpendiculaire à ce plan et désignons par A le point de rencontre de l'axe et de l'objet. Soit AB une des dimensions



FIG. 19.

linéaires de celui-ci ; si A' est l'image du point A, l'image de B est sur l'axe BO au point B' où il perce le plan perpendiculaire à AO mené par A'. Le rayon lumineux BC, qui frappe le miroir au point C où il est rencontré par l'axe AO, vient, après réflexion, passer par l'image B', comme tous les rayons issus de B. Or, les angles BCA et B'CA sont égaux, puisque l'un est l'angle d'incidence et l'autre l'angle de réflexion ; il en résulte que les deux triangles BAC et B'A'C rectangles en A ou A' sont semblables. On a donc la relation :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C}{AC}$$

Le rapport qui existe entre une dimension linéaire de l'objet et son image est le même que le rapport qui existe entre la distance de l'objet et la distance de l'image au miroir.

En désignant par *o* et par *i* les longueurs d'une dimension linéaire de l'objet et de son image, la relation précédente s'écrit :

(5) $$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$$

Dans tous les autres cas qui nous restent à examiner, soit pour le miroir concave, soit pour le miroir convexe, on démontre absolument comme nous venons de le faire ici — 1° que l'image d'un objet plan s'écartant peu d'un axe qui lui est perpendiculaire et qui rencontre le miroir se trouve dans un plan parallèle, — 2° que l'image et l'objet forment des figures homothétiques. — 3° que le rapport entre les dimensions linéaires correspondantes de l'objet et de l'image est le même que le rapport des distances au miroir. Nous ne reviendrons plus sur ces démonstrations.

9. **FOYER. — PLAN FOCAL.** — Quand un point lumineux est à une distance du miroir assez grande pour qu'on puisse la regarder comme infinie vis-à-vis du rayon de courbure du miroir, la distance p' de son image s'obtient en faisant $p = \infty$ dans la formule (4), ce qui donne :

$$\frac{1}{p'} = \frac{2}{R} \quad \text{d'où :} \quad p' = \frac{R}{2}$$

l'image est en un point F (fig. 20), sur l'axe correspondant au point lumineux, à la moitié de la distance du centre O au miroir. Ce



Fig. 20.

point F est ce qu'on appelle le *foyer principal* ou simplement le *foyer* de l'axe considéré.

Tous les rayons issus du point lumineux à l'infini qui tombent sur le miroir, sont parallèles entre eux et à l'axe OA qui correspond à ce point ; ces rayons, après réflexions, viennent passer par le foyer F. Comme la marche que suit un rayon ne dépend

que de la position du rayon incident par rapport au miroir et non de sa provenance, on voit que *tout rayon lumineux* KI, *après réflexion, passe par le milieu* F *de la droite* OC *que l'on mène par le centre* O *du miroir parallèlement à* KI, le point F étant le foyer principal correspondant à cette direction. Cette propriété, du reste, est d'autant plus exacte que le rayon incident considéré KI est plus voisin de l'axe qui lui est parallèle OC, puisque d'autant plus petit est l'angle IOC dont on a négligé le carré devant l'unité pour établir la formule (4).

A chaque direction correspond un foyer principal, qui se trouve sur la droite parallèle à cette direction passant par le centre O du miroir, à une distance de ce centre égale à $\frac{R}{2}$; le lieu géométrique de ces foyers est donc une sphère concentrique au miroir et d'un rayon moitié moindre. On lui donne le nom de *sphère focale*.

Les miroirs sphériques employés le plus souvent en optique ont une courbure très faible, et la surface de ces miroirs est, dans toute son étendue, très peu distante du plan tangent mené vers son milieu. Toute la portion de la sphère focale qui contient les foyers des axes rencontrant le miroir se confond alors sensiblement avec un plan tangent vers son milieu, désigné sous le nom de *plan focal*.

D'après cela, c'est au point où un axe perce le plan focal que se trouve l'image d'un point lumineux situé à l'infini sur cet axe : *c'est dans le plan focal que se forment les images des objets situés à l'infini*, c'est-à-dire à une distance très grande vis-à-vis du rayon de courbure du miroir.

La distance du plan focal au miroir est appelée *distance focale*; en la désignant par f, on a, comme nous le savons, $f=\frac{R}{2}$. Si, dans la formule (4) du paragraphe (8), nous remplaçons $\frac{2}{R}$ par son égal $\frac{1}{f}$, nous obtiendrons :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f} \qquad (1)$$

ce qui est la forme la plus usitée.

La formule (5) du paragraphe (8) montre que la dimension i de l'image d'un objet situé à l'infini est nulle, puisque l'on a $p = \infty$ et $p' = f$. Mais il n'y a pas d'objet matériel réellement à l'infini, et ceci signifie simplement que la grandeur de l'image est une fraction extrêmement petite de la grandeur de l'objet quand celui-ci est extrêmement loin.

La formule (5) peut s'écrire :

$$i = \frac{o}{p} \times p'$$

Or, $\frac{o}{p}$, pour un objet éloigné, est son diamètre apparent, c'est-à-dire la valeur de l'angle sous lequel on le voit; en désignant par α cette quantité, il vient :

$$i = \alpha p'$$

Dans le cas où p est très grand vis-à-vis de f, on a $p' = f$, et la formule devient :

$$i = \alpha f \qquad (2)$$

Quand un objet est situé assez loin pour que son image se forme dans le plan focal, la grandeur de celle-ci s'obtient en multipliant par la distance focale le diamètre apparent de l'objet.

Le Soleil ou la Lune sont vus de la terre sous un diamètre apparent d'environ un demi-degré; la valeur de α, dans ce cas, est donc environ 0,009. L'image de l'un de ces astres dans le plan focal d'un miroir concave, de distance focale f, possède un diamètre égal à 0,009 f : si le miroir a un mètre de distance focale, le diamètre de l'image est de 9 millimètres.

10. Image d'un objet placé entre le centre du miroir et le plan focal. — La formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}$ montre que quand p varie depuis l'infini jusqu'à R, p' varie depuis $\frac{R}{2}$ jusqu'à R. Chaque

point A' (fig. 21) d'un axe compris entre le foyer et le centre O peut donc être l'image d'un point lumineux A situé sur cet axe entre l'infini et le centre O.

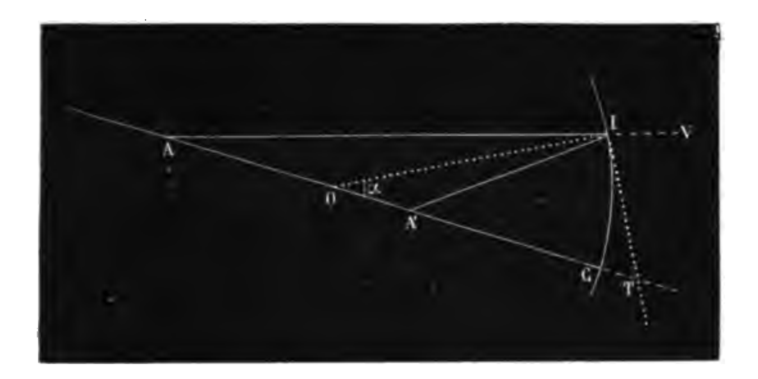


FIG. 21.

Supposons maintenant que A' soit un point lumineux; tout rayon issu de A', tel que A'I, et qui fait avec l'axe un petit angle passe après réflexion par le point A, en vertu de la réciprocité de la marche du rayon incident et du rayon réfléchi : le point A est donc l'image réelle du point A'. La formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ donne, dans ce cas, la distance p de l'image au miroir si l'on connaît la distance p' du point lumineux. Comme cette formule est symétrique en p et p', on voit qu'on peut encore dans ce cas prendre p comme distance du point lumineux au miroir et p' comme distance de son image; c'est ce que nous ferons pour qu'une même formule serve aux deux premiers cas que nous venons de considérer.

Les deux points A et A' qui sont tels que si l'un est l'objet, l'autre est l'image, sont appelés deux *foyers conjugués* (1).

(1) Les démonstrations de la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}$ et du théorème que l'image d'un objet plan est dans un plan parallèle données aux paragraphes

11. DISCUSSION. — Les formules $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$ et $\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$, que nous venons d'établir, sont applicables pour les valeurs de p comprises depuis l'infini jusqu'à f.

La première montre que p et p' varient en sens contraire. Quand l'objet est à l'infini ($p=\infty$), on a, comme nous le savons,

8 et 10 sont en quelque sorte classiques, et nous les avons adoptées dans le texte à cause de leur simplicité.

Tant qu'un petit objet lumineux est loin du centre O, si un axe correspondant à l'un de ses points rencontre le miroir vers son milieu, les axes correspondant aux autres points de l'objet rencontrent aussi le miroir et ces démonstrations sont parfaitement acceptables.

Mais si le plan de l'objet est près du centre, quand même cet objet s'écarterait très peu d'un axe perpendiculaire à son plan rencontrant le miroir, les axes correspondant aux autres points peuvent ne plus le rencontrer (par exemple BO fig. 22). Dès lors, l'angle que nous avons désigné par α devient beaucoup trop grand pour qu'on puisse négliger son carré devant l'unité, et les démonstrations données aux paragraphes 8 et 10 sont en défaut. Pourtant l'expérience prouve que la formule $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{2}{R}$ est tout aussi exacte et que l'image d'un plan est encore un plan.

Voici une démonstration plus générale et qui s'applique aussi bien dans le cas de points lumineux voisins du centre que dans le cas de points éloignés.

Soit B (fig. 22) un point lumineux; menons l'axe BO et menons aussi un

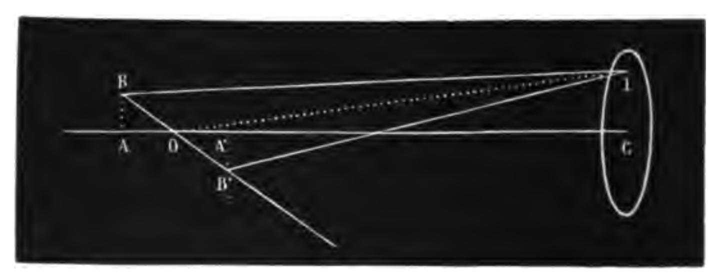


FIG. 22.

axe OC qui rencontre le miroir en un point C vers son milieu. Considérons maintenant un rayon quelconque BI qui rencontre le miroir en I (ce rayon peut ne pas être dans le plan BOC) ; le rayon réfléchi IB' coupe

$p' = f$: l'image est dans le plan focal. A mesure que l'objet se rapproche, l'image s'éloigne du miroir.

Pour $p = 2f = R$ on a $p' = 2f = R = p$: l'image A'B' est à la même distance du miroir que l'objet AB (fig. 23) ; l'image renversée, comme toujours, est symétrique de l'objet par rap-

l'axe BO en un point B'. Menons la normale OI au point I ; cette droite étant bissectrice de l'angle BIB', on a la relation :

(1) $$\frac{BI}{B'I} = \frac{BO}{B'O}$$

Abaissons maintenant sur l'axe OC les perpendiculaires BA et B'A'. triangles semblables AOB, A'OB' donnent la relation :

(2) $$\frac{BO}{B'O} = \frac{AO}{A'O}$$

On tire des égalités (1) et (2) :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{BI}{B'I}$$

Or, si les rayons BI et B'I sont peu écartés de l'axe AOC, on peut, par une approximation du même ordre que celle faite au paragraphe 8, remplacer BI par AC et B'I par A'C, ce qui donne :

(4) $$\frac{AO}{A'O} = \frac{AC}{A'C}$$

En désignant par p la distance AC et par p' la distance A'C, cette relation s'écrit :

(5) $$\frac{p - R}{R - p'} = \frac{p}{p'}$$

Cette égalité étant la même que l'égalité 3 du paragraphe 8, on en conclut, comme plus haut, que tous les rayons issus de B vont après réflexion passer par le même point B'. En outre, la valeur de p étant la même, pour tous les points lumineux situés dans le plan BA perpendiculaire à OC, la valeur de p' est aussi la même, ce qui montre tout de suite que les images de tous ces points sont dans le plan B'A' parallèle à BA.

port à l'axe OC perpendiculaire à son plan. L'image est alors aussi grande que l'objet, tandis qu'avant elle était plus petite, puisque l'on avait $p' < p$.

Fig. 23.

Si l'objet continue à se rapprocher, l'image continue à s'éloigner du miroir et devient plus grande que l'objet. Quand l'objet se trouve dans le plan focal, l'image se forme à l'infini et est infiniment grande.

12. **Vérification expérimentale.** — En recevant sur un petit écran de papier blanc les rayons réfléchis par un miroir concave et provenant d'une source lumineuse suffisamment intense placée au delà du plan focal, il se peint sur l'écran une image de l'objet. Cette image est nette si l'écran est au foyer conjugué de l'objet; mais si l'on écarte l'écran de cette position soit dans un sens soit dans l'autre, l'image devient confuse. En effet, le cône IA'J des rayons réfléchis provenant d'un même point A de l'objet (fig. 24), est coupé par l'écran suivant une surface d'autant plus large que l'écran E_1 ou E_2 est plus loin du sommet du cône A' qui est la position du foyer conjugué de A. Chaque point de l'objet donne alors dans l'image, non plus un point, mais une tache lumineuse empiétant d'autant plus sur les taches voisines que l'écran est plus loin de la bonne position.

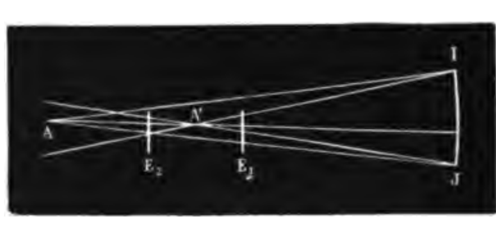


Fig. 24.

Ceci posé, l'expérience permet très facilement de vérifier les lois auxquelles nous a conduit la théorie de la réflexion.

On cherche d'abord où il faut placer un écran blanc pour que l'image d'un objet très éloigné, du ciel étoilé par exemple, vienne s'y peindre nettement; on a ainsi la position du plan focal, et, en mesurant la distance de ce plan au miroir, on obtient la distance focale f. On peut à l'aide d'un sphéromètre mesurer le rayon de courbure R du miroir et s'assurer qu'on a bien $R = 2f$; c'est une première vérification.

On place ensuite devant le miroir un objet lumineux, plan ou d'épaisseur négligeable vis à vis du rayon de courbure (une bougie allumée par exemple) et l'on dispose l'écran blanc de façon à en avoir une image nette. La mesure des distances de l'objet et de l'écran au miroir montre que la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ est exacte; la mesure d'un diamètre de l'objet et de son image fait voir qu'il en est de même pour la formule $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$.

Ce sont là d'excellentes preuves de la justesse des lois de la réflexion.

On peut voir directement l'image réelle en plaçant l'œil au delà de la position qu'elle occupe de façon à recevoir les rayons réfléchis. L'image est vue alors absolument comme le serait un objet matériel, puisque les rayons issus d'un point de l'objet et qui, après réflexion, se coupent au point correspondant de l'image, se dirigent ensuite comme s'ils étaient émis par ce point.

On peut montrer ce phénomène au moyen de la jolie expérience dite *du bouquet*. On dispose un bouquet de fleurs renversé devant un miroir concave, à peu près au double de la distance focale. Le bouquet est caché au spectateur par un écran, et au-dessus on place un vase vide bien visible. Par une inclinaison convenable du miroir, et en déplaçant le vase au besoin, on arrive à disposer sur celui-ci l'image réelle du bouquet. En se mettant alors à distance, et en regardant vers le miroir, l'illusion est complète : on croit voir un bouquet de fleurs au-dessus du vase.

13. OBJET PLACÉ ENTRE LE PLAN FOCAL ET LE MIROIR. — Soit un point A placé entre un miroir concave et son plan focal (fig. 25). Menons son axe OA, et considérons un rayon quelconque AI rencontrant en I le miroir. Prenons comme plan de figure le

plan d'incidence OAI du rayon AI; le rayon réfléchi IR se trouve dans ce plan et il est facile de voir que ce rayon ne peut rencontrer l'axe OA. Considérons, en effet, le rayon émané du foyer F

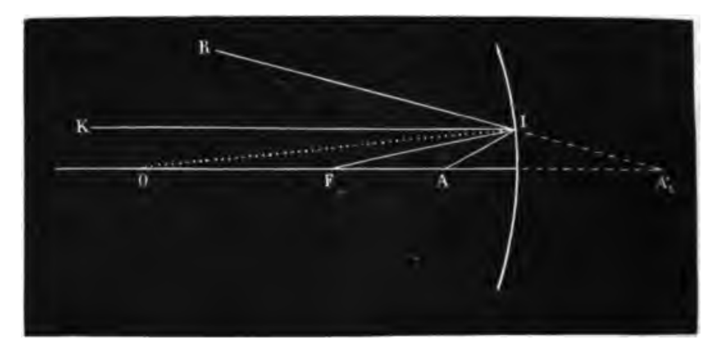


Fig. 25.

situé sur l'axe OA, et aboutissant au point I; ce rayon se réflechit, comme nous le savons, suivant une parallèle IK à l'axe OA. Or, le point A étant par hypothèse plus près du miroir que le point F, l'angle d'incidence AIO est plus grand que l'angle d'incidence FIO; il en résulte que l'angle de réflexion RIO étant plus grand aussi que l'angle de réflexion KIO, le rayon IR est au-dessus de IK et ne peut rencontrer l'axe OA. Mais alors le prolongement de RI derrière le miroir doit rencontrer l'axe en un certain point A'_1.

Nous allons montrer que tous les rayons issus de A qui s'écartent peu de l'axe OA sont tels que les rayons réfléchis qui en proviennent ont leur prolongement passant par un même point A'_1. La démonstration est calquée sur celle du premier cas. Par le point I (fig. 26), menons à la surface du miroir la tangente IT qui coupe en T l'axe OAC. La droite OI étant bissectrice de l'angle RIA extérieur au triangle IAA'_1, la droite IT qui lui est perpendiculaire est bissectrice de l'angle intérieur AIA'_1; on a donc la relation :

$$(1) \qquad \frac{OA}{OA'_1} = \frac{TA}{TA'_1}$$

Si le rayon AI s'écarte peu de l'axe OA, on peut comme ci-dessus, négliger la distance TC et l'égalité devient :

$$(2) \qquad \frac{OA}{OA'_1} = \frac{CA}{CA'_1}.$$

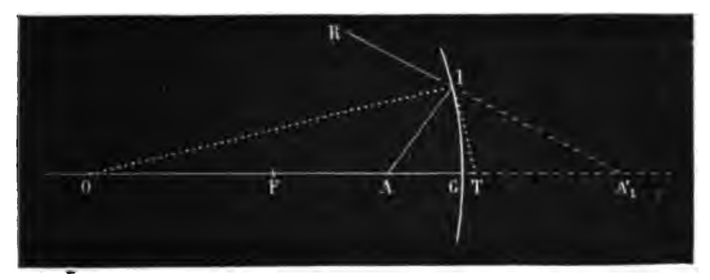


Fig. 26.

Posons $CA = p$, $CA'_1 = p'_1$, $CO = R$, l'égalité (2) s'écrit alors :

$$(3) \qquad \frac{R - p}{R + p'_1} = \frac{p}{p'_1}.$$

De cette égalité on tire une valeur de p'_1 qui est indépendante de l'angle IAC : chaque rayon issu de A donne naissance à un rayon réfléchi qui, par son prolongement, va couper l'axe OA au même point A'_1.

En transformant l'égalité (3) on peut la mettre sous la forme :

$$(4) \qquad \frac{1}{p} - \frac{1}{p'_1} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

Pour l'œil, ou pour un instrument d'optique qui reçoit les rayons réfléchis provenant de A, l'effet est le même que si les rayons venaient de A'_1 : ce point A'_1 est une image virtuelle du point A.

Ici un point-objet et son image qui se trouve sur l'axe cor-

respondant, sont *du même côté du centre* O, et, par conséquent, l'image est droite par rapport à l'objet (fig. 27). Sa grandeur est donnée par :

$$(5) \qquad \frac{i}{o} = \frac{p'_1}{p}$$

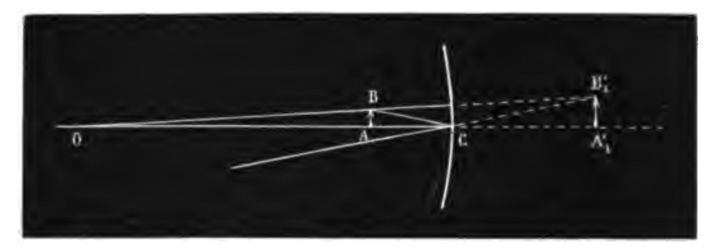


FIG. 27.

DISCUSSION ET VÉRIFICATION. — La formule (4) montre que p et p'_1 varient toujours dans le même sens. Quand l'objet est dans le plan focal ($p = f$) on a $p'_1 = \infty$: l'image est virtuelle et à l'infini derrière le miroir (ou réelle et à l'infini devant le miroir, deux rayons réfléchis parallèles pouvant être considérés, soit comme se rencontrant à l'infini en avant du miroir, soit comme ayant leurs prolongements se rencontrant à l'infini derrière le miroir).

A mesure que l'objet se rapproche du miroir, son image virtuelle s'en rapproche en sens inverse ; mais l'image est toujours plus loin du miroir que l'objet, tant que sa distance au miroir p n'est pas nulle, car la formule (4) donne alors :

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{f} \quad \text{d'où :} \quad \frac{1}{p'_1} < \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad p'_1 > p$$

Il en résulte d'après (5), que l'image est alors plus grande que l'objet : *un miroir concave donne d'un objet placé entre le plan focal et le miroir une image virtuelle droite et plus grande que l'objet*, ou au moins égale à lui.

Quand l'objet vient à s'appliquer contre le miroir ($p=0$), la formule (4), qu'on peut mettre sous la forme

$$p'_1 = \frac{pf}{f-p}$$

montre que p'_1 est nul, c'est-à-dire que l'image vient aussi s'appliquer en sens inverse contre le miroir. Le rapport $\frac{p'_1}{p}$ qui est égal, d'après la formule ci-dessus, à $\frac{f}{f-p}$ tend alors vers l'unité : à la limite, l'image devient aussi grande que l'objet.

En approchant plus ou moins d'un miroir concave un petit objet plan tenu à la main, on observe aisément les phénomènes que nous venons de décrire [1].

Nous avons considéré jusqu'ici le cas d'un objet plan; si l'objet est en relief, l'image n'est plus exactement semblable au symétrique de l'objet, les parties les plus éloignées du miroir donnant des images relativement plus grandes que les parties les plus rapprochées. Ainsi, en regardant son visage dans un miroir concave placé près de la figure, celle-ci paraît non seulement grossie mais aussi un peu déformée : le nez, situé plus près du miroir, est moins grossi que le front.

Cette remarque sur la déformation de l'image d'un objet en relief s'applique aussi aux autres cas du miroir concave. Nous l'avons placée ici, parce que c'est dans le cas d'une image virtuelle que cette déformation est la plus frappante.

(1) Faisons remarquer qu'en écartant l'objet jusqu'au plan focal, l'image ne semble pas s'écarter à l'infini. Ce n'est là qu'une illusion qui tient à ce qu'en s'écartant à l'infini l'image grandit aussi indéfiniment; elle reste visible alors sous un angle fini, au lieu d'être vue sous un angle infiniment petit comme un objet de grandeur invariable qu'on écarterait à l'infini. On peut s'assurer que l'image virtuelle est bien à l'infini quand l'objet est dans le plan focal, en la regardant avec une lunette astronomique ; si la lunette est disposée de façon à voir nettement les objets à l'infini, l'image est vue nettement; si la lunette est disposée pour voir nettement les objets rapprochés, l'image est toujours vue confusément.

14. OBJET VIRTUEL. — Nous venons de voir quo tout rayon tel que AI, issu d'un point A placé entre le foyer et le miroir, après réflexion, semble venir d'un point déterminé A'_1, image du point A (fig. 26). Réciproquement, si un rayon RI se dirige vers ce point A'_1, après réflexion, il prend la direction IA et passe par le point A. Comme à chaque point A'_1 situé derrière le miroir correspond un point A placé entre le foyer et le miroir, dont A'_1 est l'image virtuelle, on voit que tous les rayons qui se dirigent vers un point A'_1 situé derrière le miroir vont, après réflexion, concourir en un même point A : *un point objet virtuel* A'_1 *donne naissance à un point image réelle* A *situé sur le même axe entre le miroir et le foyer principal.*

Les deux points A' et A'_1 sont deux foyers conjugués : si l'un est objet, l'autre est image.

En désignant comme ci-dessus par p la distance de A au miroir et par p_1' la distance de A_1' au miroir, nous avons trouvé la relation :

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1'}=\frac{1}{f}$$

Si maintenant, pour être en harmonie avec les notations employées plus haut, la distance de l'objet virtuel est désignée par p_1 et celle de son image réelle par p', cette formule devient :

$$(1) \qquad -\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

L'image d'un objet virtuel est droite et sa grandeur est donnée par la relation :

$$(2) \qquad \frac{i}{o}=\frac{p'}{p_1}$$

DISCUSSION et VÉRIFICATION. — La formule (1) montre que p' est inférieur ou au plus égal à p_1; par conséquent, d'après (2) l'image est au plus égale à l'objet; *un miroir concave donne d'un objet*

virtuel une image réelle droite et plus petite que l'objet, ou au plus égale.

La formule (1) montre aussi que p_1 et p' varient dans le même sens : quand l'objet s'écarte du miroir, l'image s'écarte en sens inverse. Si la position de l'objet virtuel varie depuis le miroir jusqu'à l'infini, la position de l'image réelle varie depuis le miroir jusqu'au plan focal, et sa grandeur depuis celle de l'objet jusqu'à zéro.

On réalise l'expérience en formant une image réelle d'un objet lumineux, d'une bougie par exemple, à l'aide d'un miroir concave auxiliaire, ou d'une lentille convergente. On note la position de cette image en prenant la position de l'écran pour laquelle elle se dessine nettement. On place alors en avant de l'image le miroir concave, sur lequel on veut étudier la réflexion; en disposant devant ce miroir un écran, on trouve une position, située entre le miroir et le plan focal, pour laquelle il se peint une image nette. La mesure des distances de l'écran au miroir dans sa première et dans sa seconde position donne p_1 et p', ce qui permet de vérifier l'exactitude de la formule $-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$; la mesure des dimensions linéaires correspondantes de la première image (o) et de la seconde (i) permet la vérification de la formule $\frac{i}{o}=\frac{p'}{p_1}$.

15. FORMULE GÉNÉRALE. — Nous venons de trouver dans l'étude de la réflexion à la surface d'un miroir concave trois formules différentes suivant les limites entre lesquelles varie la position de l'objet :

1° La formule $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$ si l'objet est réel et au delà du plan focal;

2° La formule $\frac{1}{p}-\frac{1}{p'_1}=\frac{1}{f}$ si l'objet est réel et en deçà du plan focal;

3° La formule $-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$ si l'objet est virtuel.

Dans ces trois formules les lettres représentent des quantités positives; l'introduction des quantités négatives permet de les ramener à une seule formule. Convenons, en effet, d'appeler toujours p la distance de l'objet au miroir, et p' la distance de son image, ces grandeurs étant positives si l'objet ou l'image est en avant du miroir (objet ou image réel) et étant négatives si l'objet ou l'image est en arrière du miroir (objet ou image virtuel). Avec cette convention on voit que pour la seconde formule on a $p' = -p'_1$, que pour la troisième on a $p = -p_1$ et que les deux dernières formules deviennent alors identiques à la première

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

Telle est donc la formule générale qui convient à tous les cas possibles.

Nous pouvons aussi employer dans les trois cas la formule :

$$\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$$

qui ne diffère de celles qui ont été établies que par le signe du second membre dans le cas où l'objet ou l'image est virtuel, et qui n'en diffère pas dans le cas où l'image et l'objet sont réels. En adoptant cette formule, il faudra, bien entendu, prendre pour $\frac{i}{o}$ la valeur absolue du rapport $\frac{p'}{p}$; mais on voit que si $\frac{p'}{p}$ est positif (1er cas) l'image est renversée par rapport à l'objet, et que si $\frac{p'}{p}$ est négatif (2e et 3e cas) l'image est droite.

16. Construction de l'image. — Une construction géométrique des plus simples permet de trouver soit l'image d'un point donné placé devant un miroir concave, soit la position et la grandeur de l'image d'un objet donné.

1° Cas d'un point. — On mène la droite qui passe par le point donné A et par le centre de courbure O du miroir, c'est-à-dire l'axe du point A (fig. 28, 29 ou 30) : l'image est sur cet axe.

On trace ensuite un autre axe quelconque OM, mais faisant avec le précédent un petit angle, et l'on mène par A un rayon AI parallèle à cet axe, qui rencontre le miroir en un point I; puisque

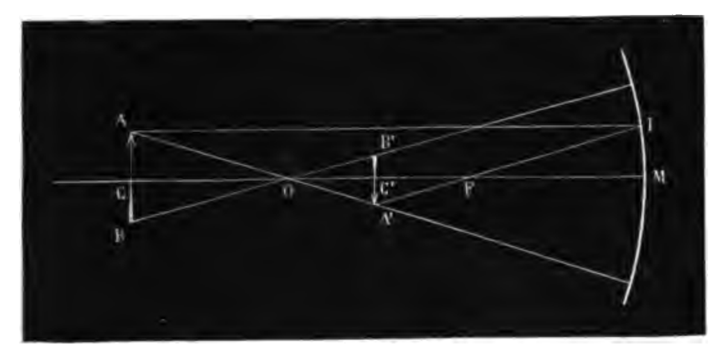


Fig. 28.

le rayon réfléchi correspondant doit passer par le foyer F de l'axe OM, ce rayon réfléchi est la droite IF. Cette droite rencontre l'axe

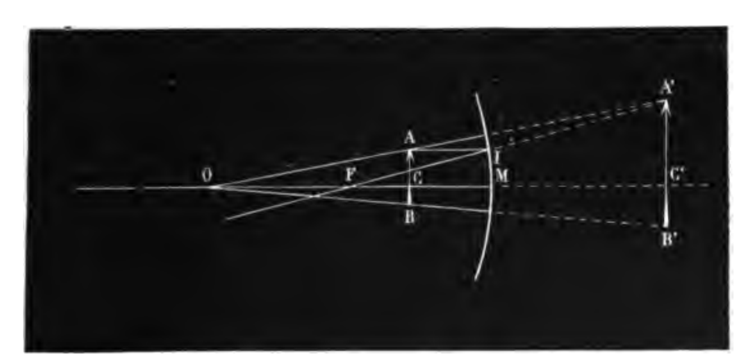


Fig. 29.

OA en un point A' qui est l'image de A puisque cette image doit se trouver à la fois sur l'axe OA et sur le rayon réfléchi IF (1).

(1) La figure 28 correspond au cas où le point réel est placé en avant du plan focal ; dans le trapèze AIFO la base AI étant, par hypothèse, plus

2° CAS D'UN OBJET. — Nous supposerons donnée une dimension linéaire AB de l'objet (fig. 28. 29 ou 30). Du centre O menons l'axe OM perpendiculaire à la direction AB, et soit C le point où

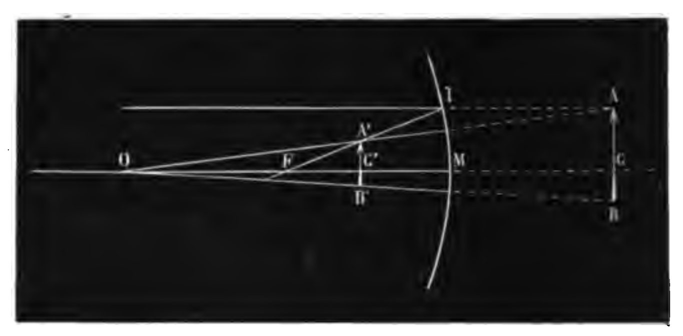


FIG. 30.

il rencontre l'objet. Prenons ACO comme plan de figure. Effectuons maintenant la construction nécessaire pour trouver l'image A′ du point A situé en dehors de l'axe OC, et abaissons de A′ la perpendiculaire A′C′ sur OC. Cette droite est l'image de AC puisqu'elle lui est parallèle et passe par A′ image de A.

Si l'on veut avoir, en outre, la longueur de l'image, on mène l'axe BO qui coupe en B′ la droite A′C′; B′ étant l'image de B,

grande que la base OF, qui est égale à la distance focale, et les côtés non parallèles AO et IF se rencontrant du côté de la petite base, le rayon réfléchi IF coupe réellement l'axe AO : l'image est réelle. La figure 29 correspond au cas où le point réel est placé entre le plan focal et le miroir; ici dans le trapèze AIFO, la base AI étant par hypothèse plus petite que la base OF, les côtés non parallèles se rencontrent du côté de AI, c'est-à-dire que c'est le prolongement derrière le miroir du rayon réfléchi IF qui rencontre l'axe OA : l'image est virtuelle. Enfin la figure 30 correspond au cas où le point A est virtuel; il est évident que le rayon IF rencontre réellement l'axe OA entre I et F : l'image est réelle et située entre le plan focal et le miroir. On retrouve ainsi par cette construction les propriétés que nous avons déjà signalées. Faisons remarquer qu'un rayon incident AFJ (non représenté sur ces figures) passant par le foyer F donne naissance à un rayon réfléchi JK parallèle à l'axe OM et qui doit passer par A′; il y a là une vérification de la construction graphique, ou un autre moyen d'obtenir A′.

on obtient ainsi l'image A'B' de la dimension linéaire donnée AB.

Nous aurons constamment dans l'étude des instruments d'optique à faire des constructions de ce genre; mais nous prendrons toujours une dimension linéaire AC de l'objet atteignant l'axe qui lui est perpendiculaire, ce qui dispense de la dernière partie de la construction.

En considérant AC comme objet, et en confondant l'arc MI avec sa tangente en M, on arrive aisément à déduire de ces constructions les deux formules fondamentales $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$ et $\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$.

17. MIROIR CONVEXE. — OBJET RÉEL. — Supposons qu'un point lumineux A soit placé de vant un miroir sphérique convexe (fig. 31); joignons le point A au centre O_1 de celui-ci; cette ligne est l'axe correspondant au point A : un rayon émis par A et se dirigeant suivant cet axe tombe normalement à la surface du miroir, et revient exactement suivant la même direction. Considérons maintenant un autre rayon quelconque AI; prenons comme plan de figure, le plan IAO_1, qui coupe le miroir suivant un arc de grand cercle. La normale O_1IN au point I étant dans ce plan, celui-ci est le plan d'incidence du rayon AI, et le rayon réfléchi IR est situé dans le plan de la figure. Il est évident que ce rayon IR ne rencontre pas l'axe AO_1; mais, comme il est situé dans le même plan son prolongement derrière le miroir rencontre l'axe en un point A'_1.

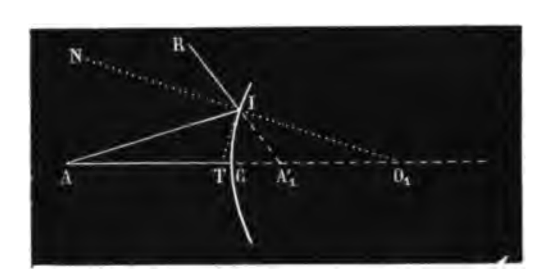


Fig. 31.

Une démonstration semblable à celle du paragraphe 13 montre que les rayons issus de A, après réflexion, ont des prolongements qui coupent tous l'axe en un même point A'_1, pourvu que

l'angle IO_1A reste faible. En effet, menons la tangente IT, écrivons la relation qui existe entre les segments découpés sur AO_1 par le faisceau harmonique IA, IT, IA'_1 et IO_1, enfin faisons l'approximation qui consiste à négliger la distance TC, et nous obtiendrons la relation :

$$(1) \qquad \frac{1}{p} - \frac{1}{p'_1} = -\frac{2}{R_1}$$

où p désigne la distance AC du point lumineux au miroir, p'_1 la distance A'_1C au miroir du point A'_1 où le prolongement d'un rayon réfléchi issu de A coupe l'axe, et enfin où R_1 désigne le rayon O_1C de la sphère à la quelle appartient le miroir. On voit que la valeur de p'_1 étant indépendante de la valeur de l'angle IAO_1, le point A'_1 est une image virtuelle du point A: *un miroir convexe donne une image virtuelle d'un point réel, quelle que soit la distance de celui-ci au miroir.*

On appelle encore *foyer* l'image virtuelle d'un point situé à l'infini : sur chaque axe se trouve un foyer. On obtient sa distance f_1 au miroir en faisant dans la formule (1) $p = \infty$ et $p'_1 = f_1$; il vient :

$$(2) \qquad f_1 = \frac{R_1}{2}$$

La distance focale f_1 est encore ici égale à la moitié du rayon de courbure. Le lieu géométrique des foyers est donc une sphère ayant O_1 pour centre et $\frac{R_1}{2}$ comme rayon. Si le miroir est d'ouverture assez faible pour que sa surface puisse être confondue avec le plan tangent vers son milieu, la portion de la sphère focale qui contient les foyers des axes qui rencontrent le miroir peut aussi être confondue avec le plan tangent en son milieu : c'est le *plan focal*.

En remplaçant dans la formule (1) $\frac{2}{R_1}$ par sa valeur $\frac{1}{f_1}$, il vient :

$$(3) \qquad \frac{1}{p} - \frac{1}{p'_1} = -\frac{1}{f_1}$$

On voit tout de suite, du reste, que l'image virtuelle est droite par rapport à l'objet, puisqu'un point A ou B et son image A'_1 ou B'_1 se trouvent sur le même axe du même côté du point de concours O_1 de tous les axes (fig. 32).

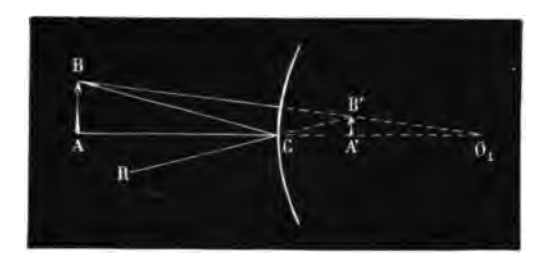


Fig. 32.

La grandeur de l'image est donnée par la relation :

$$(4) \quad \frac{i}{o} = \frac{p'_1}{p}$$

On démontre aussi comme dans le cas du miroir concave (§ 9) la relation :

$$(5) \quad i = \alpha f_1$$

qui donne le diamètre i de l'image d'un objet de diamètre apparent α placé assez loin pour que son image soit sensiblement dans le plan focal.

DISCUSSION ET VÉRIFICATION. — La formule (3), que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{f_1} \qquad \text{ou} \qquad p'_1 = \frac{pf_1}{p + f_1}$$

montre que p'_1 est au plus égal à p; d'où nous voyons, par la formule (4), que l'image virtuelle est au plus égale à l'objet, ce qui était évident du reste d'après la construction représentée (fig. 32) : *un miroir convexe donne d'un objet réel une image virtuelle droite plus petite que l'objet* ou au plus égale à lui.

La formule nous montre aussi que p et p'_1 varient dans le même sens : quand l'objet se rapproche du miroir, l'image s'en rapproche en sens inverse. Si la distance p de l'objet au miroir

diminue depuis l'infini jusqu'à zéro, la distance p'_1 de l'image diminue depuis la distance focale jusqu'à zéro, et la dimension de l'image augmente depuis zéro jusqu'à la dimension de l'objet qu'elle atteint quand l'objet et son image sont sur la surface du miroir.

En regardant par réflexion dans un miroir convexe un objet qu'on en approche plus ou moins, on voit les apparences que nous venons de décrire (1).

Faisons remarquer que si l'objet qui se reflète dans le miroir convexe n'est pas plan, l'image n'est pas exactement semblable au symétrique de l'objet, les parties les plus éloignées du miroir donnant des images relativement plus petites que les parties les plus rapprochées. Ainsi, quand on regarde son visage dans un miroir convexe, le nez qui est le plus près du miroir donne une image relativement plus grosse que le front qui est situé plus loin.

18. OBJET VIRTUEL. — Dans l'étude de la réflexion de rayons convergents vers un même point situé derrière le miroir convexe, nous devons considérer deux cas, suivant que ce point-objet virtuel est entre le miroir et le plan focal, ou au delà de celui-ci.

1er cas. — Supposons que dans la figure 31 du paragraphe 17, le sens de la marche de la lumière soit changé, et qu'un rayon

(1) Nous devons pourtant mettre en garde contre une illusion. Quand on regarde par réflexion dans un miroir convexe un objet éloigné, un homme par exemple, on croit voir l'image très loin derrière le miroir tandis qu'en réalité elle est un peu en avant du plan focal, c'est à-dire assez près. Cela tient à l'habitude que nous avons de juger de l'éloignement plus ou moins grand d'un objet par l'angle sous lequel il nous apparaît : en voyant dans le miroir l'image d'un homme sous un petit angle, nous croyons voir l'homme dans le lointain. Un myope, qui ne peut voir net un objet situé au loin, peut s'assurer qu'il voit nette l'image donnée par le miroir convexe et, par conséquent, que cette image n'est pas loin de ses yeux. On peut se convaincre encore que cette image est proche en la regardant avec une lunette astronomique placée près du miroir, et en tirant l'oculaire de la lunette jusqu'à voir nettement l'image ; on pourra constater que la lunette est alors réglée pour voir un objet rapproché et non un objet lointain.

lumineux arrive sur le miroir suivant une direction RI dont le prolongement rencontre un axe O_1C en un point A'_1 situé entre le miroir et le foyer; ce rayon se réfléchira suivant IA et coupera l'axe O_1C en un point A dont A'_1 était l'image virtuelle dans le cas considéré au paragraphe 17. Ainsi, tous les rayons dont les prolongements passent par le point A'_1 vont concourir au même point A après réflexion : *le point* A *est une image réelle du point-objet virtuel* A'_1. Les deux points A et A'_1 sont ainsi deux foyers conjugués.

Nous avons vu plus haut (1 ou 3, § 17) la relation qui existe entre les distances AC et A'_1C; en désignant par p_1 la distance A'_1C de l'objet virtuel et par p' la distance AC de son image, conformément aux notations déjà employées, cette relation devient :

$$(1) \qquad -\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'}=-\frac{2}{R_1}=-\frac{1}{f_1}$$

L'image est droite, puisque l'image et l'objet sont du même côté du centre O_1 (fig. 32).

La grandeur de l'image est donnée par la relation :

$$(2) \qquad \frac{i}{o}=\frac{p'}{p_1}$$

Discussion et vérification. — La formule (1) montre que l'on a $p' \geqq p_1$; par conséquent, d'après (2) l'image est au moins aussi grande que l'objet : *un miroir convexe donne, d'un objet virtuel placé entre le plan focal et le miroir, une image réelle droite et plus grande que l'objet*, ou au moins égale.

La relation (1) montre aussi que les quantités p_1 et p' varient dans le même sens : l'objet virtuel et son image réelle s'écartent en même temps du miroir, en sens inverse. Quand la position de l'objet varie depuis le miroir jusqu'au plan focal, la position de l'image varie depuis le miroir jusqu'à l'infini, et sa grandeur depuis celle de l'objet jusqu'à une grandeur infinie.

On réalise l'expérience de vérification absolument comme pour le cas d'un objet virtuel et d'un miroir concave (§ 14).

2e cas. — Nous venons de voir que, si un rayon incident prolongé derrière le miroir convexe rencontre un axe entre le miroir et le foyer principal situé sur cet axe, le rayon réfléchi qui en provient rencontre réellement l'axe ; nous avons vu aussi que, dans le cas limite où le rayon incident prolongé passe par le foyer principal, le rayon réfléchi se dirige parallèlement à cet axe ; nous devons en conclure que si le rayon incident SI, prolongé derrière le miroir, coupe un axe en A_1 au delà de son foyer principal F (fig. 33), le rayon réfléchi IR ne rencontre cet axe que par son prolongement derrière le miroir en A'_1.

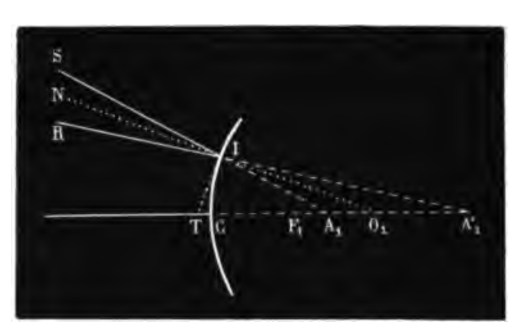


Fig. 33.

Par un raisonnement calqué sur celui du paragraphe 8 et en faisant la même approximation, on obtient la relation :

$$(3)\qquad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'_1}=\frac{2}{R_1}=\frac{1}{f_1}$$

dans laquelle p_1 et p'_1 représentent les distances de A_1 et de A'_1 à ce miroir : *un point objet-virtuel situé au delà du plan focal d'un miroir convexe donne naissance à une image virtuelle.*

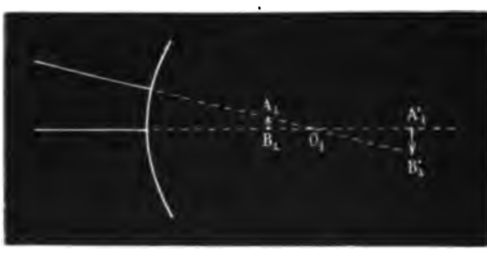


Fig. 34.

L'image est renversée par rapport à l'objet, car la construction

représentée par la figure (33) ou la formule (3), qui s'en déduit, montre qu'un point-objet et son image, situés sur le même axe, se trouvent toujours de part et d'autre du centre O_1 (fig. 34). La grandeur de l'image est donnée par la relation :

$$(4) \qquad \frac{i}{o} = \frac{p'_1}{p_1}$$

Discussion et vérification. — Les formules (3) et (4) sont exactement les mêmes que celles qui concernent la réflexion d'un objet placé en avant du plan focal d'un miroir concave. Tout ce que nous avons établi (§ 11) dans la discussion de ce cas est donc applicable ici [1] : les distances de l'image virtuelle et de l'objet virtuel au miroir varient en sens inverse; quand l'objet se déplace depuis le plan focal jusqu'à l'infini, son image se déplace depuis l'infini jusqu'au plan focal; l'image est égale à l'objet quand celui-ci se trouve au double de la distance focale; pour une distance plus grande de l'objet, l'image est plus petite que lui; pour une distance plus petite, elle est plus grande; l'objet et l'image sont réciproques l'un de l'autre.

On réalise, comme au paragraphe 14, un objet virtuel; on fait varier sa position et, en regardant dans le miroir pour voir son image virtuelle, on peut observer les phénomènes que nous venons de décrire.

19. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE. — Une construction géométrique analogue à celle que nous avons indiquée plus haut per-

(1) Nous pouvons faire une remarque analogue pour les deux autres cas du miroir convexe. On peut, en effet, déduire sans nouveaux calculs le 1er, le 2me et le 3me cas du miroir convexe respectivement du 3me, du 2me et du 1er cas du miroir concave; il suffit pour cela de considérer la réflexion comme s'opérant sur la face convexe au lieu de se produire sur la face concave, de façon que si l'objet ou l'image est réel dans le cas du miroir concave, il est virtuel dans le cas du miroir convexe et réciproquement. On obtient alors immédiatement la formule qui convient au miroir convexe, en changeant dans la formule du miroir concave p en $-p_1$, p' en $-p'_1$, ou inversement, et f en $-f_1$.

met d'obtenir aisément l'image d'un point ou d'une dimension linéaire donnée d'un objet.

Il faut se rappeler pour faire cette construction que tout rayon incident parallèle à un axe donne naissance à un rayon réfléchi dont *le prolongement* passe par le foyer principal de cet axe.

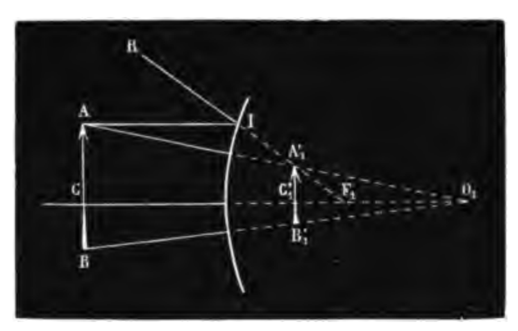


Fig. 35.

La figure 35, qui est relative au premier cas, montre suffisamment comment cette construction doit être faite. Comme pour le miroir concave, elle permet de retrouver facilement les deux formules fondamentales ou de faire la discussion de la position et de la grandeur de l'image.

20. Formule générale des miroirs sphériques. — Nous venons de trouver, pour la relation qui existe entre les distances de l'objet et de son image à un miroir sphérique convexe, les trois formules suivantes, suivant que l'objet est réel ou virtuel, et suivant les limites entre lesquelles varie la position de l'objet :

Objet réel.	Objet virtuel en deçà du plan focal	Objet virtuel au delà du plan focal
$\frac{1}{p}-\frac{1}{p'_1}=-\frac{2}{R_1}=-\frac{1}{f_1}$	$-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'}=-\frac{1}{f_1}$	$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'_1}=\frac{1}{f_1}$

Avec la convention, faite plus haut pour les miroirs concaves, de représenter toujours par p ou p' les distances de l'objet et de l'image et de considérer p ou p' comme positif, si l'objet ou l'image est en avant du miroir (objet ou image réel) et comme négatif si l'objet ou l'image est en arrière du miroir (objet ou

image virtuel), les trois formules prennent alors la même forme :

$$(1) \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=-\frac{2}{R_1}=-\frac{1}{f_1}$$

Convenons maintenant de représenter, dans le cas du miroir convexe, comme dans le cas du miroir concave, par R le rayon de courbure et par f la distance focale $\left(=\frac{R}{2}\right)$, en considérant ces quantités comme positives si le centre de courbure est en avant du miroir par rapport à la direction de la lumière incidente (miroir concave), et comme négatives si le centre de courbure est en arrière du miroir (miroir convexe). Nous devons alors dans la formule précédente poser $R_1 = -R$ ou $f_1 = -f$, et cette formule devient identique à la formule du miroir concave :

$$(2) \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}$$

Ainsi une seule formule convient, quelle que soit la forme du miroir sphérique et quelle que soit la position de l'objet, grâce aux conventions de signes faites plus haut (1).

(1) Nous recommandons aux personnes qui veulent se servir de cette formule générale de remplacer les quantités qu'elles savent être négatives par une quantité positive précédée du signe —, pour faciliter la discussion.

Supposons par exemple qu'on pose cette question : « Dans quel cas un miroir convexe peut-il donner une image réelle ? » Puisque le miroir est convexe f est négatif : remplaçons f par $-f_1$; il vient $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=-\frac{1}{f_1}$. Puisque l'image est réelle, p' est positif et nous voyons tout de suite alors, d'après la formule, que p doit être négatif : *l'objet doit être virtuel*. Remplaçons alors p par $-p_1$; il vient $\frac{1}{p_1}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{p'}$, formule dans laquelle toutes les quantités sont positives, et qui montre que p_1 est plus petit que f_1 : *l'objet virtuel doit être placé entre le miroir et le plan focal.*

La relation :

$$\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$$

convient aussi dans tous les cas. On peut s'assurer que ce que nous avons dit à propos des miroirs concaves s'applique aussi aux miroirs convexes : quand le rapport $\frac{p'}{p}$ est négatif, l'image est droite, quand il est positif, l'image est renversée par rapport à l'objet.

Ces deux formules générales montrent bien la réciprocité que existe, dans tous les cas, entre l'image et l'objet.

Pour terminer faisons remarquer que le miroir plan peut être considéré comme un miroir sphérique de rayon infini. En faisant $R=\infty$, ce qui entraîne $f=\infty$ dans la formule générale, il vient :

$$p=-p' \quad \text{d'où :} \quad \frac{i}{o}=-1$$

L'image est dans une position symétrique de l'objet par rapport au miroir plan, elle est droite et égale à l'objet. C'est bien ce qui a été trouvé directement.

21. FORMULE DE NEWTON. — Désignons par φ la distance d'un point lumineux au foyer situé sur son axe et par φ' la distance à ce même foyer de l'image de ce point donnée par un miroir sphérique convexe ou concave. Convenons de regarder φ et φ' comme des quantités positives si le point-objet ou l'image sont en avant du foyer, par rapport à la direction de la lumière incidente, et comme des quantités négatives si l'objet ou l'image sont en arrière du foyer.

Quels que soient les signes des quantités désignées au paragraphe précédent par p, p' et f, on a les relations :

$$(1) \qquad p=\varphi+f \qquad p'=\varphi'+f$$

En portant ces valeurs dans la relation générale $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$, on obtient la relation tout aussi générale :

$$(2) \qquad \varphi\varphi' = f^2$$

Cette relation très simple est due à Newton. Elle montre immédiatement que les distances φ et φ' d'un objet et de son image au plan focal sont toujours de même signe, que le miroir soit convexe ou concave.

Avec ces notations la formule $\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$ devient

$$(3) \qquad \frac{i}{o}=\frac{\varphi'+f}{\varphi+f}$$

d'où l'on tire en vertu de la relation (2) :

$$(4) \qquad \frac{i}{o}=\frac{f}{\varphi}=\frac{\varphi'}{f}$$

Les relations si simples (2) et (4) permettent aussi bien que les formules du paragraphe précédent de faire la discussion de la position et de la grandeur de l'image.

CHAPITRE III

RÉFRACTION

1. TRANSMISSION DE LA LUMIÈRE PAR DIFFUSION ET PAR RÉFRACTION. — Quand un rayon lumineux tombe à la surface d'un corps transparent, il y a le plus souvent passage de la lumière à travers ce corps. Si la surface de séparation est mate, la lumière est diffusée dans toutes les directions à travers celui-ci ; mais si la surface est polie, la lumière traverse le corps transparent sous forme d'un rayon IS′ (fig. 36) dont la position est déterminée par la direction du rayon incident SI et par celle de la surface XX′. Ce rayon n'est pas, en général, dans le prolongement du rayon incident : l'ensemble SIR des deux rayons forme une ligne brisée, de là le nom de *réfraction* donné au

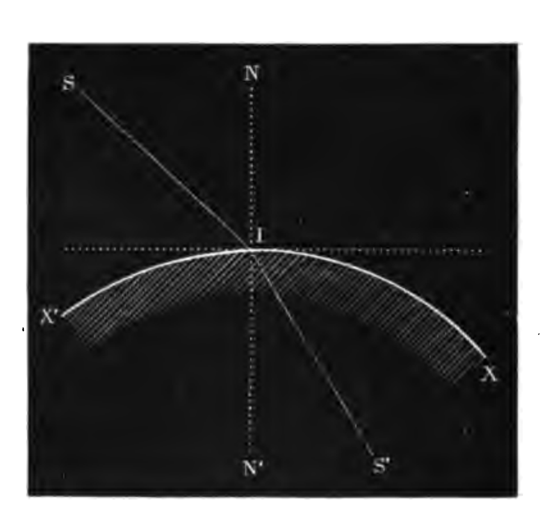


FIG. 36.

phénomène (de *refringere*, briser) et le nom de rayon *réfracté* donné au rayon IS′ qui se propage dans le second milieu. On appelle *angle de réfraction* l'angle S′IN′ que forme le rayon réfracté IS′ avec la normale IN′ à la surface menée par le point d'incidence I.

Du reste, le phénomène de réflexion accompagne toujours le phénomène de réfraction : une portion de la lumière incidente se trouve sur le rayon réfléchi, l'autre sur le rayon réfracté.

Nous nous occuperons seulement ici de la direction du rayon réfracté.

2. LOIS GÉOMÉTRIQUES DE LA RÉFRACTION. — Les lois géométriques de la réfraction ont été données par Descartes (1) ; en voici l'énoncé :

1° *Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence, les rayons incidents et réfractés étant de part et d'autre de la normale.*

On voit que le plan d'incidence contient les trois rayons incident, réfléchi et réfracté.

2° *Quel que soit l'angle d'incidence, il existe un rapport constant entre le sinus de cet angle et le sinus de l'angle de réfraction.*

Ce rapport constant a reçu le nom *d'indice de réfraction* du second milieu transparent par rapport au premier milieu traversé par la lumière. Ainsi, quand la lumière passe de l'air dans l'eau, le rapport constant qui existe entre le sinus de l'angle d'incidence et le sinus de l'angle de réfraction est égal à $\frac{4}{3}$: l'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air est $\frac{4}{3}$.

En appelant i et r les angles d'incidence et de réfraction et n l'indice de réfraction, cette loi s'écrit :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \qquad (1)$$

(1) René Descartes est né à La Haye, en Touraine, en 1596, et mort en Suède en 1650.

Discussion. — Quand l'angle d'incidence est faible l'angle de réfraction est faible aussi, d'après la loi précédente; il en résulte que le rapport des sinus diffère très peu du rapport des angles eux-mêmes ; de là cette loi énoncée par Kepler avant Descartes, et qui n'est rigoureuse que pour des angles infiniment petits :

Quand l'angle d'incidence est faible, il existe un rapport constant entre l'angle d'incidence et l'angle de réfraction.

D'après la loi de Descartes, on voit que l'angle de réfraction augmente toujours avec l'angle d'incidence.

Quand l'angle d'incidence est nul, l'angle de réfraction est nul aussi : un rayon incident normal à la surface de séparation des deux milieux traverse celle-ci sans subir de déviation; c'est le seul cas où il en soit ainsi.

Les deux angles d'incidence et de réfraction croissent donc ensemble à partir de la valeur zéro. Si l'indice de réfraction est supérieur à l'unité ($n > 1$), l'angle de réfraction croît moins vite que l'angle d'incidence : le rayon se rapproche de la normale en traversant la surface de séparation des deux milieux. Ainsi quand un rayon lumineux passe de l'air dans l'eau, l'indice de réfraction étant ici égal à $\frac{4}{3}$, le rayon se rapproche de la normale en se réfractant.

Dans ce cas, l'angle d'incidence i peut croître jusqu'à un angle droit sans que la formule (1) cesse de donner une valeur réelle pour l'angle de réfraction. Pour l'incidence rasante $\left(i = \frac{\pi}{2}\right)$, l'angle de réfraction prend la plus grande valeur l qu'il peut atteindre; d'après la formule (1), cette valeur est fournie par la relation :

$$(2) \qquad \frac{1}{\sin l} = n \quad \text{ou} \quad \sin l = \frac{1}{n}$$

Si l'indice de réfraction est plus petit que l'unité ($n < 1$), l'angle de réfraction croît plus vite que l'angle d'incidence : le rayon lumineux s'écarte de la normale en traversant la surface

de séparation des deux milieux. Ainsi, quand un rayon lumineux passe de l'eau dans l'air, l'indice de réfraction étant ici égal à $\frac{3}{4}$, le rayon s'écarte de la normale en se réfractant.

Dans ce cas, l'angle d'incidence i ne peut pas croître jusqu'à un angle droit sans que la formule (1) cesse de donner pour r une valeur réelle. En effet, pour une valeur l de l'angle d'incidence telle que son sinus soit égal à l'indice de réfraction ($\sin l = n$), on voit que l'angle de réfraction est égal à $\frac{\pi}{2}$; c'est-à-dire que, pour la valeur l de l'angle d'incidence le rayon réfracté fait un angle droit avec la normale, est tangent à la surface de séparation. Il est clair que l'angle de réfraction ne peut pas prendre une valeur plus grande, et la formule (1) nous montre, du reste, que pour les valeurs de i supérieures à l, l'angle r devient imaginaire, puisque son sinus est plus grand que l'unité. Aussi appelle-t-on cette valeur l de l'angle d'incidence *l'angle limite*.

Réflexion totale. — Quel est donc le phénomène qui se produit quand l'angle d'incidence devient supérieur à l'angle limite ?

L'expérience prouve que, dans ce cas, toute la lumière incidente se trouve réfléchie à la surface de séparation des deux milieux. Ainsi, quand un rayon lumineux, qui a traversé l'eau, rencontre la surface de ce liquide en faisant avec la normale un angle supérieur à l'angle limite, égal ici à 48° 35′, la lumière ne pénètre pas dans l'air, elle est entièrement réfléchie à l'intérieur de l'eau. Ce phénomène a reçu le nom de *réflexion totale*.

Du reste, ce n'est pas brusquement que la réflexion totale est acquise. Quand l'angle d'incidence est inférieur à l'angle limite, il y a, outre le rayon réfracté, un rayon réfléchi sur lequel se trouve une portion de la lumière incidente. Ce rayon réfléchi a une intensité relative assez faible, tant que l'angle d'incidence est loin de la valeur limite ; mais dans le voisinage de cette valeur, son intensité croît rapidement pour devenir égale à celle du rayon incident à l'angle limite.

3. Construction géométrique. — Supposons qu'on donne la sur

face de séparation de deux milieux transparents, XX′ (fig. 37 ou 38), l'indice de réfraction n, et la position SI du rayon incident. Il est facile d'obtenir, par une construction géométrique, basée sur la loi de Descartes, la position du rayon réfracté.

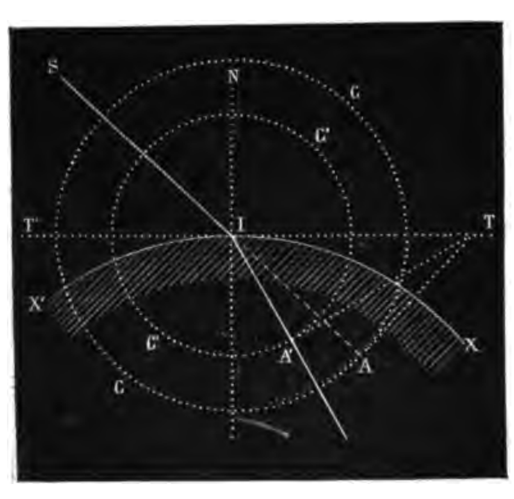


Fig. 37.

Menons la normale NIN′ au point d'incidence I et prenons comme plan de figure le plan d'incidence SIN; ce plan contient le rayon réfracté. Pour avoir sa position, traçons de I pour centre, deux circonférences CC et C′C′ ayant des rayons respectivement proportionnels à l'indice de réfraction donné n, et à l'unité. Prolongeons le rayon incident SI jusqu'à sa rencontre en A avec la circonférence CC; menons par A la tangente AT à cette circonférence jusqu'à sa rencontre en T avec le plan tangent TT′ mené en I à la surface de séparation XIX′; par le point T menons la tangente TA′ à la deuxième circonférence C′C′; enfin, joignons le point de contact A′ de cette tangente au point I : la ligne droite IA′ est la position du rayon réfracté.

En effet, les deux triangles rectangles ATI et ATI fournissent les relations

$$IA' = IT \sin ITA'$$
$$IA = IT \sin ITA$$

et en divisant membre à membre

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{\sin ITA'}{\sin ITA}$$

Or, $\frac{IA}{IA'} = n$ par construction, et, d'autre part, les angles ATI et A'TI sont respectivement égaux aux angles SIN et A'IN' comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; on a donc :

$$\frac{\sin SIN}{\sin A'IN'} = n$$

L'angle SIN étant l'angle d'incidence, l'angle A'I'N est l'angle de réfraction.

Si l'indice de réfraction est plus grand que l'unité, la circonférence CC est d'un rayon plus grand que C'C' (fig. 37) ; le point T, qui est toujours extérieur à CC, est *a fortiori* extérieur à C'C' et l'on peut toujours par ce point T mener une tangente à la circonférence C'C' : quel que soit l'angle d'incidence, il existe un rayon réfracté. Mais, si l'indice de réfraction est plus petit que l'unité, la circonférence CC est d'un rayon moins grand que C'C'. Or, la construction n'est possible que si le point T n'est pas à l'intérieur de C'C'. On voit aisément sur la figure 38, que si le point T est sur la circonférence C'C', le rayon réfracté est rasant, le rayon incident fait avec la normale l'angle limite. Si l'angle d'incidence diminue à partir de cette position, le point T tombe en dehors de C'C', la construction est possible, il y a un rayon réfracté ; si, au contraire, à partir de cette position, l'angle d'incidence augmente, le point T tombe à l'intérieur de la circonférence C'C', la con-

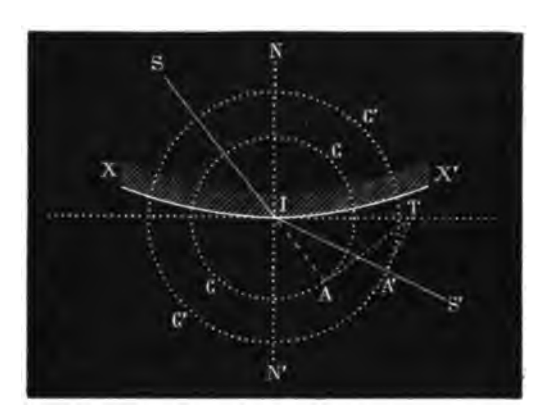


Fig. 38.

struction n'est pas possible, il n'y a plus de rayon réfracté : on est dans le cas de la réflexion totale.

On voit que cette construction géométrique permet de faire aisément la discussion de la loi de Descartes.

4. **DÉMONSTRATION EXPÉRIMENTALE.** — Nous avons énoncé la loi de la réfraction et nous en avons tiré les premières conséquences pour mieux la faire comprendre; il est temps maintenant d'en donner la démonstration. C'est l'expérience qui doit nous la fournir.

On peut établir facilement, dans un cours, la loi de la réfraction, au moyen de l'appareil que nous avons déjà décrit à propos de la réflexion (Chap. II, § 2); il faut seulement, dans le cas actuel, remplacer le miroir qui est au centre du cercle gradué par une cuve de verre C (fig. 39) ayant la forme d'un cylindre aplati dont les bases sont placées parallèlement au cercle gradué GG et dont l'axe passe par le centre O de ce cercle.

Après avoir rendu parfaitement verticale la ligne 0° — 180° de la graduation, on verse dans la cuve, par une petite ouverture qu'elle possède à sa partie supérieure, un liquide, de l'eau par exemple; la quantité de ce liquide doit être telle que sa surface libre LL passe par le centre O.

On opère alors comme dans le cas de la réflexion : on dirige un étroit faisceau de rayons lumineux, provenant du Soleil ou d'une autre source intense, parallèlement à l'alidade A; celui-ci traverse sans déviation la lame cylindrique qui forme le pourtour de la cuve, car les deux surfaces de séparation de l'air et du verre sont normales aux rayons incidents; il tombe ensuite à la surface du liquide en un point situé sur l'axe perpendiculaire au cercle gradué. Or, on constate qu'il est dévié de sa direction en passant de l'air dans le liquide [1], et qu'on peut le recevoir sur le centre de l'écran E que porte la seconde alidade D, en la

(1) En ajoutant à l'eau de la cuve un peu de sulfate de quinine dissous dans l'acide sulfurique, le liquide devient fluorescent sur le trajet du faisceau réfracté et en rend ainsi visible la direction. Un peu de poussière flottant dans l'air permet aussi de voir la direction du faisceau incident; le changement de direction qu'éprouve un rayon en passant de l'air dans le liquide est rendu ainsi des plus apparents.

plaçant convenablement. Puisque le centre de cet écran se meut dans le plan d'incidence, le rayon formant l'axe du faisceau réfracté se trouve dans ce plan, ce qui est la démonstration de la première loi.

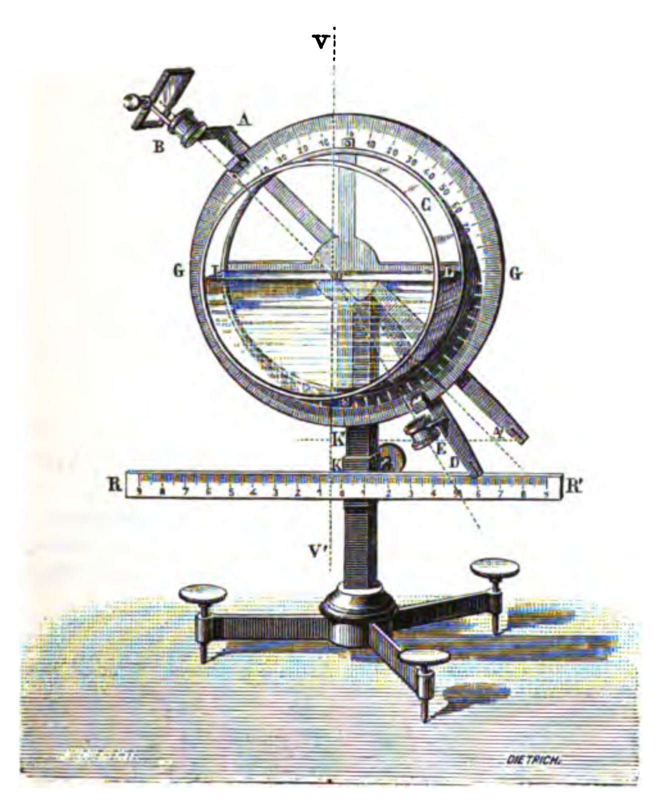


Fig. 39.

La ligne 0° — 180° étant normale à la surface du liquide, la lecture de la position des alidades donne alors immédiatement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction. En prenant les sinus de ces angles et leur rapport, on constate que ce rapport reste

le même quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence; ce qui est la démonstration de la deuxième loi (2).

Si l'on opère comme nous venons de l'indiquer, les rayons lumineux passent de l'air dans l'eau, et, en traversant la surface de séparation, les rayons se rapprochent de la normale. Si l'on dispose l'alidade A comme le représente la figure 40, on peut faire passer les rayons lumineux de l'eau dans l'air. On constate alors

(2) Pour trouver le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction, on peut se dispenser d'avoir recours à une table de sinus, grâce à la disposition suivante: une règle graduée horizontale RR' (fig. 39) peut être déplacée parallèlement à elle-même, le zéro K de sa graduation restant toujours sur la ligne verticale VOV' passant par le centre O du cercle gradué. Pour obtenir une quantité proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence, on soulève la règle jusqu'à ce que son bord supérieur rencontre l'extrémité A' de l'alidade AA' en le plaçant dans la position A'K'. La ligne médiane A'O de cette alidade, le bord supérieur K'A' de la règle et la verticale OK' forment alors un triangle rectangle dans lequel on a :

$$K'A' = OA' \sin i$$

en désignant par i l'angle d'incidence qui est égal à l'angle K'OA', comme opposé par le sommet.

Après avoir lu la longneur K'A', on déplace la règle horizontale RR' jusqu'à ce que son bord supérieur rencontre l'extrémité de l'alidade D qui correspond au rayon réfracté. Le triangle OKD donne alors la relation:

$$KD = OD \sin r$$

en appelant r l'angle de réfraction KOD. En divisant membre à membre ces deux égalités, il vient :

$$\frac{K'A'}{KD} = \frac{OA'}{OD} \frac{\sin i}{\sin r}$$

Or, la longueur des deux alidades étant la même, d'après la construction de l'instrument, on a : $\frac{OA'}{OD} = 1$, et l'égalité ci-dessus devient :

$$\frac{K'A'}{KD} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

le rapport des deux sinus est égal au rapport des deux longueurs connues K'A' et KD.

que l'alidade D, étant disposée pour recevoir le faisceau réfracté, est plus écartée de la normale que l'alidade A.

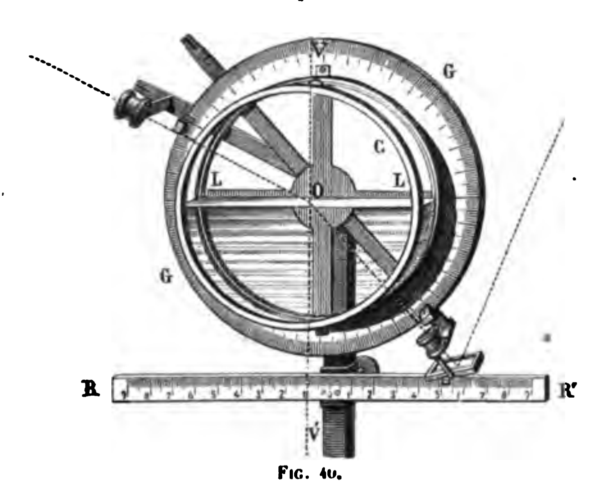


Fig. 40.

Avec cette disposition, l'on trouve aisément la position du faisceau incident qui donne un faisceau réfracté rasant, c'est-à-dire qui correspond à l'angle limite. Pour une incidence plus grande, il y a réflexion totale, on ne trouve plus de rayon réfracté; mais, en disposant l'alidade D symétriquement par rapport à l'alidade A, on reçoit le faisceau réfléchi qui présenterait la même intensité que le faisceau incident, s'il n'y avait pas une faible perte de lumière due à l'absorption et aux réflexions qui se produisent aux surfaces de séparation de l'air et du verre, et du verre et de l'eau.

Cet appareil ne permet d'établir que d'une façon un peu grossière les lois de la réfraction. En traitant des mesures optiques (Chap. VIII) nous ferons une vérification très précise de ces lois. Nous allons voir, du reste, que les nombreuses conséquences qu'on peut déduire des lois de la réfraction sont toujours en parfait accord avec le résultat des expériences.

5. **LOI DES INDICES DE RÉFRACTION.** — L'appareil précédent permet d'obtenir l'indice de réfraction d'un liquide par rapport à l'air, comme nous venons de le montrer. On conçoit, du reste,

qu'en remplaçant le demi-cylindre de liquide par un demi-cylindre de verre ou de toute autre substance solide, on puisse déterminer l'indice de réfraction du verre ou de cette autre substance par rapport à l'air. On conçoit aussi qu'on puisse, en noyant un demi-cylindre d'une substance dans un cylindre concentrique d'une autre substance transparente, prendre l'indice de réfraction de la première par rapport à la seconde. En réalité, ce n'est pas ainsi qu'on a opéré pour mesurer les indices de réfraction; nous verrons, en effet, plus loin, d'autres méthodes plus commodes et, en général, plus précises pour obtenir cette grandeur. Mais il est utile de donner tout de suite quelques résultats importants qu'on peut déduire de la mesure des indices de réfraction, avant de décrire ces méthodes qui trouveront mieux leur place plus loin.

Quand un rayon lumineux passe, sous une incidence oblique, du vide à une autre substance solide, liquide ou gazeuse, le rayon se rapproche toujours de la normale; autrement dit, l'indice de réfraction est plus grand que l'unité. On appelle *indice de réfraction absolu* d'une substance l'indice de réfraction dans le passage de la lumière du vide à cette substance.

Cet indice de réfraction absolu, toujours supérieur à l'unité, en est très voisin pour les gaz : ainsi, l'indice absolu de l'air sec à 0° sous la pression de 76 cent. de mercure est égal à 1,000294. Pour les liquides et les solides il est plus considérable : ainsi, l'indice absolu de l'eau est égal à 1,33 et celui du quartz à 1,55. Un corps est dit plus *réfringent* qu'un autre quand son indice absolu est plus considérable.

En divisant l'indice de réfraction absolu b d'une substance B par l'indice absolu a de la substance A, le quotient $\frac{b}{a}$ est l'indice de réfraction n dans le passage de la lumière de la substance A à la substance B (1) :

$$n = \frac{b}{a} \tag{1}$$

(1) Nous avons appelé n l'indice de réfraction de A par rapport à B; on lui donne quelquefois, pour mieux le distinguer de l'indice de réfraction absolu, le nom d'indice de refraction *relatif* de A par rapport à B.

On a donc, en appelant α et β les angles d'incidence et de réfraction dans le passage de la lumière de A à B :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = \frac{b}{a}$$

d'où :

(2) $$a \sin \alpha = b \sin \beta$$

L'indice de réfraction absolu de l'air a étant très voisin de l'unité, on voit, d'après cette loi, que l'indice de réfraction n d'une substance solide ou liquide par rapport à l'air est très voisin de son indice de réfraction absolu b.

On peut tirer de cette loi une conséquence qui est, en quelque sorte, la généralisation de la loi elle-même. Soient n et n' les indices de réfraction de deux substances B et B' par rapport à une même substance A; désignons par b, b' et a les indices de réfraction absolus des trois substances B, B' et A; la relation (1) donne :

(3) $$n = \frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad n' = \frac{b'}{a}$$

en divisant membre à membre ces deux relations, on obtient :

(4) $$\frac{n}{n'} = \frac{b}{b'}$$

or, la formule (1) nous montre que $\frac{b}{b'}$ est l'indice de réfraction N de la substance B par rapport à la substance B'; on a donc :

(5) $$N = \frac{n}{n'}$$

On obtient l'indice de réfraction d'une substance B *par rapport à une substance* B' *en divisant l'indice de réfraction de* B *par rapport à une substance quelconque* A *par l'indice de réfraction de* B' *par rapport à cette même substance* A.

La relation (1) nous montre encore que l'indice de réfraction $\frac{a}{b}$ d'une substance A par rapport à une autre substance B est l'inverse de l'indice de réfraction $\frac{b}{a}$ de B par rapport à A. Il résulte de là que dans le cas de la réfraction, comme dans celui de la réflexion, la marche des rayons lumineux est réciproque : si (fig. 36) un rayon lumineux SI se réfracte suivant IS', réciproquement, quand un rayon lumineux se dirige suivant S'I, il se réfracte suivant IS. Soient, en effet, α l'angle d'incidence SIN et β l'angle du réfraction S'IN' ; on a, en désignant par a et b les indices de réfraction absolus du milieu A et du milieu B :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{b}{a}$$

Supposons maintenant que la lumière incidente suive la direction S'I, et donne un rayon réfracté faisant un angle α' avec la normale ; on a :

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha'} = \frac{a}{b}$$

De ces deux relations, on tire $\sin \alpha' = \sin \alpha$, d'où $\alpha = \alpha'$, puisque les angles α et α' sont moindres qu'un angle droit : le rayon réfracté dans le second cas prend la direction IS du rayon incident du premier cas.

Il est inutile d'insister sur la manière dont on peut vérifier directement cette réciprocité de la marche des rayons lumineux à l'aide de l'appareil qui nous a servi à établir les lois de la réfraction.

6. **RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE A TRAVERS UNE SÉRIE DE MILIEUX SÉPARÉS PAR DES PLANS PARALLÈLES.** — Supposons qu'un rayon lumineux traverse une série de milieux transparents A, B, C, D,... (fig. 41), d'indices absolus a, b, c, d,... dont les surfaces de séparation sont des plans parallèles.

Les normales $M_1 I_1 N_1$, $M_2 I_2 N_2$, $M_3 I_3 N_3$,... aux divers points d'incidence I_1, I_2, I_3... étant des droites parallèles, les diverses parties SI_1, I_1I_2, I_2I_3,... du rayon lumineux sont dans un même plan. En outre, les angles que forme dans un même milieu un rayon avec la normale à son point d'entrée et avec la normale à son point de sortie ont la même valeur, comme angles alternes-internes ($N_1 I_1 I_2 = I_1 I_2 M_2$, $N_2 I_2 I_3 = I_2 I_3 M_3$, etc.). Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$,... la valeur de ces angles. La loi de la réfraction donne la relation (§ 5, form. 2):

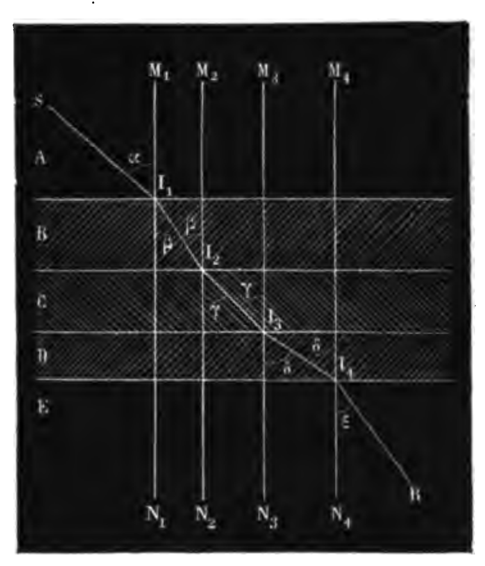


FIG. 41.

$$a \sin \alpha = b \sin \beta = c \sin \gamma = d \sin \delta = e \sin \varepsilon = \ldots$$

On voit par là que si deux des milieux traversés ont même indice, les portions du rayon lumineux qui traversent ces deux milieux sont parallèles entre elles; car, si l'on a par exemple $a = e$, la relation ci-dessus donne $\alpha = \varepsilon$.

En particulier, si la lumière traverse une lame transparente à faces planes et parallèles baignée par l'air des deux côtés, la portion du rayon qui entre dans la lame et celle qui en sort sont parallèles (fig. 42). En traversant la lame, le rayon est déplacé parallèlement à lui-même d'une quantité inférieure à

l'épaisseur de la lame, d'autant plus grande que l'incidence est plus oblique et nulle pour l'incidence normale.

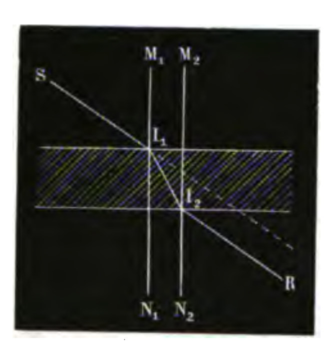


Fig. 42.

On observe facilement ce phénomène en plaçant entre un objet linéaire et l'œil une lame de verre épaisse à faces planes et parallèles, de façon à voir une portion de l'objet à travers la lame et l'autre directement. En disposant celle-ci normalement aux rayons venant de l'objet, la partie vue à travers la lame est dans le prolongement de celle qui est vue directement; mais en inclinant la lame sur la direction des rayons, tout en la laissant parallèle à l'objet linéaire, la partie vue à travers la lame n'est plus dans le prolongement de la partie vue directement.

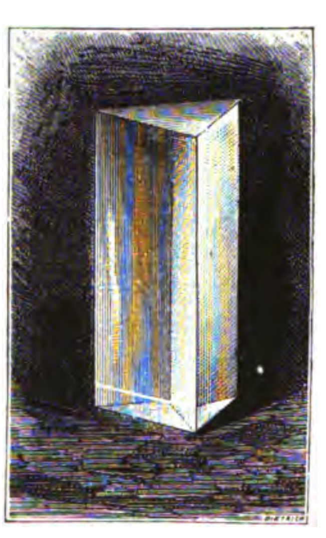


Fig. 43.

7. **Prisme.** — On désigne sous le nom de *prisme*, en optique, un milieu transparent limité par deux plans qui se coupent. On appelle *arête* et *angle* du prisme, l'arête et l'angle du dièdre formé par les deux faces.

En général, un prisme est limité par une troisième face plane parallèle à l'arête, désignée sous le nom de *base* et par deux autres plans perpendiculaires à l'arête (fig. 43). Dans ce cas, ce corps transparent affecte la forme géométrique d'un prisme droit à section triangulaire, d'où le nom donné à cette pièce d'optique; mais, le plus souvent, on n'utilise que la réfraction à travers deux des faces du prisme, d'où la définition donnée plus haut.

Le prisme est employé pour dévier les rayons lumineux de leur marche. Nous allons voir comment se produit cette déviation, et nous allons en déterminer la valeur en nous bornant au cas simple où le rayon incident SI se trouve dans un plan perpendiculaire à l'arête (*section principale*).

Prenons cette section principale comme plan de figure ; soient AB et AB′ (fig. 44) la trace des deux faces du prisme. On voit immédiatement qu'il résulte de la première loi de la réfraction que le rayon réfracté à la première face II′ et le rayon émergent I′S′ se trouvent dans la section principale.

Dans la figure 44, on a supposé que la substance qui forme le prisme est plus réfringente que le milieu extérieur, et l'on voit que le rayon est dévié vers la base du prisme. Nous montrerons plus loin qu'il en est toujours ainsi dans ce cas.

En vertu de la réciprocité de la marche des rayons lumineux, un rayon qui tomberait sur la face AB′ suivant S′I′ se réfracterait suivant I′I et IS.

Menons en I et en I′ les normales NIO et N′I′O aux faces AB et AB′ ; désignons par i et i' les angles *extérieurs* SIN et S′I′N′, par r et r' les angles *intérieurs* OII′ et OI′I. Nous considérerons la quantité i ou la quantité i' comme positive si le rayon SI ou S′I′ est au-dessous de la normale correspondante NI ou N′I′ (en supposant l'arête du prisme en haut, la base en bas) et comme négative si le rayon est au-dessus de la normale ; au contraire, nous considérerons la quantité r ou la quantité r' comme positive si le rayon intérieur II′ est au-dessus de la normale IO ou I′O, comme négative dans le cas inverse ; de cette façon, i et r ou bien i' et r' sont positifs ou négatifs en même temps.

Ces définitions données, la loi de Descartes fournit les relations suivantes :

$$\sin i = n \sin r \tag{1}$$

$$\sin i' = n \sin r' \tag{2}$$

en désignant par n l'indice de réfraction de la substance qui forme le prisme par rapport au milieu qui l'entoure, l'air dans le cas ordinaire.

Comme le quadrilatère OIAI′ a les angles opposés OIA et OI′A droits, les angles IAI′ et IOI′ sont supplémentaires ; il en résulte que l'angle KOI′, extérieur au quadrilatère, est égal à l'angle du prisme IAI′. Or, le triangle OII′ fournit la relation :

$$\text{OII}' + \text{OI}'\text{I} = \text{KOI}'$$

ou, en désignant par *a* la valeur de l'angle du prisme

$$r + r' = a \qquad (3)$$

l'angle du prisme est égal à la somme des angles intérieurs.

Prolongeons les rayons extérieurs SI et S′I′ ; soit D le point de rencontre de ces prolongements IDL et I′D ; l'angle LDS′ que forme le rayon incident SI avec le rayon émergeant S′I′ est appelé la *déviation* : c'est l'angle dont tourne le rayon lumineux en traversant le prisme. Représentons par *d* sa valeur ; considérons cette quantité comme positive si, comme dans le cas de la figure, le rayon en traversant le prisme est rejeté vers la base de celui-ci, et comme négative dans le cas inverse.

Le triangle DII′ fournit la relation :

$$\text{LDI}' = \text{DII}' + \text{DI}'\text{I}$$

or :

$$\text{DII}' = \text{DIO} - \text{I}'\text{IO} = i - r$$

et

$$\text{DI}'\text{I} = \text{DI}'\text{O} - \text{II}'\text{O} = i' - r'$$

D'où :

$$d = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r')$$

et, en vertu de la relation (3)

(4) $$d = i + i' - a$$

Il est aisé de voir que, quels que soient les signes de i, i', r et r' les formules (1), (2), (3) et (4) sont générales ; nous les appellerons les *formules du prisme*.

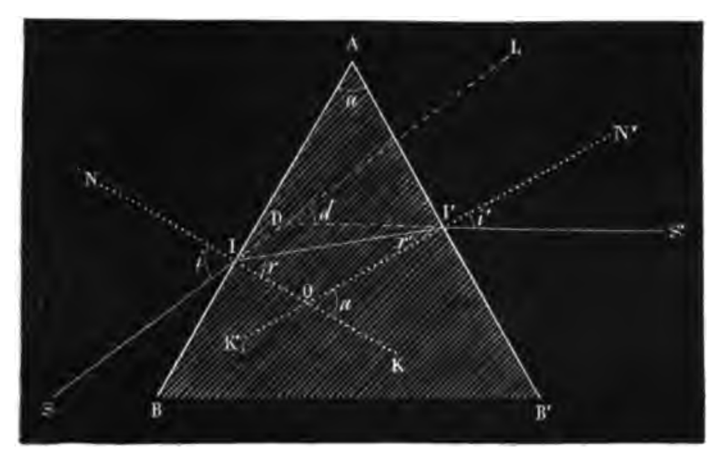


Fig. 44

Dans le cas où l'angle a du prisme est petit et où le rayon tombe sur le prisme dans le voisinage de la normale, les angles i, r, r' et i' sont tous petits, d'après les formules précédentes. Les formules (1) et (2) peuvent alors être remplacées par $i = nr$ et $i' = nr'$. On en tire :

$$i + i' = n\,(r + r') = na$$

et pour la déviation d, d'après (4) :

(5) $$d = (n - 1)\,a$$

La déviation est, dans ce cas, indépendante de la valeur du petit angle d'incidence i.

8. DISCUSSION DES FORMULES DU PRISME. — MINIMUM DE DÉVIATION. — Dans les formules (1), (2), (3) et (4) du paragraphe précédent nous pouvons considérer les angles r, r' i' et d comme des fonctions de l'angle d'incidence i.

L'angle d'émergence i' varie toujours en sens inverse de l'angle d'incidence i. En effet, quand i augmente, r augmente aussi d'après la relation (1) ; par conséquent, d'après la relation (3), r' diminue et, d'après (2), i' diminue aussi.

Puisque i' diminue quand i augmente et *vice versâ*, on ne voit pas immédiatement comment varie la déviation d qui est égale à $i + i' - a$, mais les considérations suivantes vont nous le montrer.

Remarquons d'abord qu'en prenant comme valeur de l'angle d'incidence, dans un second cas, la valeur de l'angle d'émergence dans le premier, l'angle d'émergence du second cas devient égal à l'angle d'incidence du premier, d'après la symétrie des formules (1), (2) et (3) ; du reste, la formule (4) montre que la déviation est la même dans les deux cas. Rien que ce fait, joint à celui que i et i' varient en sens inverse, suffit à montrer que la déviation doit passer par un maximum ou par un minimum, pour une valeur I de l'angle d'incidence telle que les angles d'émergence et d'incidence soient égaux, puisqu'à chaque valeur de l'angle d'incidence inférieure à I correspond une autre valeur de l'angle d'incidence (égale à i') supérieure à I pour laquelle la déviation est la même. Comme pour la valeur I de l'angle d'incidence les angles intérieurs sont égaux entre eux, le triangle AII' (fig. 45) est isocèle et le rayon intérieur II' est perpendiculaire au plan bissecteur AC de l'angle du prisme [1].

(1) L'existence d'un maximum ou d'un minimum de déviation peut être démontrée de la façon la plus nette, en appliquant les règles connues pour la recherche des maxima.

Cherchons la dérivée de d par rapport à i. En représentant par $(d)'_i$ cette dérivée et par $(i')'_i$ la dérivée de i' par rapport à i, on a d'après la relation 4 du paragraphe 7 :

$$(d)'_i = 1 + (i')'_i$$

Reste à savoir si, pour cette valeur I de l'angle d'incidence, la déviation passe par un maximum ou par un minimum. La marche générale, qui consisterait à chercher le signe de la dérivée seconde de d par rapport à i nécessite des calculs très laborieux. Comme la déviation n'est susceptible que d'une seule valeur maxima ou minima (voir la note 1), on arrive plus aisément au résultat, en cherchant si la déviation qui correspond au cas du maxi-

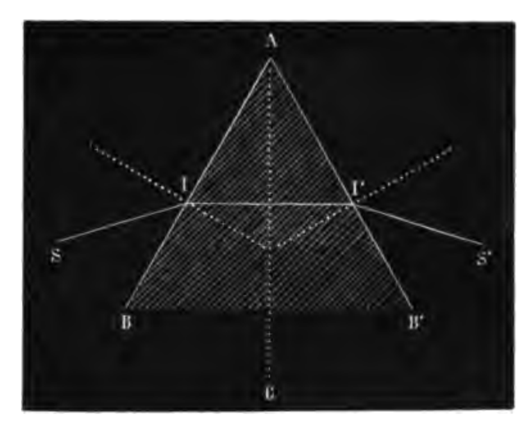


Fig. 45.

Pour trouver la valeur i qui correspond au maximum ou au minimum, écrivons que cette dérivée est nulle :

$$1 + (i')'_i = 0 \tag{1}$$

En égalant les dérivées des deux membres des égalités (1), (2) et (3) du paragraphe précédent, il vient :

$$\cos i = n\,(r)'_i \cos r \tag{2}$$

$$(i')'_i \cos i' = n\,(r')'_i \cos r' \tag{3}$$

$$(r)'_i + (r')'_i = 0$$

Et en éliminant les dérivées $(i')'_i$ $(r)'_i$ et $(r')'_i$ entre ces quatre équations, on obtient la relation :

$$\frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\cos r'}{\cos i'} \tag{5}$$

mum ou du minimum est plus grande ou plus petite qu'une déviation correspondant à une autre incidence.

Choisissons pour celle-ci, l'incidence normale à la première face $i = 0$; pour cette valeur on a, d'après les formules du prisme :

$$r = 0, r' = a \quad \text{et} \quad d = i' - a \quad \text{d'où :} \quad i' = a + d$$

Telle est la condition pour que d passe par une valeur maxima ou minima. En remplaçant cos r par

$$\sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 i}$$

et de même, en remplaçant cos r' par $\frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 i'}$, il vient pour l'équation de condition :

$$(6) \qquad \sqrt{\frac{n^2 - 1}{\cos^2 i} + 1} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{\cos^2 i'} + 1}$$

d'où, en élevant au carré et réduisant :

$$(7) \qquad \cos^2 i = \cos^2 i'$$

De là les solutions $\cos i = \pm \cos i'$. La solution $\cos i = - \cos i'$ doit être rejetée, puisque, i' et i étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, leur cosinus est positif; reste la solution :

$$(8) \qquad \cos i = \cos i' \qquad \text{d'où :} \qquad i = \pm i'$$

Or, la solution $i = - i'$ doit être aussi rejetée car, en vertu des formules du prisme (1) et (2), elle entraînerait $r = - r'$ d'où $r + r' = 0$ et l'on sait que $r + r' = a$.

Il ne reste donc que la solution $i = i'$, qui entraîne $r = r' = \frac{a}{2}$, d'où $\sin i = \sin i' = n \sin\frac{a}{2}$; la valeur de i qui satisfait à cette dernière relation est la seule pour laquelle la déviation passe par un minimum ou un maximum.

et, par conséquent :

(6) $$\sin(a + d) = n \sin a$$

D'autre part, soit D la valeur de la déviation maxima ou minima qui a lieu pour l'incidence I ; en appelant R la valeur correspondante de l'angle intérieur, on a :

$$2R = a \quad \text{et} \quad D = 2I - a \quad \text{d'où : } I = \frac{a + D}{2}$$

et, par conséquent :

(7) $$\sin \frac{a + D}{2} = n \sin \frac{a}{2}$$

En égalant les valeurs de n tirées des relations (6) et (7), il vient :

$$\frac{\sin \frac{a+D}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin(a+d)}{\sin a} = \frac{\sin \frac{a+d}{2} \cos \frac{a+d}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}$$

d'où :

(8) $$\frac{\sin \frac{a+D}{2}}{\sin \frac{a+d}{2}} = \frac{\cos \frac{a+d}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$$

Remarquons maintenent que l'angle $a + d$ étant égal à i' est inférieur à 90° ; on a donc *a fortiori* $\frac{a + d}{2} < 90°$ en valeur absolue. De même, comme $\frac{a + D}{2} = I$, cet angle a une va-

leur absolue inférieure à 90°. Enfin comme a est plus petit que 180°, $\frac{a}{2}$ est aussi toujours plus petit que 90°.

Distinguons maintenant deux cas.

1° $n > 1$. — Dans ce cas, qui est le cas habituel, la déviation d correspondant à l'incidence normale est positive ; on a donc :

$$\frac{a+d}{2} > \frac{a}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\cos \frac{a+d}{2}}{\cos \frac{a}{2}} < 1$$

et, par conséquent, d'après (8) :

$$\sin \frac{a+D}{2} < \sin \frac{a+d}{2}$$

ou

$$\frac{a+D}{2} < \frac{a+d}{2} \qquad \text{ou encore} \qquad D < d$$

La déviatoin D, étant plus petite que la déviation correspondant à l'incidence normale, est un *minimum*.

Du reste, comme on a $D = 2(I - R)$ et que, dans le cas de $n > 1$, l'angle I est plus grand que l'angle R, la déviation *minima* est positive ; par conséquent, *les déviations données par un prisme plus réfringent que le milieu ambiant sont toujours positives.*

2° $n < 1$. — Ce serait le cas, par exemple, d'un prisme d'air plongé dans l'eau.

Or, dans ce cas, la déviation d correspondant à l'incidence normale étant négative, on a :

$$\frac{a+d}{2} < \frac{a}{2}$$

Et, comme $\frac{a+d}{2} = \frac{i}{2}$ est positif et plus petit que 90°, il en résulte que l'on a :

$$\frac{\cos\frac{a+d}{2}}{\cos\frac{a}{2}} > 1$$

d'où, d'après (8) :

$$\sin\frac{a+D}{2} > \sin\frac{a+d}{2} \qquad \text{ou} \qquad D > d$$

La déviation D, étant plus grande que la déviation correspondant à l'incidence normale, est un maximum.

Du reste, comme on a $D = 2(I - R)$ et que dans le cas de $n < 1$, l'angle I est plus petit que l'angle R, la déviation *maxima* D est négative ; par conséquent *les déviations données par un prisme moins réfringent que le milieu ambiant sont toujours négatives.*

9. Conditions d'émergence. — Quand la substance qui forme le prisme est plus refringente que le milieu ambiant, comme c'est le cas habituel, un rayon qui a penétré par la première face peut tomber sur la seconde sous un angle supérieur à l'angle limite, subir la réflexion totale, et, par conséquent, ne pas sortir par cette face. Examinons les conditions que doit remplir le rayon pour sortir par la seconde face du prisme.

Menons par un point I de la face AB (fig. 46) la normale NIN_1 à cette face, et décrivons un cône de révolution ayant I pour sommet, NIN_1 pour axe et GIN_1, égal à l'angle limite l, pour angle générateur. Tous les rayons qui entrent dans le prisme par le point I sont contenus à l'intérieur de ce cône après la première réfraction.

Abaissons, maintenant, du point I la perpendiculaire IP sur la seconde face AB′, et décrivons un autre cône de révolution ayant I pour sommet, IP pour axe et HIP, égal encore à l'angle

limite l, pour angle générateur. Tous les rayons passant par le point I et qui tombent sur la face AB' sous un angle moindre que l'angle limite sont compris à l'intérieur de ce cône.

Il résulte de là que les rayons lumineux qui pénètrent dans le prisme par le point I et qui peuvent sortir par la face AB' sont, à l'intérieur du prisme, contenus dans la partie commune aux deux cônes que nous venons de considérer.

En particulier, ceux de ces rayons qui sont compris dans la section principale passant par I, sont contenus dans l'angle GIH. Or, on a :

$$GIH = HIP - PIG = l - PIG$$

et

$$PIG = PIN_1 - GIN_1 = a - l$$

en désignant par a l'angle du prisme égal à l'angle PIN_1 des normales à ses faces.

On tire de là :

$$(1) \qquad GIH = l - (a - l) = 2l - a$$

On voit que si l'angle a du prisme est inférieur à $2l$, les deux cônes ont une partie commune : un certain nombre de rayons entrant par la face AB peuvent sortir par la face AB'. Mais, si a est supérieur à $2l$, les cônes n'ont plus de parties communes : aucun des rayons entrant par la face AB ne peut sortir par la face AB'; ils subissent tous sur cette face la réflexion totale et sortent, le plus souvent, par la base du prisme.

Ainsi, pour le verre placé au milieu de l'air, l'angle limite est égal environ à 42°; dès que l'angle d'un prisme de verre est supérieur à 84°, le passage d'un rayon lumineux à travers les deux faces de ce prisme est impossible.

Considérons maintenant le cas où a est inférieur à $2l$; menons le rayon extérieur KI, qui donne naissance au rayon intérieur IH tombant sous l'angle limite sur la face AB'. Tous les rayons incidents passant par I et compris dans l'angle BIK, après

réfraction seront compris dans l'angle GIH et, par conséquent, pourront sortir par la face AB'. Tous les rayons tombant en I et compris dans l'angle KIA, après réfraction seront compris dans l'angle HIG_1 et, par conséquent, subiront la réflexion totale sur la face AB', s'ils rencontrent cette face.

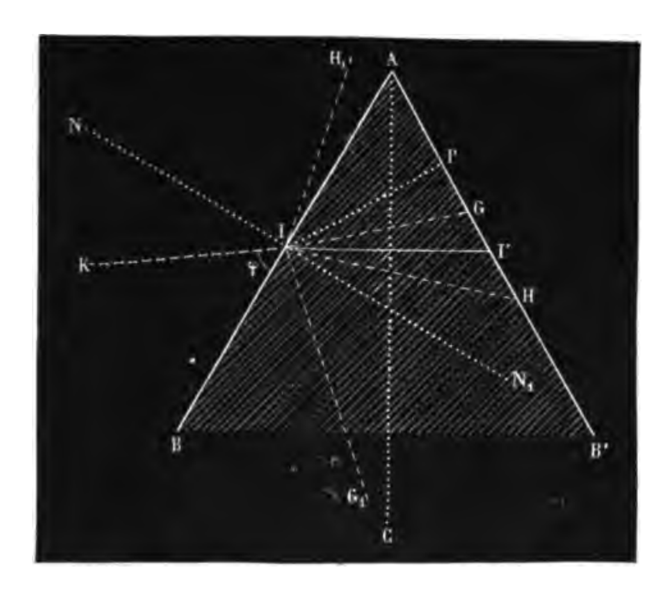


Fig. 46.

Cherchons la valeur φ de l'angle BIK. On a :

$$\cos \varphi = \sin KIN = n \sin HIN_1$$

Or

$$HIN_1 = N_1IP - HIP = a - l$$

et, en remplaçant, on obtient :

$$\cos \varphi = n \sin (a - l) \tag{2}$$

Cette relation est exacte, du reste, comme on peut s'en assurer, que KI soit situé dans l'angle BIN ou dans l'angle NIA. Discutons cette formule.

Pour un prisme d'angle nul ($a=0$), c'est-à-dire pour une lame de verre à faces parallèles, on a : $\cos\varphi = -n \sin l = -1$; d'où $\varphi = \pi$: tous les rayons tombant en I traversent les deux faces du prisme.

Mais dès qu'on a affaire à un véritable prisme, a n'étant pas nul, φ est inférieur à π, et il existe toujours un angle KIA tel que les rayons compris dans cet angle ne peuvent pas traverser les deux faces du prisme; cet angle KIA, du reste, étant d'autant plus petit que l'angle du prisme est plus aigu.

Pour $a = l$, on a $\cos\varphi = 0$, d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$: l'angle BIN contient tous les rayons qui peuvent traverser les deux faces du prisme.

Pour $a < l$ l'angle φ est obtus; pour $a > l$ l'angle φ est aigu et d'autant plus petit que a est plus grand. Enfin, pour $a = 2l$, $\cos\varphi = 0$ d'où $\varphi = 1$: pour cette valeur de a et pour des valeurs plus grandes, comme nous le savons déjà, aucun rayon ne peut traverser les deux faces du prisme.

Faisons remarquer, pour terminer cette discussion, que quelque petit que soit l'angle φ, il y a toujours un rayon traversant les deux faces du prisme qui donne une déviation minima. En effet, le rayon intérieur II', qui correspond à la déviation minima, étant perpendiculaire à la bissectrice AC de l'angle BAB', est bissecteur de l'angle PIN_1, dont les côtés sont respectivement perpendiculaires à ceux de l'angle BAB'. Or, les angles PIG et N_1IH étant égaux entre eux, comme égaux tous les deux à $a - l$, il en résulte que le rayon II' est aussi bissecteur de l'angle GIH. Puisqu'il est toujours contenu dans cet angle, le rayon donnant le minimum de déviation traverse les deux faces du prisme, tant que a est inférieur à $2l$.

10. Réfraction a travers une surface sphérique. — Pour arriver à établir les propriétés des lentilles sphériques, qui jouent un grand rôle dans la construction des instruments d'optique, commençons par étudier la réfraction de la lumière à

travers la surface de séparation sphérique de deux milieux d'indices absolus différents n_1 et n_2.

Soit A_1 (fig. 47) un point lumineux placé dans le milieu d'indice n_1, et soit O le centre de la sphère à laquelle appartient la sur-

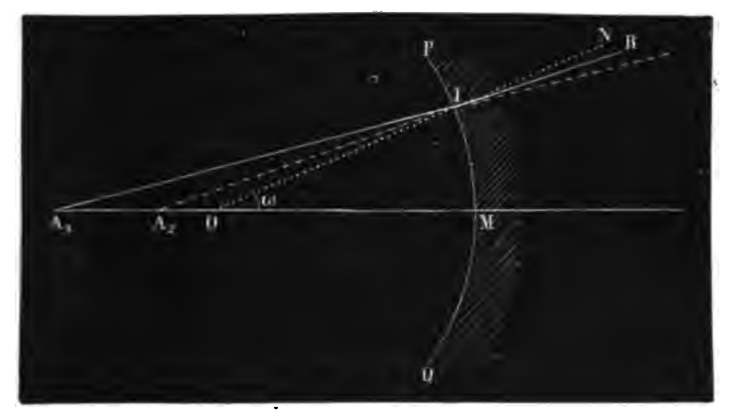


Fig. 47.

face de séparation PQ des deux milieux. Joignons le point A_1 au point O ; comme dans le cas de la réflexion à la surface d'un miroir sphérique, nous appellerons *axe* du point A_1 la droite A_1OM : le rayon se dirigeant suivant cet axe traverse la surface PQ sans être dévié, puisqu'il tombe normalement à cette surface. Considérons maintenant un autre rayon A_1I issu de A_1 rencontrant en I la surface PQ. Prenons comme plan de figure le plan OA_1I, qui est le plan d'incidence de A_1I, puisque OIN, rayon de la sphère PQ, est la normale à la surface au point I. Le rayon réfracté IR est dans ce plan ; dans le cas de la figure où la concavité de PQ est tournée vers A_1, et où l'on a supposé $n_2 > n_1$ le rayon réfracté IR ne rencontre pas l'axe ; mais son prolongement coupe celui-ci en un certain point A_2.

Comme pour la réflexion à la surface des miroirs sphériques, nous allons montrer que le point A_2 est un point fixe, indépendant de l'angle IA_1M que fait le rayon avec l'axe, pourvu que l'arc MI soit vu du centre de courbure O sous un angle assez petit

pour qu'on puisse négliger son carré devant l'unité; désignons par ω la valeur de cet angle MOI.

Pour faire cette démonstration, remarquons que l'angle A_1IO est l'angle d'incidence, et que l'angle A_2IO, opposé à l'angle de réfraction RIN est égal à celui-ci; on a donc :

$$(1) \qquad \frac{\sin A_1IO}{\sin A_2IO} = \frac{n_2}{n_1}$$

D'autre part, les deux triangles A_1IO et A_2IO ont des aires respectivement égales à $\frac{1}{2} A_1I \times OI \sin A_1IO$ et $\frac{1}{2} A_2I \times OI \sin A_2IO$, et, comme les aires de ces triangles sont proportionnelles à leurs bases A_1O et A_2O, puisqu'ils ont même hauteur, on a la relation :

$$(2) \qquad \frac{\frac{1}{2} A_1I \times OI \times \sin A_1IO}{\frac{1}{2} A_2I \times OI \times \sin A_2IO} = \frac{A_1O}{A_2O}$$

ou, en simplifiant et en remplaçant le rapport des sinus par la valeur fournie par la relation (1) :

$$(3) \qquad \frac{A_1I}{A_2I} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{A_1O}{A_2O}$$

Or, on a dans le triangle A_1IO :

$$(4) \qquad \overline{A_1I}^2 = \overline{A_1O}^2 + \overline{OI}^2 + 2\, A_1O \times OI \cos \omega$$

comme $\cos \omega$ ne diffère de l'unité que d'une quantité $\left(2 \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$ de l'ordre de grandeur de ω^2, en négligeant cette quantité devant l'unité le second membre de la relation (4) devient :

$$\overline{A_1O}^2 + \overline{OI}^2 + 2\, A_1O \times OI = (A_1O + OI)^2 = \overline{A_1M}^2$$

puisque $OI = OM$.

Au degré d'approximation indiqué ci-dessus nous pouvons remplacer dans (3) A_1I par A_1M et, pour la même raison nous pouvons remplacer A_2I par A_2M ; il vient alors :

$$(5) \qquad \frac{A_1M}{A_2M} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{A_1O}{A_2O}$$

Désignons maintenant, comme pour les miroirs, par p_1, p_2 et R les longueurs A_1M, A_2M et OM ; la relation (5) devient :

$$(6) \qquad \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_1 - R}{p_2 - R}$$

d'après cette relation, on voit que, la quantité p_2 ne dépendant pas de la direction du rayon A_1I, le point A_2 est fixe : après leur réfraction, tous les rayons issus de A_1 et qui sont voisins de l'axe A_1OM semblent venir du point A_2. Ce point est une image virtuelle de A_1.

Nous pouvons mettre la relation (6) sous la forme suivante qui est plus symétrique :

$$(7) \qquad \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

En considérant, comme nous l'avons fait pour les miroirs sphériques, les différents cas qui peuvent se présenter suivant la position du point A_1 et suivant que la surface de séparation tourne sa convexité ou sa concavité du côté de la lumière incidente, nous établirions pour chaque cas, par des raisonnements calqués sur le précédent, une relation analogue à celle donnée par la formule 7 : le point lumineux réel ou virtuel donne toujours naissance à une image soit réelle soit virtuelle.

Si nous convenons de désigner toujours par p_1 la distance du point-objet à la surface de séparation et par p_2, celle du point-image et de regarder ces quantités comme positives, quand le point correspondant est en avant de la surface de séparation, par rapport à la marche des rayons incidents, et comme négatives dans le cas contraire, si nous convenons, en outre, de regarder R comme

une quantité positive si le centre de courbure est du côté où arrive la lumière et comme une quantité négative dans le cas inverse, nous trouverions que la formule (7) est applicable à tous les cas : cette formule est générale.

11. L'IMAGE EST SEMBLABLE A L'OBJET. — Dans le cas de la réfraction à travers une surface sphérique, comme pour la réflexion à la surface d'un miroir sphérique, les images des divers points d'un plan, s'écartant peu d'un axe perpendiculaire à ce plan, sont situées dans un plan parallèle ; en outre, ces points forment une image semblable à l'objet et semblablement placée.

Ces deux propriétés se démontrent exactement comme dans le cas des miroirs (voir Chap. II, § 8, 2° et 3°).

12. RÉFRACTION A TRAVERS PLUSIEURS SURFACES SPHÉRIQUES CENTRÉES. — Supposons plusieurs milieux transparents séparés par des surfaces sphériques ayant leurs centres sur une même droite ; nous dirons que ces surfaces forment un *système dioptrique centré* et nous appellerons *axe principal* de ce système la droite qui joint tous les centres de courbure.

On donne le nom de *section principale* à tout plan passant par l'axe principal ; un pareil plan coupe chacune des surfaces sphériques suivant un arc de grand cercle. Il est clair, d'après la première loi de la réfraction, ou, plus simplement, par raison de symétrie, qu'un rayon situé dans une section principale reste toujours dans cette section quel que soit le nombre des réfractions qu'il éprouve.

Un objet plan A_1 réel ou virtuel, perpendiculaire, ou à peu près, à l'axe principal et dont les divers points s'écartent peu de cet axe, fournit, après réfraction des rayons lumineux à travers la première surface sphérique, une image A_2 dans un plan parallèle à A_1. Cette image fonctionne comme un objet réel ou virtuel par rapport à la seconde surface réfringente qui en donne une image A_3 parallèle et semblable à A_2 et, par conséquent, à A_1 ; et ainsi de suite : chaque image fonctionnant comme objet par rapport à la surface sphérique suivante, tout le système donne de A_1 une image réelle ou virtuelle semblable à cet objet et située dans un plan parallèle.

Il n'en serait plus de même, soit si les diverses surfaces sphériques avaient leurs centres trop loin d'une même droite, soit si les surfaces étant centrées, l'objet plan n'était pas à peu près perpendiculaire à l'axe principal, ou s'écartait trop de cet axe. Alors, en effet, nous ne pourrions plus dire que l'image d'un objet plan est dans un plan parallèle, ni même que l'image d'un point est un point.

Malgré cette restriction, la propriété que nous venons d'établir a une grande importance, car beaucoup d'instruments d'optique forment un système dioptrique centré.

Dans ce qui suivra, toutes les fois que le contraire ne sera pas expressément indiqué nous supposerons l'objet placé dans des conditions telles que le système dioptrique centré en donne une image semblable et parallèle.

En vertu de la réciprocité de la marche des rayons lumineux, si un objet B a même forme et même position que l'image A donnée par un système dioptrique d'un objet A, l'image B' de B, donnée par le système, à même forme et même position que A. Deux plans A et A' dont l'un est l'image de l'autre sont appelés *plans conjugués*; deux points dont l'un est l'image de l'autre sont appelés *foyers conjugués*.

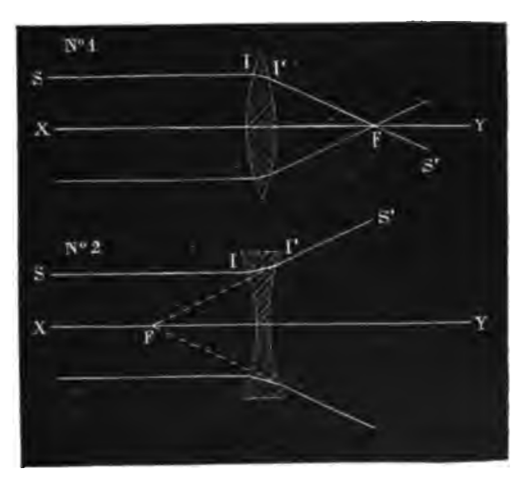


FIG. 48.

Si des rayons, tels que SI (fig. 48), tombent sur un système dioptrique centré parallèlement à l'axe principal XY, ils peuvent être considérés comme venant d'un point situé à l'infini sur cet axe; après avoir traversé le système, tous ces rayons vont se

couper, soit réellement (fig. 48, n° 1), soit par leur prolongement (n° 2) en un même point F image réelle ou virtuelle du point de l'infini et appelé *foyer principal* du système. Quand le foyer est réel, le système est dit *convergent*, quand le foyer est virtuel le système est dit *divergent*, puisque dans le premier cas les rayons qui tombent parallèlement à l'axe, après réfraction convergent vers lui (n° 1) tandis qu'ils divergent dans le second cas (n° 2).

Réciproquement, un foyer principal étant le foyer conjugué d'un point à l'infini situé sur l'axe principal, tout rayon tel que S'I' (n° 1) qui tombe sur un système convergent en passant par le foyer principal, sort du système parallèlement à l'axe principal ; tout rayon tel que S'I' (n° 2) qui tombe sur un système divergent en se dirigeant vers le foyer principal F sort du système parallèlement à l'axe principal.



Fig. 49.

Du reste, bien entendu, comme la lumière peut pénétrer dans le système suivant deux sens opposés, il y a deux foyers principaux ; ils peuvent être réels tous les deux (ex. : lentille convergente), virtuels tous les deux (ex. : lentille divergente) ou enfin l'un réel et l'autre virtuel, le système étant convergent d'un côté et divergent de l'autre (ex. : oculaire d'Huyghens, Chap. VII, § 12).

Le sens suivant lequel la lumière tombe sur le système étant déterminé, convenons d'appeler toujours *premier* foyer principal

celui des deux foyers F_1 (fig. 49) où doit être placé un point objet pour que son image se forme à l'infini et, par conséquent, *deuxième* foyer principal, celui F_2 où se forme l'image d'un point situé à l'infini sur l'axe principal. Pour un système convergent des deux côtés (fig. 49, n° 1) le premier foyer principal F_1 est en avant du système par rapport à la marche des rayons lumineux et le deuxième F_2 en arrière. C'est l'inverse pour un système divergent des deux côtés (n° 2) : le premier foyer principal F_1 est en arrière de la première face du système, le deuxième foyer F_2 en avant de la dernière face du système, puisque le point-objet placé en F_1 dont l'image est à l'infini est virtuel, et que l'image du point de l'infini placée en F_2 est virtuelle aussi.

On appelle *plan focal* un plan perpendiculaire à l'axe principal et passant par l'un des deux foyers principaux. Un objet plan perpendiculaire à l'axe et placé assez loin pour pouvoir être considéré comme à l'infini donne son image dans le *deuxième* plan focal. Réciproquement, un objet placé dans le *premier* plan focal donne son image à l'infini ; par conséquent, les rayons émis par un point du premier plan focal sortent du système parallèlement entre eux.

Avant de continuer l'exposé des propriétés générales des systèmes dioptriques centrés, nous allons, pour plus de clarté, étudier d'abord le cas particulier très important où le système se réduit à une seule lentille sphérique. Nous ferons, du reste, cette étude de façon que les propriétés établies plus loin pour un système centré quelconque se présenteront comme une généralisation des propriétés des lentilles.

13. **LENTILLES SPHÉRIQUES. — DÉFINITIONS.** — On désigne, en optique, sous le nom de *lentille sphérique* ou simplement de *lentille*, un milieu transparent limité par deux surfaces sphériques.

La ligne qui joint les centres des sphères dont font partie les deux faces de la lentille est l'axe principal de ce système centré.

Une face de la lentille est dite *convexe* ou *concave*, suivant qu'elle tourne vers l'extérieur sa convexité ou sa concavité. Une face plane, qui peut être considérée comme une face sphérique

de rayon infini, forme la transition entre une face concave et une face convexe.

D'après cela, on peut distinguer six formes principales de lentilles, dont les coupes, par une section principale, sont représentées par la figure 50 : 1° lentille *biconvexe* A ; 2° lentille *plan-convexe* B ; 3° lentille *concavo-convexe* C (la face concave a un rayon plus grand que la face convexe) ; 4° lentille *convexo-concave* D (la face convexe a un rayon plus grand que la face concave) (1) ; 5° lentille *plan-concave* E ; 6° lentille *biconcave* F. Les trois premières formes sont plus épaisses sur l'axe principal XX' que sur les bords ; les trois dernières sont, au contraire, plus épaisses vers les bords que sur l'axe.



Fig. 50.

Supposons, ce qui est le cas habituel, que la substance qui forme la lentille soit plus réfringente que le milieu ambiant, et considérons un rayon parallèle à l'axe principal qui tombe sur l'une de ces lentilles ; nous savons qu'après réfraction, le rayon reste dans la même section principale ; prenons celle-ci pour plan de la figure 51. Menons aux points I et I' où le rayon rencontre la première et la deuxième face, les plans tangents à ces faces ; pour ce rayon, la réfraction s'opère à travers la lentille comme si celle-ci était remplacée par un prisme de même substance ayant ces plans tangents pour face. Or, si la lentille est plus épaisse au milieu que sur les bords (A, B, C fig. 50, A fig. 51), ce prisme tourne sa base du côté de l'axe : le rayon deux fois réfracté est dévié vers l'axe et le coupe. Si, au contraire, la lentille est moins épaisse au milieu que sur les bords (D, E, F

(1) On désigne habituellement la lentille concavo-convexe sous le nom plus simple de *ménisque convergent* et la lentille convexo-concave sous le nom de *ménisque divergent*.

fig. 50, F fig. 51), le prisme a sa base tournée en sens inverse : le rayon deux fois réfracté s'écarte de l'axe, son prolongement le rencontre. Les lentilles des trois premières formes A, B, C font

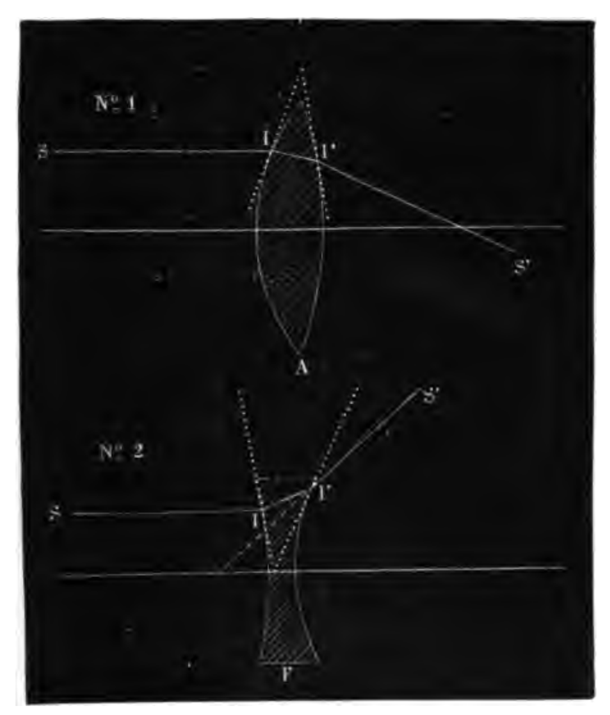


Fig. 51.

ainsi converger vers l'axe principal des rayons qui arrivent parallèlement à cet axe ; aussi les appelle-t-on lentilles *convergentes* : les deux foyers sont réels. Les lentilles des trois dernières formes D, E, F font diverger les rayons qui tombent parallèlement à l'axe principal, on les appelle lentilles *divergentes* : les deux foyers sont virtuels ([1]).

(1) Ce que nous venons de dire peut pourtant se trouver en défaut dans le cas d'une lentille dont les faces sont très écartées l'une de l'autre. Supposons

Nous allons voir qu'en ne considérant que des rayons incidents s'écartant peu les uns des autres, les propriétée sont les mêmes pour les trois formes des lentilles convergentes, d'une part, et pour les trois formes des lentilles divergentes, d'une autre, ce qui rend très simple l'étude des lentilles.

14. CENTRE OPTIQUE. — POINTS NODAUX. — Il existe sur l'axe principal de toute lentille un point désigné sous le nom de *centre optique*, tel que *tout rayon qui, à l'intérieur de la lentille passe par ce point ou se dirige vers lui, sort de celle-ci parallèlement à sa direction d'entrée.*

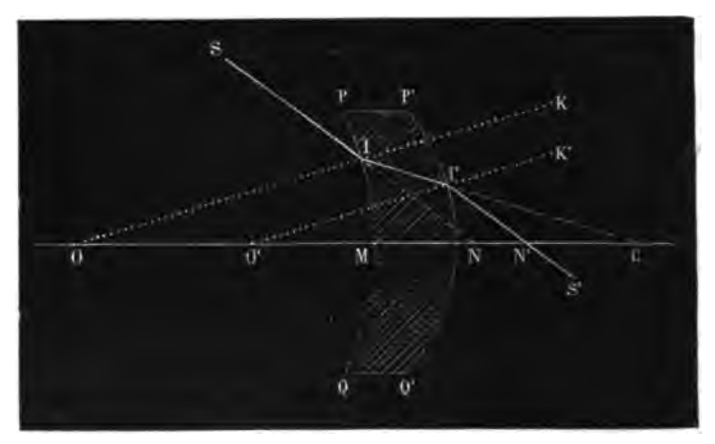


Fig. 52.

Nous nous bornerons, dans ce paragraphe, à établir cette propriété dans le cas, qui est le plus fréquent, où les deux faces

en effet, que la première face soit convexe et la seconde plane. Il peut se faire alors que les rayons qui tombent parallèlement à l'axe coupent celui-ci en un point O après avoir traversé la première face seulement, puis aillent en divergeant ensuite, à partir de ce point O. Or, après avoir traversé la seconde face plane, ces rayons divergent encore. Voilà un exemple d'une lentille plus épaisse au milieu que sur les bords qui forme un système divergent quand la lumière tombe sur la face bombée. Mais faisons remarquer que des lentilles aussi épaisses sont bien rarement employées.

de la lentille sont baignées par le même milieu (l'air dans les circonstances ordinaires).

Soient O et O' les centres de courbure des deux faces PQ et P'Q' de la lentille. Menons par O et par O' deux rayons OIK et O'I'K' parallèles entre eux, joignons les points I et I' où ces rayons rencontrent les surfaces sphériques correspondantes. Les droites OI et O'I' sont dans une même section principale, prise pour plan de la figure 52 et, par conséquent, la direction de la droite II', située dans ce plan, coupe l'axe en un certain point C; ce point est le centre optique.

En effet, menons le rayon SI, qui se réfracterait à travers la face PQ suivant II' et le rayon émergent I'S' correspondant au rayon intérieur II'; ces deux rayons SI et S'I' sont dans le plan de la figure, et l'on a, en désignant par n l'indice de la substance qui forme la lentille par rapport au milieu extérieur :

$$\frac{\sin SIO}{\sin KII'} = n \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin K'I'S'}{\sin O'I'I} = n$$

comme $KII' = O'I'I$, il en résulte que les angles SIO et K'I'S' sont égaux entre eux. Or, les côtés IO et K'I' de ces angles sont parallèles, et, vu leurs directions, les autres côtés IS et I'S' sont aussi parallèles, puisque les angles sont égaux. Ainsi, le rayon d'entrée SI est parallèle au rayon de sortie I'S'.

D'autre part, la position du point C est indépendante de la direction choisie pour les deux rayons OI et O'I', car les deux triangles semblables OIC et O'I'C' fournissent la relation :

$$(1) \qquad \frac{O'C}{OC} = \frac{O'I'}{OI} = \frac{R'}{R}$$

en désignant par R et R' les valeurs des rayons de courbure des faces : le point C, divisant la droite OO' en deux segments OC et O'C proportionnels à des quantités invariables R et R', est un point fixe.

On voit qu'en faisant varier progressivement la direction des rayons parallèles OI et O'I', on obtiendra successivement tous

les rayons intérieurs II' se dirigeant vers le point C; par conséquent, la propriété que nous venons d'établir restant vraie pour tous les rayons intérieurs à la lentille qui se dirigent vers le point C, celui-ci jouit de la propriété indiquée plus haut pour le centre optique.

En désignant par — c et — c' les distances CM et CM' du centre optique aux faces PMQ et P'M'Q' de la lentille et par e l'épaisseur MM' de celle-ci, on a :

$$c' - c = e \tag{2}$$

et d'après la relation (1) :

$$\frac{R' - c'}{R - c} = \frac{R'}{R} \tag{3}$$

d'où :

$$\frac{c}{R} = \frac{c'}{R'} = \frac{e}{R' - R} \tag{4}$$

Ces formules sont générales avec la convention faite plus haut (§ 10) pour les signes de R et de R', et en convenant de considérer c ou c' comme une quantité positive, si le centre optique est en avant de la face correspondante par rapport à la lumière incidente, et comme une quantité négative si le centre optique est en arrière de cette face. Il est facile de voir d'après la formule (4) que, dans les lentilles biconvexes et biconcaves, le centre optique est à l'intérieur de la lentille

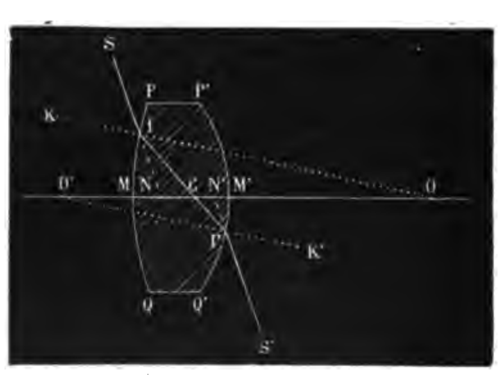


Fig. 53.

($c < 0$, $c' > 0$, fig. 53) ; que, pour les lentilles plan-convexes ou plan-concaves, il est sur la face bombée ($c < 0$, $c' = 0$, fig. 54) ; qu'enfin, pour les ménisques convergents ou divergents, il est en dehors de la lentille du côté le plus bombé ($c < 0$, $c' < 0$, fig. 52).

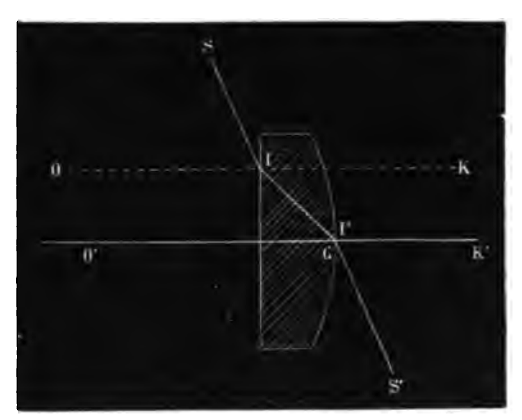


Fig. 54.

Les propriétés du centre optique subsistent quelqu'épaisse que soit la lentille et quelque grande que soit l'inclinaison des rayons incidents sur l'axe principal. En nous bornant maintenant à considérer des rayons voisins de l'axe principal, soit N le foyer conjugué du point C pour la réfraction à travers la première surface PQ et N' le foyer conjugué de C pour la réfraction à travers la seconde surface P'Q' ; ces deux points N et N', situés sur l'axe principal, sont désignés sous le nom de *points nodaux : tous les rayons dont la direction passe par le premier point nodal* N, *prennent, après avoir traversé la première face de la lentille, une direction passant par le centre optique* C, *et, après avoir traversé la deuxième face, une direction parallèle à la direction d'entrée, passant par le second point nodal* N' (fig. 52 et 53).

En désignant par a la distance du point nodal N à la face correspondante PQ, et en considérant cette quantité comme positive si le point nodal N est en avant de la face correspondante PQ et comme négative s'il est en arrière (comme dans les figures 52 ou 53), la formule 7 du paragraphe 10, dans laquelle on doit changer p_1 en a, p_2 en c, $\frac{n_2}{n_1}$ en n, fournit la relation :

(5) $$\frac{1}{a} - \frac{n}{c} = \frac{1-n}{R}$$

et, en remplaçant c par sa valeur tirée de (4), il vient :

$$(6) \qquad a = \frac{eR}{n(R' - R - e) + e}$$

Les deux points nodaux, étant deux foyers conjugués par rapport à la lentille, sont réciproques l'un de l'autre et, par conséquent, la formule générale (6) peut servir à trouver la position de l'un comme celle de l'autre.

On voit par les formules (4) et (6) que si l'épaisseur e de la lentille est négligeable vis-à-vis des rayons de courbure R et R′, les distances c et a du centre optique et de chaque point nodal à la lentille sont négligeables aussi (1).

Ainsi, pour une lentille infiniment mince, dont les deux faces sont baignées par un même milieu, les deux points nodaux et le centre optique sont confondus avec le point où l'axe principal rencontre la lentille : *tout rayon lumineux qui se dirige vers ce point* (pour lequel on conserve le nom de *centre optique*) *traverse la lentille sans déviation.*

15. Lentilles infiniment minces. — Dans bien des cas l'épaisseur des lentilles est assez faible vis-à-vis des distances de l'objet ou de l'image à la lentille pour qu'on puisse négliger cette épaisseur. Aussi est-il bon d'étudier d'abord le cas où la lentille est infiniment mince ; les lois simples que nous trouverons dans cette étude sont le plus souvent suffisamment exactes pour faire comprendre le fonctionnement des instruments d'optique.

Prenons comme plan de figure une section principale de la lentille ; soit XY (fig. 55) l'axe principal. Nous devrons représenter par la droite LL′ perpendiculaire à XY la section de la

(1) Il n'y aurait d'exception que dans le cas de $R = R'$, puisque le dénominateur des valeurs de c et de a serait nul ou très petit et que ces quantités seraient infinies ou très grandes ; mais le cas de $R = R'$ est celui d'un ménisque dont les deux faces ont même courbure et qui, par conséquent, s'il est très mince, est sans usage, puisqu'une pareille lentille ne produirait aucun changement dans la marche des rayons lumineux.

lentille, infiniment mince; en effet, les deux faces de la lentille normales à XY étant confondues, doivent être considérées comme étant dans un même plan perpendiculaire à XY pour les constructions géométriques qui servent à trouver la position des images.



Fig. 55.

Si la lentille est convergente nous l'indiquerons par le symbole représenté en C (fig. 56); si la lentille est divergente, par le symbole représenté en D.

Nous allons d'abord supposer, pour plus de généralité, que les indices des milieux qui baignent les deux faces de la lentille peuvent différer; nous verrons ensuite la petite simplification qui s'introduit dans les formules quand on suppose de même indice les milieux qui baignent les deux faces.

16. **LENTILLES CONVERGENTES INFINIMENT MINCES.** — Commençons par étudier les lentilles convergentes.

Soient (fig. 57, 58 et 59) XY l'axe principal, LL' la section de la lentille F_1 et F_2 les deux foyers principaux, A*a* la section d'une portion d'un plan perpendiculaire à l'axe que nous prendrons comme objet (ce plan étant un objet réel dans les fig. 57 et 58, un objet virtuel dans la fig. 59).

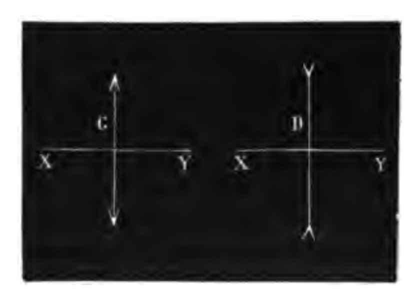


Fig. 56.

Nous savons que la lentille fournit de ce plan une image qui est un plan A'*a'* parallèle au plan-objet et, par conséquent, perpendiculaire à l'axe principal. Pour obtenir la position de cette image, cherchons la position de l'image A' d'un point A pris en dehors de l'axe principal. Puisque tous les rayons issus de ce point s'il est réel (fig. 57 ou 58), ou se dirigeant vers lui s'il est virtuel (fig. 59), après réfraction vont se rencontrer en un même

point A' soit réellement (fig. 57 et 59), soit par leurs prolongements (fig. 58), il suffit pour avoir le point-image de chercher le point de rencontre, après réfraction, de deux rayons dont la direction passe par le point-objet A, avant la réfraction.

Choisissons comme premier rayon le rayon AM parallèle à l'axe principal; ce rayon, après réfraction, passe par le deuxième foyer F_2 ; il prend donc la direction MF_2. Comme second rayon, prenons le rayon AF_1M' dont la direction passe par le premier foyer F_1 ; après réfraction, ce rayon se dirige parallèlement à l'axe principal. Les directions des deux rayons réfractés MF_2 et M'A' se coupent au point A', image du point A.

Il convient maintenant de distinguer trois cas suivant la distance de l'objet à la lentille.

1er Cas. — L'objet est réel et en avant du premier plan focal (fig. 57).

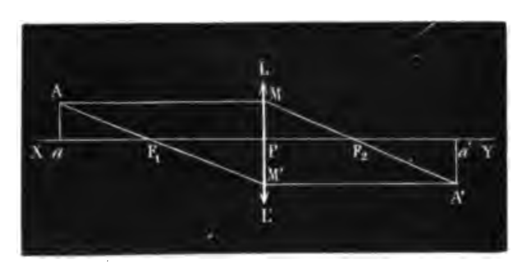


Fig. 57.

Dans ce cas, les deux rayons se coupent réellement en un point A', parce que si A est au-dessus de l'axe, le point M' est nécessairement au-dessous de M : *une lentille convergente donne une image réelle des objets situés au delà du plan focal.*

En outre, cette image est renversée car, si A est au-dessus de l'axe, M' est au-dessous, et il en est de même de A'.

La similitude des triangles AM'M et $F_1M'P$ donne la relation :

$$(1) \qquad \frac{F_1P}{AM} = \frac{M'P}{M'M}$$

et, de même, d'après la similitude des triangles A'MM' et F_2MP, on a :

$$(2) \qquad \frac{F_2P}{A'M'} = \frac{MP}{M'M}$$

en ajoutant membre à membre les deux égalités (1) et (2), il vient :

$$(3) \qquad \frac{F_1P}{AM} + \frac{F_2P}{A'M'} = \frac{M'P + PM}{M'M} = 1$$

Posons $F_1P = f_1$ (*première* distance focale), $F_2P = f_2$ (*deuxième* distance focale), $AM = p$ (distance de l'objet), et $A'M' = p'$ (distance de l'image) ; la relation précédente devient :

$$(4) \qquad \frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{p'} = 1$$

En divisant membre à membre les relations (1) et (2), on obtient :

$$(5) \qquad \frac{F_1P}{F_2P} \frac{A'M'}{AM} = \frac{M'P}{MP}$$

Posons $MP = Aa = o$ (grandeur de l'objet) et $M'P = A'a' = i$ (grandeur de l'image), la relation précédente peut s'écrire :

$$(6) \qquad \frac{i}{o} = \frac{f_1}{f_2} \frac{p'}{p}$$

2me *Cas.* — *L'objet est réel et placé entre le premier plan focal et la lentille* (fig. 58).

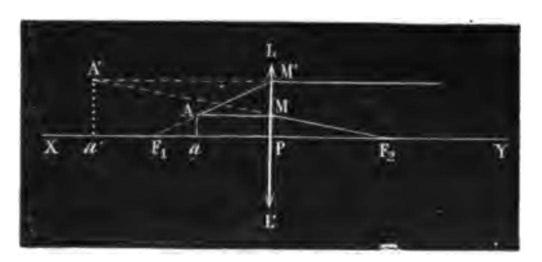


Fig. 58.

Dans ce cas, les deux rayons réfractés se coupent par leurs prolongements en A', parce que si A est au-dessus de l'axe, M' est nécessairement au-dessus de M : *une lentille convergente donne une image virtuelle d'un objet réel placé entre la lentille et le plan focal.*

En outre, cette image est droite car, si A est au-dessus de l'axe principal, M' est au-dessus, et il en est de même de A'.

Du reste, la considération des triangles semblables désignés par les mêmes lettres que dans le cas précédent conduit aux mêmes relations :

$$(7) \qquad \frac{F_1P}{AM} = \frac{M'P}{M'M}$$

et

$$(8) \qquad \frac{F_2P}{A'M'} = \frac{MP}{M'M}$$

en retranchant membre à membre la relation (8) de la relation (7), il vient :

$$(9) \qquad \frac{F_1P}{AM} - \frac{F_2P}{A'M'} = \frac{M'P - MP}{M'M} = 1$$

Donnons à f_1, f_2 et p la même signification que dans le cas précédent et posons $A'M' = -p'$, en désignant par p' une quantité négative dont la valeur absolue est la distance de l'image virtuelle à la lentille, la relation devient

$$(10) \qquad \frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{p'} = 1$$

identique à la relation (4).

En divisant membre à membre les relations (7) et (8), on obtient la relation :

$$(11) \qquad \frac{F_1P}{F_2P}\,\frac{A'M'}{AM} = \frac{M'P}{MP}$$

Posons, comme plus haut, $MP = Aa = o$ et $M'P = A'a' = -i$, en désignant par i une quantité négative dont la valeur absolue est la grandeur de l'image droite, la relation (11) devient

$$(12) \qquad \frac{i}{o} = \frac{f_1}{f_2}\,\frac{p'}{p}$$

identique à la relation (6).

3[me] *Cas.* — *L'objet est virtuel* (fig. 59).

Dans ce cas les deux rayons réfractés se coupent réellement en A', parce que si A est au-dessus de l'axe, M' est nécessairement au-dessous de M : *une lentille convergente donne une image réelle d'un objet virtuel.*

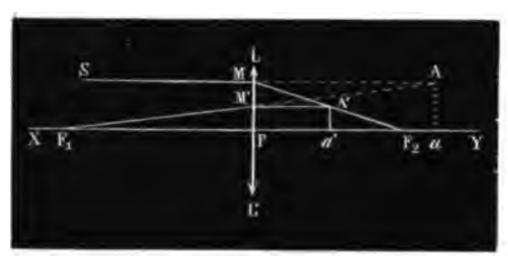


Fig. 59.

En outre, cette image A'a' est droite car, si A est au-dessus de l'axe principal, M' est au-dessus, et il en est de même de A'.

On a encore, pour les mêmes raisons que ci-dessus, les mêmes relations :

$$(13) \qquad \frac{F_1P}{AM} = \frac{M'P}{M'M}$$

et

$$(14) \qquad \frac{F_2P}{A'M'} = \frac{MP}{M'M}$$

En retranchant membre à membre (13) de (14), il vient:

$$(15) \qquad -\frac{F_1P}{AM} + \frac{F_2P}{A'M'} = \frac{MP - M'P}{M'M} = 1$$

Posons $AM = -p$, en désignant par p une quantité négative dont la valeur absolue est la distance de l'objet virtuel à la lentille, et $A'M' = p'$, il vient :

$$(16) \qquad \frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{p'} = 1$$

relation encore identique à la relation (4) ou (10).

Du reste, en divisant membre à membre (13) et (14), et en employant les mêmes notations que ci-dessus, on obtient encore bien entendu, la relation :

$$\frac{i}{o} = \frac{f_1}{f_2} \frac{p'}{p} \tag{17}$$

Résumé. — Nous voyons que les formules donnant les distances p et p' de l'image et de l'objet à la lentille, ou la grandeur i et o de l'image et de l'objet sont les mêmes, quelle que soit la position de l'objet par rapport à la lentille, si l'on considère p ou p' comme positif quand l'objet ou l'image est réel, comme négatif quand l'objet ou l'image est virtuel; et, en considérant i comme positif quand l'image est renversée, comme négatif quand l'image est droite. Faisons remarquer que ces conventions sont exactement les mêmes que celles qui ont été faites pour les miroirs sphériques.

17. Lentilles divergentes infiniment minces. — Soient (fig. 60, 61 et 62) XY l'axe principal et LL' la section d'une lentille divergente infiniment mince, F'_1 et F'_2 la position des foyers, qui dans ce cas sont virtuels, et Aa (fig. 60) ou A_1a_1 (fig. 61 et 62) la section d'un plan perpendiculaire à XY que nous prendrons comme objet. La lentille

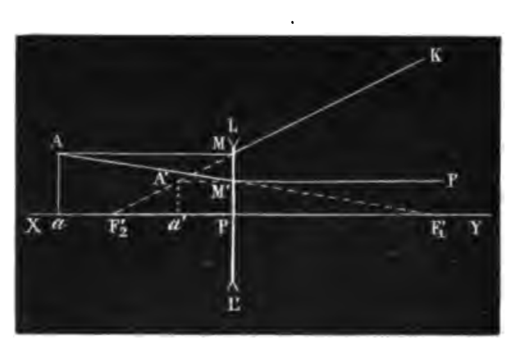


Fig. 60.

fournit de cet objet une image $A'a'$ perpendiculaire à XY. Nous allons procéder, pour obtenir sa position, comme dans le cas précédent : menons un rayon AM parallèle à l'axe XY et dont la direction passe par un point A de l'objet réel (fig. 60) ou par le point A_1 de l'objet virtuel (fig. 61 et 62); ce rayon se réfracte

de manière que son prolongement passe par le deuxième foyer F'_2; menons, en outre, un rayon AM' dont la direction passe par le point A ou A_1 et par le premier foyer F'_1; ce rayon se réfracte suivant une parallèle à XY. Les directions des deux rayons réfractés se coupent en un point A' qui est l'image réelle (fig. 61) ou virtuelle (fig. 60 ou 62) du point A.

Distinguons maintenant trois cas :

1er *Cas. — L'objet est réel.* — Dans ce cas (fig. 60), si A est au-dessus de l'axe, M' est au-dessous de M ; les rayons réfractés ne se rencontrent pas réellement, ce sont leurs prolongements qui se coupent en A' : *une lentille divergente donne une image virtuelle d'un objet réel.*

En outre, cette image est droite, car, si A est au-dessus de l'axe, M' est aussi au-dessus, et il en est de même de A'.

La similitude des triangles AM'M et F'_1M'P donne la relation :

$$(1) \qquad \frac{F_1'P}{AM} = \frac{M'P}{M'M}$$

et de même, d'après la similitude des triangles A'MM' et F'_2MP, on a :

$$(2) \qquad \frac{F_2'P}{A'M'} = \frac{MP}{M'M}$$

En retranchant membre à membre la première égalité de la seconde, il vient :

$$(3) \qquad \frac{F_2'P}{A'M'} - \frac{F_1'P}{AM} = \frac{MP - M'P}{M'M} = 1$$

ou, en posant $F_1'P = f_1'$ $F_2'P = f_2'$, $AM = p$ et $A'M' = -p'$, p' étant une quantité négative dont la valeur absolue représente la distance de l'image virtuelle à la lentille :

$$(4) \qquad -\frac{f_1'}{p} - \frac{f_2'}{p'} = 1$$

En divisant membre à membre la relation (1) par la relation (2), il vient :

$$\frac{F_1'P}{F_2'P}\,\frac{A'M'}{AM}=\frac{M'P}{MP} \qquad (5)$$

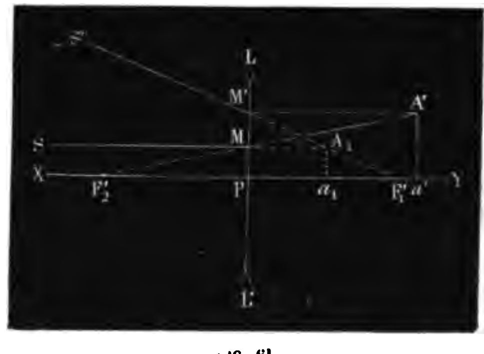


FIG. 61.

ou, en posant $MP = Aa = o$ et $M'P = A'a' = -i$, en désignant par i une quantité négative dont la valeur absolue est la grandeur de l'image :

$$\frac{i}{o}=\frac{f_1'}{f_2'}\,\frac{p'}{p} \qquad (6)$$

2me *Cas.— L'objet est virtuel et situé entre la lentille et le*

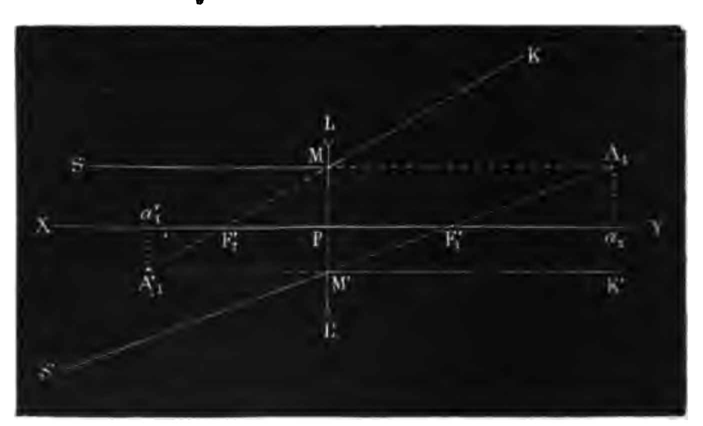


FIG. 62.

premier plan focal. — Dans ce cas (fig. 61), si A_1 est au-dessus de l'axe, le point M' est au-dessus de M et, par conséquent, le rayon réfracté parallèle à l'axe M'A' rencontre le rayon réfracté

MA' qui s'écarte de l'axe : *une lentille divergente donne une image réelle d'un objet virtuel placé entre la lentille et le premier plan focal.*

En outre, cette image est droite car, si A_1 est au-dessus de l'axe principal, M' est aussi au-dessus de cet axe, et il en est de même de A'.

Du reste, la considération des triangles semblables désignés par les mêmes lettres que dans le cas précédent conduit aux mêmes relations :

$$(7) \qquad \frac{F_1'P}{A_1M} = \frac{M'P}{M'M}$$

$$(8) \qquad \frac{F_2'P}{A'M'} = \frac{MP}{M'M}$$

En retranchant membre à membre l'égalité (8) de l'égalité (7), il vient :

$$(9) \qquad \frac{F_1'P}{A_1M} - \frac{F_2'P}{A'M'} = \frac{M'P - MP}{M'M} = 1$$

ou, en posant $MA_1 = -p$, en désignant par p une quantité négative dont la valeur absolue est la distance de l'objet virtuel à la lentille, et $M'A' = p'$:

$$(10) \qquad -\frac{f_1'}{p} - \frac{f_2'}{p'} = 1$$

En divisant membre à membre les relations (7) et (8), il vient:

$$(11) \qquad \frac{F_1'P}{F_2'P} \cdot \frac{A'M'}{A_1M} = \frac{M'P}{MP}$$

ou, en donnant à i et à o la même signification que dans le cas précédent :

$$(12) \qquad \frac{i}{o} = \frac{f_1'}{f_2'} \frac{p'}{p}$$

3me *Cas. — L'objet est virtuel et placé au delà du premier plan focal.* — Dans ce cas (fig. 62), si A_1 est au-dessus de l'axe principal, le point M' est au-dessous de M, et, par conséquent, le

rayon réfracté M'K' parallèle à l'axe ne rencontre pas le rayon réfracté MK qui s'en écarte : *une lentille divergente donne une image virtuelle d'un objet virtuel placé au delà du premier plan focal.*

En outre, cette image est renversée car, si A_1 est au-dessus de l'axe principal, M' est au-dessous de cet axe, et il en est de même de A'_1.

La considération des triangles semblables désignés par les mêmes lettres que dans les deux cas précédents, conduit aux mêmes relations :

(13) $$\frac{F'_1P}{A_1M} = \frac{M'P}{M'M}$$

et

(14) $$\frac{F'_2P}{A'_1M'} = \frac{MP}{M'M}$$

En ajoutant membre à membre ces deux relations, il vient :

(15) $$\frac{F'_1P}{A_1M} + \frac{F'_2P}{A'_1M'} = \frac{M'P + PM}{M'M} = 1$$

ou, en posant $MA_1 = -p$ et $M'A'_1 = -p'$, en désignant par p et p' des quantités négatives dont les valeurs absolues représentent respectivement les distances de l'objet virtuel et de l'image virtuelle à la lentille, la relation devient :

(16) $$-\frac{f_1'}{p} - \frac{f_2'}{p'} = 1$$

En divisant membre à membre les deux égalités (13) et (14), il vient :

(17) $$\frac{F_1'P}{F_2'P}\,\frac{A_1'M'}{A_1M} = \frac{M'P}{MP}$$

ou en posant $MP = i$ et $M'P = o$:

(18) $$\frac{i}{o} = \frac{f_1'}{f_2'}\,\frac{p'}{p}$$

Résumé. — Avec les mêmes conventions de signe pour les distances p et p' de l'objet et de l'image à la lentille, et pour la grandeur i de l'image que dans le cas des lentilles convergentes, nous voyons que les formules (4) et (6) conviennent, quelle que soit la position de l'objet par rapport à la lentille divergente.

18. Formules générales des lentilles infiniment minces. — Quelle que soit la lentille, convenons de représenter par f_1 la distance à celle-ci du premier foyer (*première* distance focale) et par f_2 la distance du deuxième foyer (*deuxième* distance focale), en considérant ces quantités comme positives si les foyers sont réels (lentilles convergentes) et comme négatives s'ils sont virtuels (lentilles divergentes).

Nous aurons alors à poser pour le cas d'une lentille divergente $f_1' = -f_1$ et $f_2' = -f_2$ dans les relations (4) et (6) du paragraphe précédent; elles prennent alors les formes

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{p'} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{i}{o} = \frac{f_1}{f_2}\frac{p'}{p}$$

identiques à celles des relations correspondantes des lentilles convergentes. Ainsi ces deux formules sont applicables à toutes les lentilles infiniment minces et dans tous les cas possibles, avec les conventions qui ont été faites pour les signes de p, p', i, f_1 et f_2.

19. Point nodal. — Soit A et A′ deux foyers conjugués d'une lentille infiniment mince LL′ convergente (fig. 63, n° 1), ou divergente (n° 2). Menons la droite AA′; comme cette droite se trouve dans la section principale qui contient le point A et son image A′, elle coupe l'axe principal en un certain point N. Désignons par K le point où elle traverse la lentille infiniment mince; un rayon issu de A suivant AK se dirige suivant KA′ après son passage à travers la lentille; par conséquent un pareil rayon traverse la lentille sans être dévié. Or, il est facile de voir que le point N, où ce rayon coupe l'axe principal, est un point fixe indépendant

de la position du point A. En effet, menons les rayons AM, MF_2A', AF_1M' et M'A', qui servent à obtenir la position de l'image A' de A par le moyen indiqué aux paragraphes 16 ou 17. La similitude des triangles AF_1N et AM'A' d'une part, et des triangles MPF_2 et MM'A' d'une autre, donne les relations :

$$(1) \qquad \frac{F_1N}{M'A'} = \frac{MP}{MM'} \quad \text{et} \quad \frac{MP}{MM'} = \frac{PF_2}{M'A'}$$

d'où :

$$(2) \qquad F_1N = PF_2$$

Ainsi le point N, étant situé à une distance du premier foyer égale à la deuxième distance focale, est un point fixe; on l'appelle le *point nodal.* Du reste on a :

$$(3) \qquad F_1N = F_1P + PN$$

d'où, d'après (2) :

$$(4) \qquad PN = F_2P - F_1P$$

Le point nodal N *est situé sur l'axe principal, du côté du foyer le plus éloigné, à une distance de la lentille* (PN) *égale à la différence des deux distances focales* F_1P *et* F_2P; *tout rayon lumineux* (AKA') *qui traverse la lentille sans déviation passe par le point nodal.*

Réciproquement, *tout rayon incident qui se dirige vers le point nodal traverse la lentille sans déviation*, puisque ce rayon incident se confond avec un rayon émis par un point situé sur sa direction et qui traverserait la lentille sans déviation.

Toute droite passant par le point nodal est appelée un *axe*; si cette droite ne se confond pas avec l'axe principal, on lui donne

le nom d'axe *secondaire*. On voit que l'image d'un point est toujours sur l'axe correspondant à ce point.

20. LENTILLE INFINIMENT MINCE PLACÉE DANS L'AIR. — Nous avons vu plus haut (§ 14) que tout rayon lumineux qui passe par le point où l'axe principal rencontre une lentille infiniment mince traverse celle-ci sans déviation, quand les deux faces de la lentille sont baignées par un même milieu, l'air par exemple; autrement dit, le point nodal est alors à une distance nulle de la lentille. Or, nous venons de voir que la distance du point nodal à la lentille est égale à la différence des deux distances focales; cette différence étant nulle dans ce cas : on a $f_1 = f_2$. En désignant par f la valeur commune de f_1 et de f_2, les formules générales des lentilles infiniment minces (§ 18) deviennent :

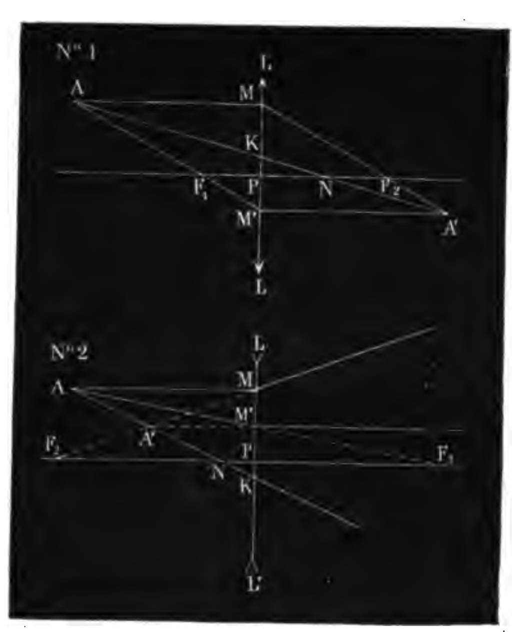


Fig. 63.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \qquad \frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$$

Elles sont identiques aux formules relatives aux miroirs sphériques : *les propriétés des lentilles infiniment minces placées dans l'air sont les mêmes que celles des miroirs sphériques,*

sauf cette différence, de toute évidence, qu'une image réelle (p' positif) est placée en avant du miroir, qui la fournit par réflexion, tandis qu'elle est placée en arrière de la lentille, qui la fournit par transmission, et inversement pour les images virtuelles (p' négatif). Aussi nous bornons-nous à résumer dans un tableau la discussion de ces deux formules, qui a été complètement faite au chapitre II (§§ 11, 13, 14, 17 et 18).

1° LENTILLES CONVERGENTES : $f > 0$.

(Mêmes propriétés que les miroirs sphériques concaves.)

	Distance de l'objet à la lentille	Distance de l'image à la lentille	Grandeur de l'image	
p étant positif, l'objet est réel.	$p > f$ (fig. 57)	$p' > f$	$i > 0$	p' étant positif, l'image est réelle ; i étant positif, l'image est renversée.
	p diminue	p' augmente	i augmente	
	$p = \infty$	$p' = f$	$i = 0$ (1)	
	$p > 2f$	$p' < 2f < p$	$i < o$	
	$p = 2f$	$p' = 2f = p$	$i = o$	
	$p < 2f$	$p' > 2f > p$	$i > o$	
	$p = f$	$p' = \infty$	$i = \infty$	
	$p < f$ (fig. 58)	$p' < 0$ ($p' = -p_1'$)	$i < 0$ ($i = -i_1$)	p' étant négatif, l'image est virtuelle ; i étant négatif, l'image est droite.
		$p_1' > p$	$i_1 > o$	
	p diminue	p_1' diminue	i_1 diminue	
	$p = 0$	$p_1 = 0$	$i_1 = o$	
p étant négatif, l'objet est virtuel.	$p < 0$ ($p = -p_1$) (fig. 59)	$f > p' > 0$	$i < 0$ ($i = -i_1$)	p' étant positif, l'image est réelle ; i étant négatif, l'image est droite.
		$p' < p_1$	$i_1 < o$	
	p_1 augmente	p' augmente	i_1 diminue	
	$p_1 = \infty$	$p' = f$	$i_1 = 0$	

(1) Nous avons vu (Chap. II, §§ 9 et 17) qu'un objet, placé assez loin pour qu'e son image se forme sensiblement dans le plan focal, donne une image de grandeur αf, en désignant par α le diamètre apparent de l'objet.

2° LENTILLES DIVERGENTES : $f < 0$ ($f = -f_1$).

(Mêmes propriétés que les miroirs sphériques convexes)

	Distance de l'objet à la lentille	Distance de l'image à la lentille	Grandeur de l'image	
p étant positif, l'objet est réel.	$p > 0$ (fig. 60)	$p' < 0$ ($p' = -p_1'$)	$i < 0$ ($i = -i_1$)	p' étant négatif, l'image est virtuelle ; i étant négatif, l'image est droite
		$p_1' < p$	$i_1 < o$	
	$p = \infty$	$p_1' = f_1$	$i_1 = 0$ [1]	
	p diminue	p_1' diminue	i_1 augmente	
	$p = 0$	$p_1' = 0$	$i_1 = o$	
p étant négatif, l'objet est virtuel.	$p < 0$ ($p = -p_1$)			p' étant positif, l'image est réelle ; i étant négatif, l'image est droite.
	$p_1 < f_1$ (fig. 61)	$p' > 0$	$i < 0$ ($i = -i_1$)	
		$p' > p_1$	$i_1 > o$	
	p_1 augmente	p' augmente	i_1 augmente	
	$p_1 = f_1$	$p' = \infty$	$i_1 = \infty$	
	$p_1 > f_1$ (fig. 62)	$p' < 0$ ($p' = -p_1'$)	$i > 0$	p' étant négatif, l'image est virtuelle ; i étant positif, l'image est renversée.
	p_1 augmente	p_1' diminue	i diminue	
	$p_1 < 2f_1$	$p_1' > 2f_1 > p_1$	$i > o$	
	$p_1 = 2f_1$	$p_1' = 2f_1 = p_1$	$i = o$	
	$p_1 > 2f_1$	$p_1' < 2f_1 < p_1$	$i < o$	
	$p_1 = \infty$	$p_1' = f_1$	$i = 0$	

Il est très aisé de vérifier expérimentalement ces lois en choisissant des lentilles à distance focale assez grande pour que l'épaisseur soit négligeable vis à vis de cette distance focale.

Les expériences de vérification sont calquées sur celles que nous avons indiquées au chapitre II (§§ 12, 13, 14, 17 et 18) dans le cas des miroirs sphériques ; aussi n'avons-nous qu'à renvoyer le lecteur à ce chapitre. La figure 64 indique du reste suffisamment la disposition à employer dans le cas d'un objet réel placé au delà du plan focal d'une lentille convergente.

Au surplus, l'accord qui existe entre les propriétés que l'expérience constate dans les instruments d'optique que nous décri-

rons plus loin et les propriétés que fait prévoir la théorie des lentilles infiniment minces, que nous venons d'exposer, est une excellente vérification de la justesse de cette théorie.

La construction géométrique indiquée, à propos des miroirs

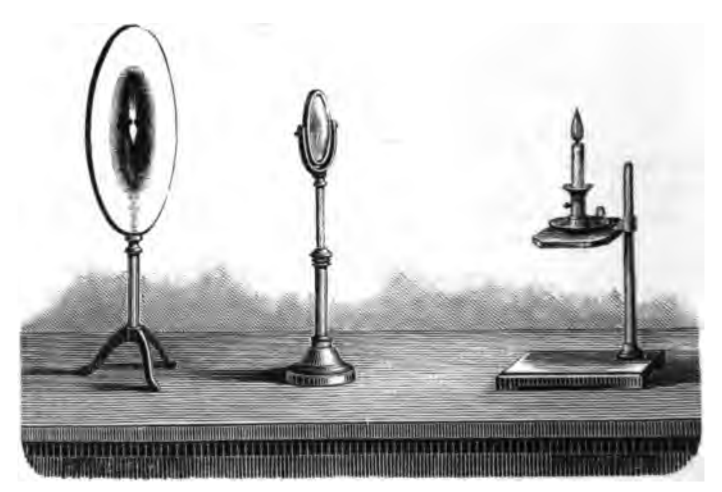


FIG. 64.

sphériques, pour trouver l'image d'un objet plan, convient encore, bien entendu, dans le cas des lentilles. Par un point A de l'objet pris en dehors de l'axe principal (fig. 65), on mène l'axe secondaire AP et le rayon AM parallèle à l'axe principal; on joint M au second foyer principal F_2 pour avoir la direction MF_2 du rayon réfracté; cette direction coupe en A', image de A, l'axe secondaire AP. En menant par A' un plan parallèle à celui de l'objet, on a son image, si toutefois le plan de l'objet est perpendiculaire, ou à peu près, à l'axe principal. On aura ensuite l'image B' d'un autre point quelconque B de l'objet en menant l'axe secondaire BP de ce point.

21. VALEUR DE LA DISTANCE FOCALE. — Il est aisé de calculer la valeur de la distance focale d'une lentille infiniment mince.

Reprenons la formule :

$$(1) \qquad \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

établie plus haut (§ 10); p_1 représentant ici la distance d'un point-objet A_1 à la première face d'une lentille infiniment mince, p_2 la distance de l'image A_2 de A_1 donnée par réfraction à travers cette première face, R le rayon de celle-ci, et enfin n_1 et n_2 les indices absolus du premier milieu et de la substance qui forme la lentille. Le point A_2 fonctionnant comme objet réel ou virtuel par rapport

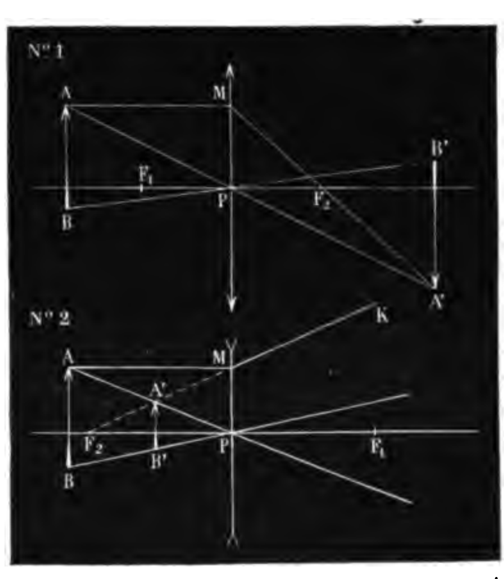


FIG. 65.

à la seconde face, si l'on néglige l'épaisseur de la lentille, on a, en appliquant de nouveau la même formule et en se rappelant les conventions de signes faites au § 10 :

$$(2) \qquad \frac{n_2}{p_2} - \frac{n_3}{p_3} = \frac{n_2 - n_3}{R'}$$

n_3 étant l'indice absolu du milieu qui baigne la seconde face de la lentille et R', le rayon de courbure de cette face. On tire de (1) et de (2), par addition :

$$(3) \qquad \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_3}{p_3} = \frac{n_1 - n_2}{R} + \frac{n_2 - n_3}{R'}$$

Si dans cette formule on fait $p_3 = -\infty$, on aura $p_1 = f_1$ (distance focale antérieure) :

$$(4) \qquad \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_1 - n_2}{R} + \frac{n_2 - n_3}{R'}$$

Si dans la formule (3) on fait $p_1 = +\infty$, on aura $-p_3 = f_2$ (distance focale postérieure) :

$$(5) \qquad \frac{n_3}{f_2} = \frac{n_1 - n_2}{R} + \frac{n_2 - n_3}{R'}$$

Dans le cas où les milieux qui baignent les deux faces de la lentille ont même indice ($n_1 = n_3$), nous voyons, d'après (4) et (5), que les deux distances focales f_1 et f_2 ont la même valeur, ce que nous savions déjà. En désignant par n la valeur commune de $\frac{n_2}{n_1}$ et de $\frac{n_2}{n_3}$, c'est-à-dire l'indice de réfraction de la substance qui forme la lentille par rapport au milieu extérieur, les relations (4) ou (5) deviennent :

$$(6) \qquad \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$

Rappelons que dans ces formules R ou R′ sont des quantités positives quand la face correspondante tourne sa concavité du côté de la lumière incidente, négatives dans le cas inverse.

On peut se servir de la formule (6) pour établir que les lentilles plus épaisses au milieu que sur les bords sont convergentes (f positif), et que les lentilles moins épaisses au milieu que sur les bords sont divergentes (f négatif).

22. LENTILLES ÉPAISSES. — Dans bien des instruments d'optique, les lentilles sont trop épaisses par rapport aux distances focales, pour qu'on puisse négliger leur épaisseur. On doit à Gauss [1] d'avoir donné une théorie très simple de ces lentilles.

[1] Charles-Frédéric Gauss, professeur d'astronomie à Gœttingue, est né

Cette théorie présente un haut degré de généralité, car les relations que nous allons trouver sont applicables, non seulement aux lentilles, quelle que soit leur épaisseur, mais aussi à un système centré quelconque.

Du reste, les formules qui donnent la distance de l'image et sa grandeur sont les mêmes que dans le cas des lentilles infiniment minces, pourvu qu'on compte les distances de l'objet ou de l'image, non à partir d'un même plan, mais à partir de deux plans fixes, distincts, perpendiculaires à l'axe principal et qu'on appelle les *plans principaux*. C'est ce que nous allons établir.

Dans la théorie de Gauss, on suppose encore que les rayons lumineux considérés s'écartent très peu de l'axe principal; aussi, comme précédemment, nous confondrons, dans les constructions géométriques, une surface de séparation sphérique avec son plan tangent au point où elle est rencontrée par l'axe principal.

23. PLANS PRINCIPAUX. — Quand un système est composé d'une seule surface réfringente sphérique, la direction de chacun des rayons incidents parallèles à un même axe coupe la direction du rayon réfracté auquel il donne naissance en un point placé sur la surface réfringente. Pour des rayons incidents s'écartant peu de l'axe, la partie de la surface réfringente rencontrée par eux se confond avec son plan tangent, et l'on peut dire que la direction de chacun des rayons incidents parallèles coupe la direction du rayon émergent correspondant sur un même plan perpendiculaire à la direction des rayons incidents.

Nous allons montrer qu'il en est encore de même pour un système composé de surfaces réfringentes sphériques centrées quelconque : *la direction de chacun des rayons incidents parallèles*

à Brunswick en 1777 et mort en 1855. Son travail sur l'optique a paru de 1838 à 1843.

Le théorie de Gauss est beaucoup plus simple et plus générale que la théorie des instruments d'optique, au fond identique, que Biot a donnée, vers la même époque. Elle a été elle-même complétée par l'introduction des points nodaux, due au physiologiste allemand Listing (1866), et considérablement simplifiée par plusieurs auteurs, en particulier par Bertin, maître de conférences à l'École Normale Supérieure. C'est à peu près la marche suivie par cet auteur que nous reproduisons ici.

à l'axe principal coupe la direction du rayon émergent correspondant sur un même plan perpendiculaire à l'axe principal et qu'on appelle *plan principal*, sous la réserve, bien entendu, que les rayons incidents soient peu distants de l'axe principal.

Pour démontrer cette propriété, il suffit de faire voir que, si elle existe pour un premier système de surfaces réfringentes sphériques centrées, elle subsiste encore lorsqu'on ajoute au système une nouvelle surface réfringente sphérique ayant son centre sur l'axe principal du premier système ; en effet, puisque la propriété est vraie pour le système composé d'une seule surface, elle sera vraie aussi pour un système composé de deux surfaces, et, par conséquent, de trois, de quatre ....., d'un nombre quelconque de surfaces sphériques centrées.

Soit donc XY (fig. 66) l'axe principal d'un premier système

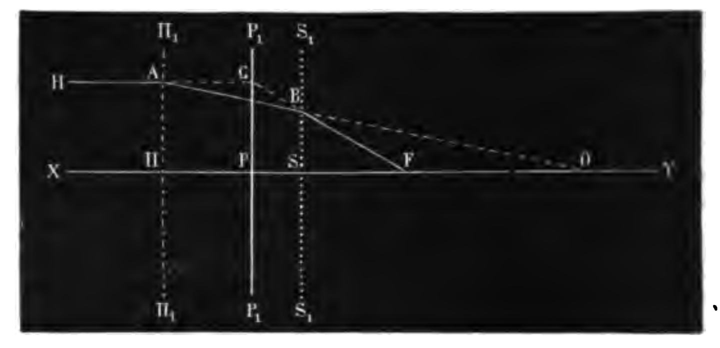


FIG. 66.

optique centré jouissant de la propriété d'avoir un plan principal $\Pi_1\Pi\Pi_1$; soit un rayon lumineux HA parallèle à l'axe principal ; sa direction rencontre en un point A le plan principal, et si O est le second foyer principal du système, le rayon émergent auquel HA donne naissance possède la direction AO.

Ajoutons maintenant au système une nouvelle surface réfringente sphérique S_1SS_1 séparant le dernier milieu transparent du système précédent d'un nouveau milieu transparent et supposons que S_1S_1 ait son centre de courbure sur l'axe principal XY.

Le rayon de direction AO coupe cette surface en un point B et, subissant une nouvelle réfraction, prend une certaine direction BF. Le point F où la direction de ce rayon rencontre l'axe principal est le second foyer principal du nouveau système optique. Les directions du rayon incident HA et du rayon émergent BF se coupent en un certain point C, puisque ces droites sont dans une même section principale. Menons par ce point C un plan P_1PP_1 perpendiculaire à l'axe; il est facile de voir que la position de ce plan est indépendante de la distance à l'axe du rayon incident AH considéré, par conséquent, que ce plan fixe P_1P_1 est un plan principal pour le nouveau système.

En effet, la similitude des triangles CPF et BSF donne la relation :

$$(1) \qquad \frac{PF}{SF} = \frac{PC}{SB}$$

d'autre part, la similitude des triangles AΠO et BSO donne la relation :

$$(2) \qquad \frac{\Pi O}{SO} = \frac{\Pi A}{SB}$$

et, comme ΠA = PC, on a :

$$(3) \qquad \frac{PF}{SF} = \frac{\Pi O}{SO}$$

les longueurs SF, ΠO, et SO étant indépendantes de la distance du rayon AH à l'axe principal, il en est de même de PF : le point F étant fixe, le plan P_1P_1 a une position indépendante de celle du rayon AH parallèle à l'axe.

Nous allons maintenant mettre la relation (3) sous une forme qui nous sera commode pour trouver la position des plans principaux.

Désignons par φ la distance ΠO du plan principal du système avant l'adjonction de la nouvelle surface réfringente S_1S_1 à son foyer O, par F la distance SF du foyer du nouveau système à la dernière surface réfringente S_1S_1, par f la distance PF du nou-

veau plan principal P_1P_1 au foyer F du nouveau système, enfin par Ψ la distance SO de la dernière surface réfringente au foyer O. Avec ces notations, la relation (3) devient :

$$(4) \qquad \frac{f}{F} = \frac{\varphi}{\Psi}$$

Appelons $-a$ la valeur absolue de la distance PS du nouveau plan principal P_1P_1 à la dernière surface réfringente S_1S_1 ; on a

$$(5) \qquad PS = PF - SF \quad \text{ou} \quad -a = f - F$$

et, en vertu de (4) :

$$(6) \qquad -a = F\left(\frac{\varphi}{\Psi} - 1\right)$$

ou, en introduisant la distance $\Pi S = e$ de la dernière surface réfringente au plan principal $\Pi_1\Pi_1$ du premier système, comme on a $SO = \Pi O - \Pi S$ ou $\Psi = \varphi - e$ la formule (6) devient :

$$(7) \quad -a = F\left(\frac{\varphi}{\varphi - e} - 1\right) \quad \text{ou} \quad -a = e\frac{F}{\varphi - e} = e\frac{F}{\Psi}$$

Il est aisé de voir que toutes ces formules sont générales quelle que soit la position des foyers O ou F par rapport à $\Pi_1\Pi_1$, P_1P_1, S_1S_1 et quelle que soit la position de ces trois plans les uns par rapport aux autres, à condition de considérer comme positives les distances f, F, φ, Ψ, a et e quand elles sont comptées dans le sens de la marche des rayons incidents, et comme négatives quand elles sont comptées en sens inverse. Par exemple, la distance focale F est positive si le rayon F est au delà de la dernière surface S_1SS_1 (système convergent), comme sur la figure, et négative si le foyer F est en deçà de S_1SS_1 (système divergent). La distance a est positive si le plan principal P_1P_1 est au delà de la dernière surface réfringente S_1SS_1, et négative si le plan principal est en deçà de S_1SS_1, comme sur la figure.

La lumière pouvant pénétrer dans un système dioptrique de deux côtés opposés, de même qu'il y a deux foyers principaux,

il y a aussi deux plans principaux : nous appellerons *premier* plan principal celui qui correspond au premier foyer principal, et *second* plan principal celui (P_1P_1 fig. 66) qui correspond au second foyer principal (F). Les points où l'axe principal rencontre les plans principaux s'appellent *points principaux*.

Dans le cas d'une seule surface réfringente sphérique ou d'une lentille infiniment mince, les deux plans principaux sont confondus en un seul. Il n'en est généralement pas ainsi ; nous verrons plus loin à fixer la position des plans principaux dans quelques systèmes optiques. Disons tout de suite seulement que, suivant le système considéré, le premier plan principal peut être en avant ou en arrière du second plan principal.

24. Distance et grandeur de l'image. — Pour trouver la position et la grandeur de l'image d'un objet, fournie par un système optique centré quelconque, il suffit de considérer les deux plans principaux du système, les deux foyers principaux, et d'employer la même construction que dans le cas d'une lentille infiniment mince (§§ 16 et 17).

Par un point A d'un objet plan A*a* perpendiculaire à l'axe

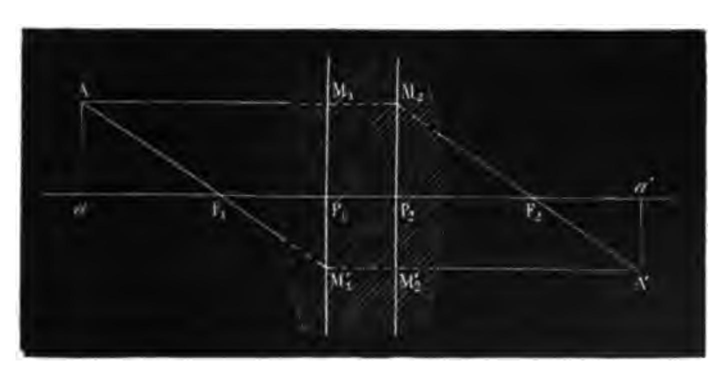


Fig. 67.

principal (fig. 67 ou 68) et pris en dehors de cet axe, on mène un rayon AM_2 parallèle à celui-ci jusqu'à sa rencontre en M_2 avec le second plan principal M_2P_2 ; on joint M_2 au second foyer prin-

cipal F_2 et l'on obtient ainsi la direction M_2F_2 du rayon émergent. On joint ensuite le point A au premier foyer F_1 et l'on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en M'_1 avec le premier plan principal M'_1P_1 ; un rayon qui a la direction $AF_1M'_1$ sort du système parallèlement à l'axe principal suivant M'_1A'. Le point A' où les deux rayons émergents se coupent est l'image du point A : en menant la perpendiculaire $A'a'$ à l'axe principal on a l'image de la dimension linéaire Aa.

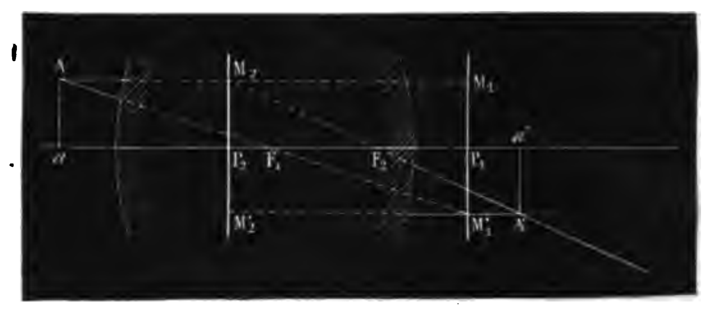


Fig. 68.

La considération des triangles semblables $AM_1'M_1$ et $F_1M'_1P_1$ d'une part, et des triangles semblables $A'M_2M'_2$, et $F_2M_2P_2$ d'une autre, fournit, comme dans le cas des lentilles infiniment minces, les relations :

$$\frac{F_1P_1}{AM_1} = \frac{M'_1P_1}{M'_1M_1} \quad \text{et} \quad \frac{F_2P_2}{A'M'_2} = \frac{M_2P_2}{M_2M'_2}$$

Vu l'égalité des lignes $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$, ainsi que des lignes M'_1P_1 et M'_2P_2, on tire de ces relations, absolument comme dans le cas des lentilles infiniment minces (voir §§ 16 et 17), les mêmes relations générales :

$$(1) \qquad \frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{p'} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{i}{o} = \frac{p'}{p}\frac{f_1}{f_2}$$

en désignant par p la distance AM_1 de l'objet au premier plan principal, quantité positive si l'objet est en avant de ce plan

principal, négative s'il est en arrière ; par p' la distance $A'M'_2$ de l'image au second plan principal, quantité positive si l'image est en arrière du second plan principal, négative si elle est en avant ; par f_1 et f_2 les distances F_1P_1 et F_2P_2 des foyers principaux aux plans principaux correspondants avec la même convention de signes que si F_1 était un objet et F_2 une image ; enfin par o et par i les grandeurs Aa de l'objet et $A'a'$ de l'image, i étant positif si l'image est renversée par rapport à l'objet, négatif dans le cas contraire.

Faisons remarquer pour terminer que les deux plans principaux sont des plans conjugués : l'un est l'image de l'autre. Donnons en effet à p une valeur nulle dans les formules (1), et à o une valeur quelconque, pour avoir comme objet un point A du plan principal situé à une distance o de l'axe ; ces formules donnent $p' = 0$ et $i = - o$, ce qui indique que l'image du point A est un point A' situé sur le second plan principal, à la même distance de l'axe que le point A et du même côté dans la même section principale. La construction géométrique générale qui sert à trouver l'image d'un point donné, conduit au même résultat, bien entendu (fig. 69).

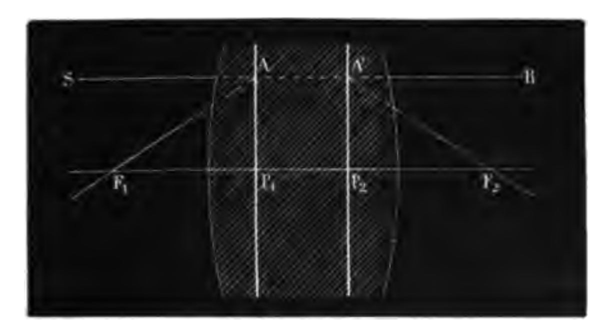


Fig. 69.

25. Formule de Newton. — On peut, comme pour les miroirs sphériques, transformer les formules générales précédentes en introduisant la distance φ de l'objet au premier foyer principal et la distance φ' de l'image au second foyer principal. En

considérant φ comme une quantité positive si l'objet est en avant du premier foyer et comme négative s'il est en arrière, et en considérant φ' comme une quantité positive si l'image est en arrière du second foyer principal et comme négative si elle est en avant, on a, en toute généralité :

$$(1) \qquad p = \varphi + f_1 \quad \text{et} \quad p' = \varphi' + f_2$$

En portant ces valeurs dans les formules (1) du paragraphe précédent, on en tire les formules tout aussi générales;

$$(2) \qquad \varphi\varphi' = f_1 f_2 \quad \text{et} \quad \frac{i}{o} = \frac{f_1}{\varphi} = \frac{\varphi'}{f_2}$$

Ces relations se réduisent à celles données par Newton quand on a $f_1 = f_2$.

26. Points nodaux. — Portons sur l'axe principal à partir de chacun des foyers principaux, et du côté du plan principal correspondant, une longueur égale à l'autre distance focale, nous obtiendrons ainsi deux points N_1 et N_2 (fig. 70) qu'on appelle les *points nodaux* :

$$F_1N_1 = P_2F_2 = f_2 \qquad F_2N_2 = P_1F_1 = f_1$$

La distance de chaque point nodal au plan principal correspondant, étant égale en valeur absolue à la différence des deux distances focales, est la même. Par conséquent, la distance des deux points nodaux, que Listing a appelé *interstice*, est la même que la distance des deux plans principaux.

Tout rayon incident qui se dirige vers le premier point nodal (celui qui correspond au premier foyer principal) *donne naissance à un rayon émergent dont la direction passe par le second point nodal et qui est parallèle au rayon incident.*

Considérons, en effet, un rayon AK_1N_1 se dirigeant vers le premier point nodal N_1. Prenons comme plan de figure la section principale passant par ce rayon. Soient A et K_1 les points où il perce le premier plan focal et le premier plan principal; me-

nons par A un rayon AM_2 parallèle à l'axe principal; ce rayon émerge suivant M_2F_2. Puisque tous les rayons issus du point A, situé dans le plan focal, donnent naissance à des rayons émergents parallèles entre eux, le rayon E auquel le rayon AN_1 donne naissance doit être parallèle à M_2F_2. En outre, puisque A_1N_1 passe par le point K_1, ce rayon peut être considéré comme émanant de ce point, et, par conséquent, le rayon émergent E doit passer par l'image K_2 de K_1; cette image, comme on le sait, est située sur le second plan principal à la même distance de l'axe que K_1. Le rayon E est donc dans le plan de figure et coupe en un certain point N_2 l'axe principal. Or, les deux triangles rectangles AF_1N_1 et $M_2P_2F_2$ sont égaux puisque les côtés de l'angle droit sont respectivement égaux. Par conséquent, les angles N_1 et F_2 étant égaux, M_2F_2 est parallèle à AN_1 : le rayon émergent E parallèle à M_2F_2 est donc parallèle au rayon incident. En outre, les triangles rectangles $K_1P_1N_1$ et $K_2P_2N_2$ sont égaux, comme ayant leurs côtés parallèles ou confondus en direction et comme ayant deux côtés égaux ($P_1K_1 = P_2K_2$); il en résulte que $P_1N_1 = P_2N_2$; le point N_2 est donc le second point nodal.

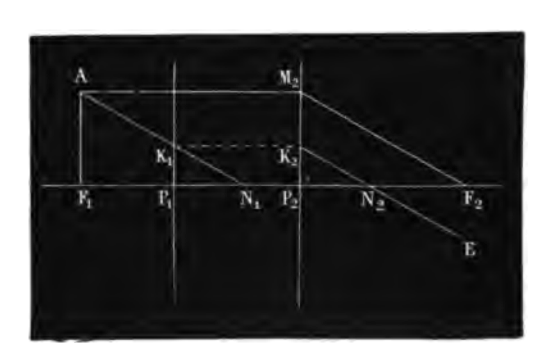


Fig. 70.

Réciproquement, *tout rayon incident qui donne naissance à un rayon émergent parallèle à lui passe par le premier point nodal et le rayon émergent par le second point nodal.*

Pour démontrer cette réciproque, faisons voir d'abord que tout rayon incident qui donne naissance à un rayon émergent qui lui est parallèle est contenu dans une section principale. Soient, en effet, A et K_1 les points où un pareil rayon incident traverse le plan focal et le premier plan principal. L'image A' de

A étant dans la même section principale S que A, et étant située aussi sur le rayon émergent E auquel AK_1 donne naissance, se trouve au point où le rayon E perce la section principale S. Or, le point A' est à l'infini, puisque A est un point du plan focal, donc le rayon E est parallèle à la section principale S. Comme AK_1 est parallèle à E et passe par le point A du plan S, ce rayon incident AK_1 est tout entier contenu dans cette section principale S ; prenons celle-ci comme plan de figure. D'autre part, le rayon émergent E passe par le point K_2, image de K_1 ; or K_2 est dans le plan de figure S, et, puisque le rayon E a une direction parallèle à ce plan, ce rayon est aussi contenu dans le plan de la figure.

Désignons maintenant par N_1 et N_2 les points où le rayon incident et le rayon émergent rencontrent l'axe principal. Menons par le point A le rayon parallèle à l'axe AM_2 qui donne naissance au rayon émergent M_2F_2. Ce dernier rayon est parallèle à E, puisque ce sont deux rayons émergents provenant de rayons issus d'un même point A du plan focal ; le rayon M_2F_2 est donc parallèle à AK_1N_1. Il en résulte que les deux triangles rectangles AF_1N_1 et $M_2P_2F_2$ sont égaux, comme ayant les côtés AF_1 et M_2P_2 égaux, et tous les angles respectivement égaux. On a donc $F_1N_1 = P_2F_2$: le point N_1 est le premier point nodal, et, par conséquent, N_2 le second point nodal.

Pour un système composé d'une seule surface sphérique réfringente ou d'une seule lentille infiniment mince, les deux plans principaux sont confondus en un seul et confondus avec la surface réfringente, ce qui entraîne la confusion des deux points nodaux en un seul point (*point nodal*) : c'est ce que nous avons déjà établi pour les lentilles infiniment minces (§ 19).

27. **PROPORTIONNALITÉ DES DISTANCES FOCALES AUX INDICES DE RÉFRACTION.** — Quand un système dioptrique est composé d'une seule surface sphérique de rayon R séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2, on a, pour les distances p_1 et p_2 d'un point et de son image, la relation (voir § 10) :

$$(1) \qquad \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

Pour avoir la seconde distance focale f_2, il faut faire dans cette formule $p_1 = \infty$ et $p_2 = -f_2$, il vient :

(2) $$\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

pour avoir la première distance focale, il faut faire $p_2 = -\infty$ et $p_1 = f_1$; il vient :

(3) $$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

On a donc :

(4) $$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}$$

Les distances focales sont respectivement proportionnelles aux indices de réfraction des deux milieux extrêmes du système.

Nous allons voir que cette propriété est générale, quel que soit le nombre des surfaces sphériques centrées.

Pour cela, menons dans une section principale du système deux axes de coordonnées rectangulaires OX et OY, l'axe OX se confondant avec l'axe principal du système (fig. 71). Soient x_1 et y_1 les coordonnées d'un point A_1 du plan et x_2 et y_2 celles de l'image A_2 de A_1 donnée par le système dioptrique; on a, d'après la convention faite pour le signe de

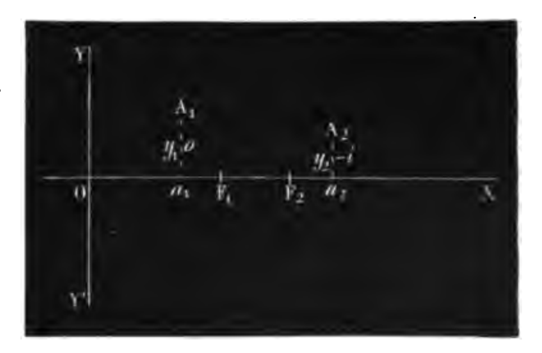


FIG. 71.

la grandeur i de l'image A_2a_2 de la perpendiculaire à l'axe A_1a_1 prise comme objet (o) : $y_1 = o$ et $y_2 = -i$. D'autre part, désignons par h_1 et h_2 les abscisses des deux foyers principaux F_1 et F_2 ; on a, d'après les notations du paragraphe 25 :

$$\varphi = h_1 - x_1 \quad \text{et} \quad \varphi' = x_2 - h_2$$

Les relations données dans ce paragraphe prennent alors la forme :

$$(5) \qquad -\frac{y_2}{y_1} = \frac{f_1}{h_1 - x_1} = \frac{x_2 - h_2}{f_2}$$

On tire de là :

$$(6) \qquad x_1 = h_1 + f_1 \frac{y_1}{y_2} \quad \text{et} \quad x_2 = h_2 - f_2 \frac{y_2}{y_1}$$

On a, de même, pour un autre point B_1 du plan, de coordonnées X_1 et Y_1, et pour son image B_2 de coordonnées X_2 et Y_2 :

$$(7) \qquad X_1 = h_1 + f_1 \frac{Y_1}{Y_2} \quad \text{et} \quad X_2 = h_2 - f_2 \frac{Y_2}{Y_1}$$

par soustraction, on tire de (6) et de (7) :

$$(8) \quad X_1 - x_1 = f_1 \frac{Y_1 y_2 - Y_2 y_1}{Y_2 y_2} \quad \text{et} \quad X_2 - x_2 = f_2 \frac{Y_1 y_2 - Y_2 y_1}{Y_1 y_1}$$

en égalant les valeurs de $Y_1 y_2 - Y_2 y_1$ tirées de ces deux dernières égalités, on obtient la relation :

$$(9) \qquad \frac{X_1 - x_1}{f_1 Y_1 y_1} = \frac{X_2 - x_2}{f_2 Y_2 y_2}$$

Dans le cas où le système se réduit à une seule surface réfringente, les quantités f_1 et f_2 sont proportionnelles, comme

nous l'avons vu, aux indices n_1 et n_2 des deux milieux ; d'après cela, la relation (9) donne :

$$(10) \qquad \frac{X_1 - x_1}{n_1 Y_1 y_1} = \frac{X_2 - x_2}{n_2 Y_2 y_2}$$

Supposons maintenant qu'une seconde surface sphérique centrée sur l'axe OX sépare le milieu d'indice de réfraction n_2 d'un autre milieu d'indice n_3 ; les images A_2 et B_2 fontionnant comme objet par rapport à cette nouvelle surface, on aura, en caractérisant par l'indice 3 les coordonnées des images A_3 et B_3 de A_2 et B_2 et par conséquent de A_1 et de B_1 :

$$(11) \quad \frac{X_2 - x_2}{n_2 Y_2 y_2} = \frac{X_3 - x_3}{n_3 Y_3 y_3} \text{ d'où, d'après (10): } \frac{X_1 - x_1}{n_1 Y_1 y_1} = \frac{X_3 - x_3}{n_3 Y_3 y_3}$$

et ainsi de suite : quel que soit le nombre des surfaces de séparation sphérique centrées sur OX interposées entre un milieu d'indice de réfraction n_1 et un milieu d'indice n_2, on voit qu'en désignant par x_1 et y_1, X_1 et Y_1 les coordonnées de deux points A_1 et B_1 et par x_2 et y_2, X_2 et Y_2 celles des images de ces points données par tout le système, la relation (10) est applicable. En comparant alors cette relation à la relation générale (9), on en conclut :

$$(12) \qquad \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2}$$

28. SYSTÈME DIOPTRIQUE DONT LES MILIEUX EXTRÊMES ONT LE MÊME INDICE. — Quand les milieux extrêmes d'un système dioptrique centré ont le même indice, comme c'est le cas le plus habituel, puisque l'air baigne en général les deux faces extrêmes d'un instrument d'optique, on a, d'après la formule (12) du paragraphe précédent, $f_1 = f_2$: *les distances focales sont les mêmes*.

Les points nodaux se confondent alors avec les points principaux, puisque, dans le cas général, la distance d'un point nodal

au point principal correspondant est égale à la différence des deux distances focales.

Les formules qui donnent la position de l'image et sa grandeur deviennent alors, en appelant f la valeur commune des deux distances focales :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$$

Ces formules ont été discutées (§ 20).

Faisons remarquer seulement que, les plans principaux n'étant pas confondus, en général, avec les faces extrêmes du système optique, à une valeur positive de p ne correspond pas nécessairement un objet réel, car si la face antérieure du système était en avant du premier plan principal, p pourrait être positif quoique l'objet fût derrière la première surface réfringente, fût virtuel, par conséquent. De même, une valeur négative de p peut correspondre à un objet réel si, le premier plan principal étant en avant de la première surface réfringente, l'objet se trouve entre cette surface et le premier plan principal. Des remarques analogues s'appliquent à l'image.

Nous appellerons *convergence* du système l'inverse $\frac{1}{f}$ de la distance focale. La convergence a le même signe que f.

Faisons remarquer qu'à un système convergent ou divergent ne correspond pas nécessairement une convergence positive ou négative, puisque le signe de f dépend de la position du foyer par rapport au plan principal correspondant et, qu'en général, les plans principaux ne sont pas confondus avec les faces extrêmes du système optique.

29. POSITION DES PLANS PRINCIPAUX DANS UNE LENTILLE ÉPAISSE. — Comme exemple, nous allons indiquer la position des plans principaux dans une lentille épaisse dont les deux faces sont baignées par l'air.

Pour cela, nous pourrions nous servir de la formule établie (7, § 10) pour la réfraction à travers une surface sphérique et de la formule établie (7, § 23) pour la position du plan principal d'un nouveau système qui possède une surface réfringente de plus qu'un système précédent. Mais nous avons déjà fait le calcul de la position des points principaux, quand nous avons calculé (§ 14) la position des points nodaux d'une lentille dont les deux faces sont baignées par l'air, puisqu'alors les points nodaux occupent la même position que les points principaux.

Rappelons qu'en désignant par a la distance du premier point nodal à la première face de la lentille, a étant considéré comme positif si le point nodal est en avant de cette face et comme négatif s'il est en arrière, par R et R′ les rayons de courbure de la première et de la seconde face, avec les conventions de signes faites plus haut (§ 10), par e l'épaisseur de la lentille, et enfin, par n l'indice par rapport à l'air de la substance dont est formée celle-ci, on a :

$$(1) \qquad a = \frac{eR}{n(R' - R - e) + e}$$

De même, appelons a' la distance du second point nodal à la deuxième face de la lentille, en considérant, par raison de symétrio, cette quantité comme positive, si le second point nodal est en arrière de cette face, et comme négative, si il est en avant; nous obtiendrons la valeur a' d'après la formule (1), en supposant que la lumière tombe sur la seconde face, ce qui entraîne le changement de R en — R′, et de R′ en — R; d'où :

$$(2) \qquad a' = \frac{-eR'}{n(-R + R' - e) + e} = \frac{-eR'}{n(R' - R - e) + e}$$

Ces formules permettent de trouver pour chaque forme de lentille la position des points principaux : la figure 72 indique suffisamment le résultat. On voit que, si l'épaisseur des lentilles est faible par rapport aux rayons de courbure, les plans principaux sont à l'intérieur d'une lentille biconvexe ou biconcave;

que, pour une lentille plan convexe ou plan concave, l'un des plans principaux est tangent à la face courbe; et qu'enfin pour un ménisque, un des deux plans principaux, au moins, est en dehors de la lentille, du côté de la face qui a la plus forte courbure. Du reste, le premier plan principal est en avant du second, mais il peut en être autrement si l'épaisseur devient très grande.



FIG. 72.

Ainsi, considérons, par exemple, une lentille biconvexe dont les faces ont même rayon de courbure r; posons alors dans les formules ci-dessus $R = -r$ et $R' = +r$: elles deviennent :

$$a = a' = \frac{-er}{2nr - (n-1)e} \tag{3}$$

tant que $\frac{r}{2nr-(n-1)e}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$, ce qui entraîne $e < 2r$, le premier plan principal est en avant du second puisque a et a' sont plus petits que $\frac{e}{2}$ en valeur absolue; mais pour $e = 2r$ (lentille sphérique), on a $a = a' = -\frac{e}{2}$; les deux points principaux sont confondus avec le centre de la lentille. Enfin, pour $e > 2r$, a et a' sont plus grands que $\frac{e}{2}$: le premier plan principal est en arrière du second.

On peut remarquer sur la figure 72 que, pour des lentilles de même épaisseur, quelle que soit leur forme, la distance des deux plans principaux est sensiblement la même.

Calculons, en effet, cet interstice d; on a :

$$(4) \qquad d = e + a + a'$$

ou, en vertu de (1) et de (2) :

$$(5) \qquad d = \frac{(n-1)\,e\,(R'-R-e)}{n\,(R'-R-e)+e} = \frac{n-1}{n}\,e\,\frac{1}{1+\dfrac{e}{n\,(R'-R-e)}}$$

Or, si e est faible vis-à-vis de $(R-R')$, ce qui est le cas de la plupart des lentilles employées, on a sensiblement :

$$(6) \qquad d = \frac{n-1}{n}\,e$$

la distance des deux plans principaux est indépendante de la forme de la lentille. Comme l'indice n du verre par rapport à l'air est à peu près $\frac{3}{2}$, on voit que l'on a pour les lentilles de verre peu épaisses $d = \frac{e}{3}$: *l'interstice est le tiers de l'épaisseur de la lentille.*

CHAPITRE IV

CAUSTIQUES. — ABERRATION DE SPHÉRICITE APLANÉTISME

Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu qu'une surface de séparation sphérique entre deux milieux jouit de la propriété de faire concourir en un même point réel ou virtuel les rayons issus d'un point lumineux, soit par réflexion, soit par réfraction; mais, comme nous le savons, cette propriété n'est rigoureusement exacte que si les rayons considérés sont infiniment voisins, sauf dans quelques cas très particuliers. Nous allons, examiner d'une façon générale, dans ce chapitre, comment sont distribués les rayons issus d'un point lumineux après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions obtenues avec des surfaces de séparation de forme quelconque (*caustiques*). Nous verrons ce qui se passe, en particulier, dans le cas intéressant des surfaces sphériques quand les rayons considérés ne sont plus infiniment voisins (*aberrations de sphéricité*). Enfin, nous chercherons la forme des surfaces qui amènent rigoureusement en un même point les rayons réfléchis ou réfractés émanés d'un point lumineux, quand ces rayons sont à des distances quelconques les uns des autres (*aplanétisme*).

1. **THÉORÈME DE GERGONNE.** — *Après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions par des surfaces de forme quelconque, les rayons issus d'un point lumineux sont normaux à une même surface.*

Ce théorème, qui distingue les rayons issus d'un point de droites distribuées au hasard, sert de base à la théorie des caustiques. Il a été établi d'abord par Malus, mais réduit à une seule réflexion ou réfraction; Dupin, Timmermans et enfin Gergonne l'ont généralisé. Voici comment on peut le démontrer.

Occupons-nous d'abord du cas de la réflexion. Considérons des rayons parallèles entre eux SI, S'I', S''I''... tombant sur une surface plane réfléchissante P (fig. 73), et soit NM un plan perdiculaire à ces rayons. Il est facile de voir que les rayons réfléchis IR, I'R', I''R'' ... sont tous normaux à un même plan NM' symétrique de NM par rapport à la surface réfléchissante. Remarquons que si des divers points I, I', I'',... de la surface P, pris pour centres, on décrit des sphères tangentes au plan NM, ces sphères sont tangentes aussi au plan NM', qui en est une surface enveloppe.

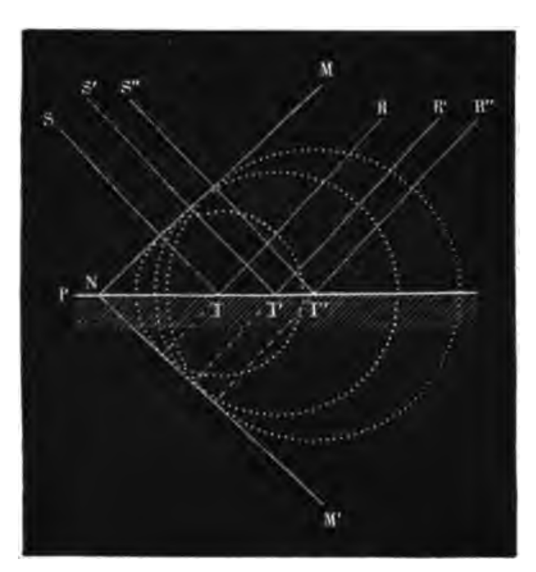


FIG. 73.

Supposons maintenant que nous ayons une série de rayons tous normaux à une même surface M (fig. 74) de forme quelconque, et que ces rayons se réfléchissent sur une surface P de forme quelconque aussi. Considérons un faisceau de rayons infiniment voisins, qui rencontre M suivant un élément de surface *m*. Cet élément de surface pouvant être confondu dans son étendue avec son plan tangent π, ces rayons peuvent être considérés comme

étant tous perpendiculaires à π et, par conséquent, comme étant parallèles entre eux. Soit p l'élément de surface suivant lequel ils rencontrent P ; on peut, de même, confondre dans son étendue l'élément p avec son plan tangent φ. Il en résulte que les rayons de ce faisceau se réfléchissent comme si, étant normaux à un plan π, ils tombaient sur le plan réfléchissant φ. Par conséquent, comme nous l'avons vu plus haut, ces rayons, après réflexion, sont tous normaux à un même plan μ symétrique du plan π par rapport au plan φ. Si, maintenant, des divers points de l'élément p, pris comme centres, nous décrivons des sphères tangentes aux divers points de π ou, ce qui revient au même, de l'élément m, ces sphères, comme nous le savons, sont tangentes à μ qui en est une enveloppe.

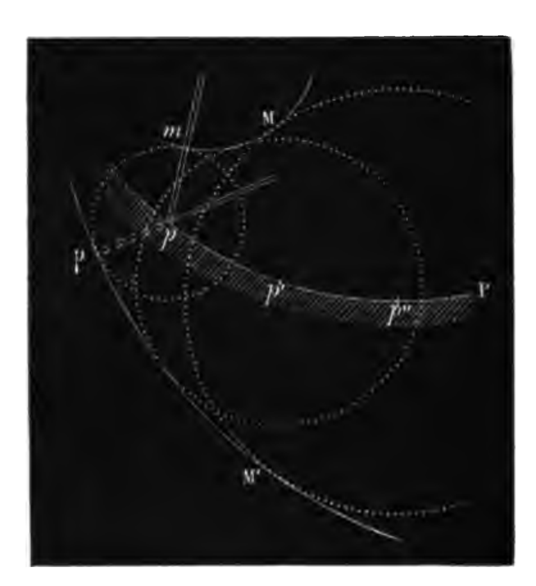


Fig. 74.

Ce que nous venons de dire s'applique aux divers éléments de la surface P : il résulte de là que, si des différents points de cette surface, pris comme centres, on décrit des sphères tangentes à la surface M, ces sphères sont tangentes aux divers plans μ. La surface M', enveloppe de ces sphères, est donc l'enveloppe aussi des plans μ et, par conséquent, *est une surface normale à tous les rayons réfléchis*.

Or, tous les rayons issus d'un même point A sont normaux

à une sphère M ayant ce point pour centre. Après une première réflexion sur une surface quelconque P, ces rayons sont donc normaux à une même surface M'; par conséquent, après une seconde réflexion sur une surface quelconque P', ils sont normaux à une nouvelle surface M'', et ainsi de suite : après un nombre quelconque de réflexions, les rayons issus du point A sont normaux à une même surface.

Le théorème de Gergonne se trouve ainsi démontré dans le cas de la réflexion ; il n'est pas plus difficile de l'établir pour la réfraction.

Considérons des rayons parallèles SI, S'I', S''I''... tombant sur une surface plane réfringente PQ (fig. 75); soit NM un plan perpendiculaire à ces rayons. Les rayons réfractés RIK, R'I'K', R''I''K''. . . sont parallèles entre eux et, par conséquent, normaux à une série de plans parallèles. D'après la première loi de la réfraction, ces plans coupent PQ suivant des parallèles à la ligne d'intersection de NM et de PQ; menons parmi eux le plan NM' qui passe par cette ligne d'intersection même. Désignons par S le point d'intersection d'un rayon incident IS avec le plan NM, et par R le point d'intersection de la direction du rayon réfracté correspondant IR avec NM'. On a :

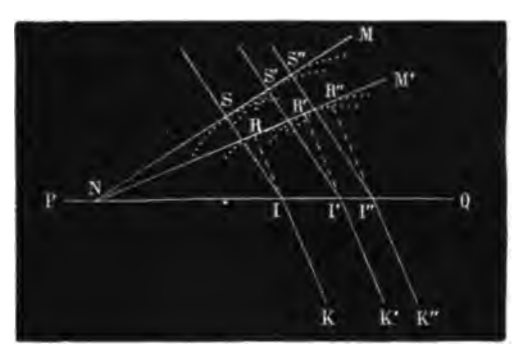


Fig. 75.

$$IS = IN \sin SNI$$

$$IR = IN \sin RN$$

d'où ·

$$\frac{IS}{IR} = \frac{\sin SNI}{\sin RNI} = \frac{n_2}{n_1}$$

en appelant n_1 et n_2 les indices de réfractions absolus du premier et du second milieu, puisque les angles SNI et RNI sont respectivement égaux aux angles d'incidence et de réfraction.

Il résulte de là que, si des divers points I, I', I''... de la surface PQ, pris pour centres, nous décrivons des sphères tangentes au plan NM, et si des mêmes points nous décrivons d'autres sphères ayant des rayons IR, I'R', I''R''... qui sont respectivement aux rayons IS, I'S', I''S''... des premières sphères dans le rapport $\frac{n_1}{n_2}$, ces dernières sphères sont tangentes au plan NM' qui en est une surface enveloppe.

On achève la démonstration absolument comme dans le cas de la réflexion : si des rayons normaux à une même surface M, de forme quelconque, se réfractent à travers une surface Q de forme quelconque aussi, les rayons réfractés sont normaux à une même surface M'; celle-ci est une enveloppe des sphères ayant leurs centres aux divers points de la surface réfringente Q, le rayon de chacune d'elle étant égal au rayon d'une sphère de même centre, tangente à la surface M, multiplié par le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ des indices des deux milieux.

Si l'on prend sur les normales à une surface des longueurs égales à partir de cette surface, les extrémités de ces droites forment une seconde surface qui a mêmes normales que la première. Par conséquent, les rayons qui sont normaux à une surface sont normaux à une infinité d'autres surfaces, par exemple, les rayons normaux à une sphère sont normaux à toutes les sphères concentriques.

Le théorème de Gergonne montre que les rayons issus d'un point et qui ont subi un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions par des surfaces quelconques, ont une direction qui peut être obtenue, soit par une seule réflexion sur une surface déterminée, soit par une seule réfraction à travers une surface déterminée aussi, quand on s'est fixé le rapport $n = \frac{n_2}{n_1}$ des deux indices.

En effet, soit M une sphère à laquelle les rayons issus d'un point A sont d'abord normaux et soit M' la surface à laquelle ils

sont normaux après une série de réflexions ou de réfractions. Le lieu des points dont les distances normales aux surfaces M et M' sont les mêmes est une surface P bien déterminée ; d'après ce que nous avons vu plus haut, les rayons émis par A après une seule réflexion sur P prendraient leurs directions finales.

De même, le lieu géométrique des points dont les distances normales aux surfaces M et M' sont dans un rapport donné n est une surface Q bien déterminée ; d'après ce que nous avons vu plus haut, une seule réfraction à travers cette surface des rayons émis par A leur donnerait leurs directions finales, si le rapport de l'indice du second milieu à celui du premier est égal à n.

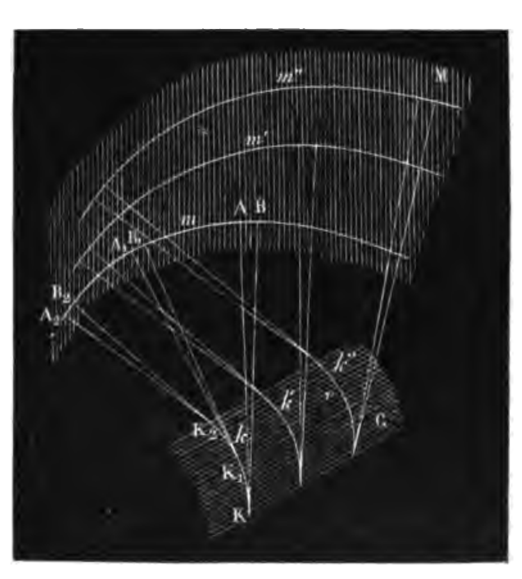


Fig. 76.

2. Caustiques — Soit M (fig. 76) une surface à laquelle se trouvent normales les directions des rayons issus d'un même point A après un certain nombre de réflexions ou de réfractions.

Considérons une ligne de courbure m de la surface M; les rayons normaux passant par des points de la ligne m infiniment voisins A et B se rencontrent, comme on le sait, en un même point K, le centre de courbure, en négligeant un infiniment d'un ordre supérieur. Il y a donc en ce point K une quantité de lumière plus grande

qu'en tout autre point pris sur l'un des rayons. A chaque partie infiniment petite AB, A_1B_1, A_2B_2... de la ligne de courbure *m* correspond un centre de courbure K, K_1, K_2... distinct en général, et le lieu de ces centres de courbures constitue une ligne *k* plus lumineuse que les autres points de la surface formée par les rayons normaux à M passant par *m*. Pour chacune des lignes de courbure *m*, *m'*, *m''*... de la surface M, appartenant à la même série, il y a une ligne telle que *k* : le lieu géométrique des lignes *k*, *k'*, *k''*... est une surface C plus lumineuse que les autres parties de l'espace et qu'on appelle une surface *caustique* (1). La caustique est *réelle* si les rayons la rencontrent effectivement, *virtuelle* si ce sont les prolongements des rayons qui la rencontrent.

Comme il y a sur une surface deux séries de lignes de courbures, les lignes d'une série coupant à angle droit celles de l'autre série, il y a, par conséquent, deux caustiques.

Dans le cas où la surface M est de révolution, les lignes de courbure de l'une des séries sont des cercles perpendiculaires à l'axe ; la surface caustique qui correspond à cette série se réduit à l'axe lui-même, chacune des lignes *k* correspondant à une ligne de courbure circulaire *m* se réduisant à un point de l'axe. Les lignes de courbure de l'autre série sont les sections méridiennes de la surface de révolution ; la ligne *k* qui correspond à une de ces sections méridiennes *m* en est la développée, et la caustique que forment ces lignes *k* est de révolution autour de l'axe. Au point où l'axe perce cette dernière surface les deux caustiques se rencontrent : il y a en ce point plus de lumière qu'en tous les autres points ; c'est un *foyer* (réel ou virtuel).

La lumière émanée d'un point lumineux A, en se réfléchissant à la surface d'un miroir sphérique, fournit un exemple de ce dernier cas : l'axe de révolution de la caustique est la droite qui joint la source lumineuse A au centre de courbure du miroir (2).

(1) L'identité de la lumière et de la chaleur rayonnante fait que, sur la caustique, il y a plus de chaleur qu'ailleurs : de là son nom.

(2) Comme exemple, nous allons établir la forme de la caustique dans un cas simple, celui de la réflexion à la surface d'un miroir sphérique concave de la lumière envoyée par un point A situé au delà du centre de courbure C du miroir. Nous savons déjà que l'une des caustiques est l'axe AC du

La réfraction de la lumière par un système dioptrique centré donne évidemment aussi une caustique de révolution autour de

point A et que, par raison de symétrie, l'autre caustique est de révolution autour de cet axe. La question revient donc à chercher la section méridienne de cette caustique, qui est le lieu des intersections successives des rayons réfléchis situés dans le plan de la section.

Prenons cette section comme plan de la figure 77. Soient AI et AI′ des rayons incidents infiniment voisins situés dans ce plan, et α l'angle infini-

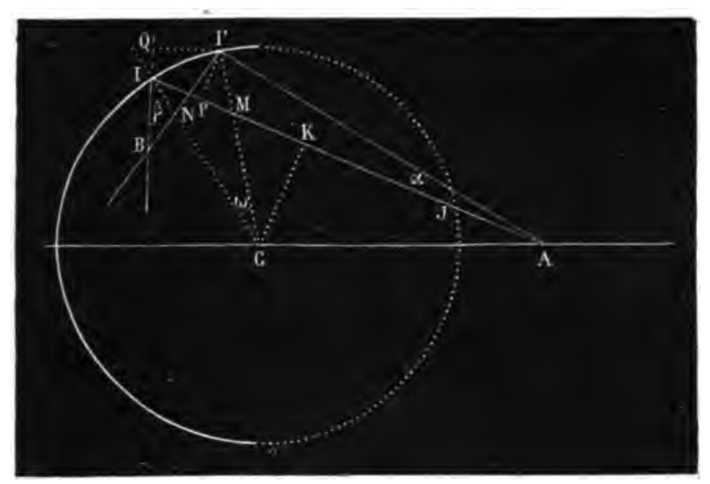


Fig. 77.

ment petit qu'ils forment entre eux ; soient IB et I′B les rayons réfléchis correspondants, B leur point de rencontre, qui est un point de la caustique, et β l'angle infiniment petit qu'ils forment entre eux. Désignons par ω l'angle infiniment petit ICI′, par p et p' les distances AI et IB, et par R le rayon CI du miroir. Abaissons du point I′ les perpendiculaires I′P sur AI et I′Q sur BI prolongé ; on a les relations :

(1) $$\text{I'P} = p\alpha \qquad \text{I'Q} = p'\beta \qquad \text{II'} = \text{R}\omega$$

D'ailleurs, les triangles rectangles IPI′ et IQI′ fournissent les relations :

(2) $$\text{I'P} = \text{I'I} \cos \text{II'P} \qquad \text{I'Q} = \text{I'I} \cos \text{II'Q}$$

Or, à la limite, l'angle II′P a ses côtés perpendiculaires à ceux de l'angle

l'axe du système, si le point lumineux A est sur cet axe. Dans ces deux cas, le point où l'axe coupe la caustique de révolution est le foyer conjugué du point A.

3. **LIGNES FOCALES.** — Considérons un élément infiniment petit μ de la surface M à laquelle sont normaux les rayons issus d'un

d'incidence AIC et, par conséquent, est égal à cet angle que nous désignerons par i ; de même à la limite, l'angle II'Q a ses côtés perpendiculaires à ceux de l'angle de réflexion BIC et, par conséquent, est encore égal à i; il vient donc en remplaçant dans (2) :

$$(3) \qquad p\alpha = \mathrm{R}\,\omega \cos i \qquad p'\beta = \mathrm{R}\omega\cos i$$

Du reste, les triangles AI'M et CIM fournissent la relation :

$$(4) \qquad \mathrm{MAI'} + \mathrm{AI'M} = \mathrm{AMC} = \mathrm{MCI} + \mathrm{CIM}$$

ou, en désignant par i' l'angle AI'M :

$$(5) \qquad \alpha + i' = \omega + i \qquad \text{d'où : } i' - i = \omega - \alpha$$

De même, la considération des deux triangles BIN et CNI' donne :

$$(6) \qquad \beta + i = \omega + i' \qquad \text{d'où : } i' - i = \beta - \omega$$

On tire des égalités (5) et (6) :

$$(7) \qquad \omega - \alpha = \beta - \omega \qquad \text{ou } \alpha + \beta = 2\omega$$

En remplaçant dans cette dernière relation α et β par leurs valeurs tirées de (3), ω s'élimine et il vient :

$$(8) \qquad \frac{\mathrm{R}\cos i}{p} + \frac{\mathrm{R}\cos i}{p'} = 2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{\mathrm{R}\cos i}$$

Or, R cos i est égal à la moitié IK de la corde IJ ; en désignant par $4f$ la longueur de cette corde, on a donc :

$$(9) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Cette formule est de la même forme que celle trouvée pour la position de deux foyers conjugués, dans le cas où les rayons sont infiniment voisins

point A après un certain nombre de réflexions ou de réfractions (fig. 81). Menons sur M une ligne de courbure m; les rayons

de l'axe AO, et comprend cette dernière comme cas particulier. Elle permet de trouver la longueur p' de IB, d'après la connaissance de AI et de IJ et, par conséquent, de construire par points la section méridienne de la caustique (fig. 78).

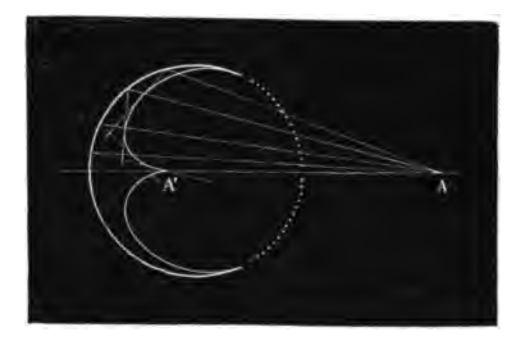


Fig. 78.

Dans le cas particulier où le point A est à l'infini, la formule (9) donne $p' = f$: la distance IB est le quart de la corde IJ. La section méridienne de la caustique est alors une épicycloïde.

En effet, soit (fig. 79) JI un rayon lumineux parallèle à l'axe OC émanant du point A de l'infini, et soit IB la direction du rayon réfléchi. Décrivons un cercle ayant même centre O que le miroir mais avec un rayon r égal à la moitié du rayon R du miroir; soit L le point où la normale OI le rencontre. Sur IL comme diamètre, décrivons un second cercle; le rayon r' de ce cercle est égal à $\frac{R}{4} = \frac{r}{2}$. Abaissons sur IJ la perpendiculaire OK, et joignons le point L au point B' où IJ rencontre le petit cercle.

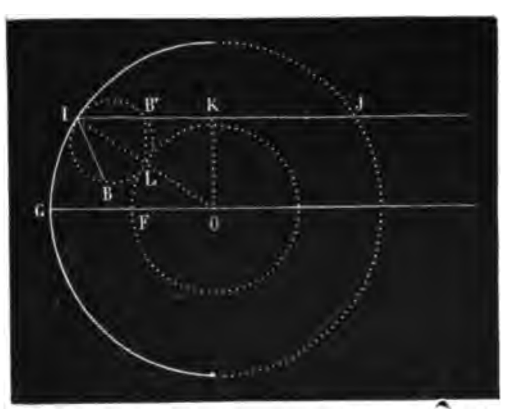


Fig. 79.

L'angle IB'L étant droit, LB' est parallèle à OK; il en résulte que IB' égale B'K puisque OL est égal à LI; par conséquent, IB' est le quart de IJ. D'autre part, en appelant B le point où le rayon ré-

normaux qui passent par cette ligne dans l'étendue de l'élément μ se coupent au centre de courbure K en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur. A chacune des lignes de courbure m, m', m''... de la même série, correspond un point tel que K; ces points K, K', K''... forment une ligne par laquelle passent tous les rayons normaux à l'élément, c'est une *ligne focale*. Cette ligne focale est *réelle* si les rayons la rencontrent effectivement, *virtuelle* si ce sont les prolongements des rayons qui la coupent.

Il y a deux séries de lignes de courbures m, m', m''... et n, n', n''..., pour chacune des deux il y a une ligne focale K'KK'' ou L'LL'' qui se trouve évidemment sur la caustique correspondant à la même série de lignes de courbure.

Désignons par O un point situé vers le milieu de l'élément μ;

fléchi coupe le petit cercle, les droites IB et IB' sont égales, comme cordes d'arcs égaux, donc IB est aussi le quart de IJ, et B est un point de la caustique.

En désignant par i la valeur des angles égaux BIO, OIB' et IOF, l'arc BL a pour valeur $2ir'$, et l'arc FL a pour valeur ir; or, comme $2r' = r$, les arcs BL et FL sont égaux. Il en résulte qu'un point fixe B du petit cercle décrit la section méridienne de la caustique, si le petit cercle roule sur le cercle fixe FL, le point B occupant primitivement la position F : cette section méridienne est une épicycloïde.



Fig. 80.

On démontre facilement que, dans le cas d'un point lumineux à l'infini envoyant des rayons sur un miroir cylindrique à section droite circulaire, l'une des surfaces caustiques est à l'infini et l'autre est un cylindre dont la section droite est une épicycloïde. L'expérience permet aisément de réaliser la coupe de cette caustique, en plaçant sur une feuille de papier blanc une portion d'un cylindre réfléchissant éclairé par une source lumineuse située très loin (fig. 80).

menons par ce point les deux lignes de courbures m et n. Si ces lignes ont même rayon de courbure, il y a en O une sphère osculatrice à la surface M (O est un ombilic); l'élément μ peut être considéré comme placé à la surface de cette sphère et, par conséquent, le centre A' de celle-ci est le point de rencontre de tous les rayons normaux à l'élément μ : les deux lignes focales se réduisent alors à un même point A', qui est un foyer, les deux caustiques se rencontrant en ce point. Mais si les deux lignes m et n n'ont pas la même courbure, il y a deux lignes focales

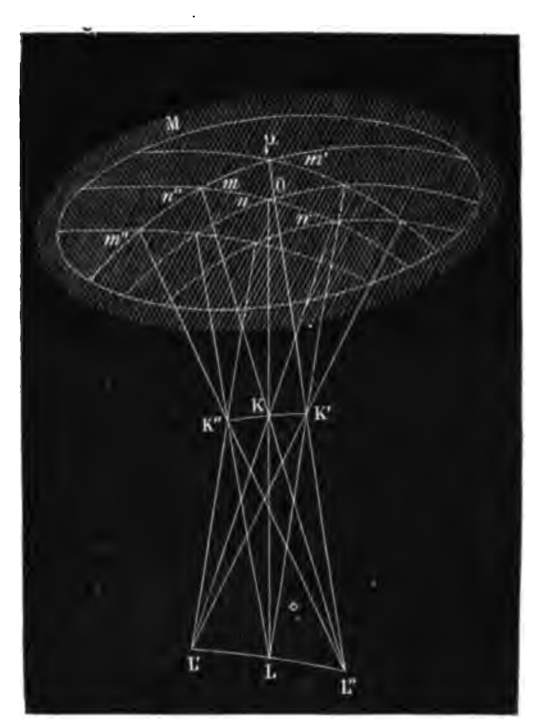


Fig. 81

distinctes rencontrant en deux points différents K et L le rayon OKL normal en O. Tous les rayons normaux passant par m, dans l'étendue de l'élément μ, peuvent être considérés comme contenus dans un même plan, la section principale S tangente à m; par conséquent, la ligne focale L'LL'' qui correspond à la série des lignes de courbures n', n, n''... étant rencontrée par tous ces rayons, se trouve dans cette section principale S. De même, la seconde ligne focale K'KK'' se trouve dans la section principale T tangente à la courbe n. Or, les sections principales S et

T sont perpendiculaires entre elles : *les deux lignes focales sont dans des plans rectangulaires entre eux se coupant suivant le rayon* OKL.

Supposons maintenant qu'un faisceau de rayons issus d'un point lumineux A pénètre dans l'œil après avoir subi une ou plusieurs réflexions ou réfractions. Comme le diamètre de la pupille est en général petit vis-à-vis des rayons de courbure des surfaces réfléchissantes ou réfringentes, les rayons lumineux qui pénètrent dans l'œil rencontrent la surface M à laquelle ils sont normaux en des points assez voisins pour pouvoir être considérés comme appartenant à un même élément μ ; ce que nous venons de dire s'applique alors à tous les rayons pénétrant dans l'œil, qui semblent venir de l'une ou de l'autre ligne focale. Si donc l'œil est placé à une distance convenable de celles-ci, il se peint sur la rétine une image de chacune d'elles ; ces images étant perpendiculaires, l'une à l'autre, l'œil voit une petite croix lumineuse.

Les deux branches de cette croix ne sont pas vues, en général, avec la même netteté, car les lignes focales sont à des distances différentes de l'œil, qui ne peut être accommodé que pour la vision nette de l'une d'elles. Plus les deux lignes focales sont rapprochées l'une de l'autre, plus elles sont courtes et, quand elles sont à la même distance de l'œil elles se réduisent à un point A′ comme nous le savons ; dans ce cas le système optique donne une image nette du point A et, par conséquent, d'un petit objet dont A fait partie.

Si l'œil se déplace, les lignes focales se déplacent sur les caustiques correspondantes [1].

Comme exemple, considérons d'abord la réflexion sur un miroir sphérique ou la réfraction à travers un système dioptrique centré, le point lumineux A étant placé sur l'axe du système. Pour une position quelconque de l'œil, l'une des lignes focales est une portion de l'axe du point A, l'autre se trouve sur la caus-

(1) Ce que nous venons de dire pour les rayons reçus dans l'œil, peut s'appliquer également aux rayons reçus dans l'objectif d'une lunette astronomique, pourvu que le diamètre de celui-ci ne soit pas trop considérable : en donnant à la lunette un tirage convenable, on peut viser successivement les deux lignes focales.

tique de révolution. Si l'œil est placé sur l'axe correspondant au point A, les deux lignes se réduisent au point A′ où l'axe coupe la caustique de révolution, foyer conjugué de A. Si l'œil est placé très près de l'axe du point A, les deux lignes focales sont si courtes et si rapprochées qu'elles produisent encore sensiblement l'effet d'un point sur l'œil. Il en est encore de même si le point A est très voisin de l'axe principal d'un système dioptrique, l'œil en étant voisin aussi. Ceci est d'accord avec ce que nous avons établi dans les deux paragraphes précédents où nous avons toujours supposé ces conditions remplies.

Considérons le cas particulier d'un point brillant placé dans l'eau et regardé à travers la surface plane du liquide : l'œil voit une croix lumineuse s'il regarde obliquement à la surface, et un point s'il regarde normalement. Une des lignes focales est suivant la perpendiculaire abaissée du point lumineux à la surface (axe du point) et plus rapprochée de celle-ci que le point. L'autre ligne est en avant de l'axe, dans une direction qui lui est perpendiculaire [1].

(1) Pour trouver la position de ces deux lignes focales, considérons d'abord des rayons issus de A et faisant avec l'axe AO (fig. 82) un même angle a_1 ; ces rayons, disposés à la surface d'un cône, font tous avec la normale à la surface MM′, à l'endroit où ils tombent, le même angle a_1; par conséquent, pour tous ces rayons l'angle de réfraction a la même valeur a_2. Il en résulte que les prolongements de ces rayons coupent tous l'axe AO en un même point : *ce point de rencontre de plusieurs rayons est un point d'une des lignes focales.*

Soit AI un de ces rayons incidents et IR le rayon réfracté correspondant, dont le prolongement coupe en B l'axe AO ; on a :

$$OI = AI \sin OAI = BI \sin OBI$$

ou bien, en désignant par q_1 la distance AI et par q_2 la distance BI :

$$(1) \qquad q_1 \sin a_1 = q_2 \sin a_2 \quad \text{d'où : } \frac{q_2}{q_1} = \frac{\sin a_1}{\sin a_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{3}{4}$$

en désignant par n_1 l'indice de réfraction de l'eau et par n_2 celui de l'air.

Si maintenant nous considérons, au lieu des rayons qui forment avec l'axe l'angle a_1, des rayons formant un même angle différent $(a_1 + \alpha_1)$, on aura pour le point de concours des prolongement des rayons réfractés un autre

Nous prendrons comme second exemple la réfraction à travers un prisme de rayons passant près du sommet du prisme, l'œil étant placé dans la section principale qui contient le point lumineux A. Dans ce cas, par raison de symétrie, l'une des lignes focales a une direction parallèle et l'autre une direction perpendiculaire à l'arête du prisme. Cette dernière est toujours à la même distance de l'arête que le point A; quant à la première, elle est à une distance de l'arête variable avec l'incidence des rayons; mais pour l'incidence qui correspond au minimum de déviation, elle est aussi placée à la même distance de l'arête

point B' de l'axe AO; par conséquent une des lignes focales est suivant cet axe. Nous le savions d'après la théorie générale; mais la formule (1), trouvée par le calcul précédent, nous sera utile plus loin.

Considérons maintenant deux rayons infiniment voisins AI et AI' contenus dans un même plan passant par l'axe AO; les prolongements des rayons réfractés IR et I'R' auxquels ils donnent naissance se coupent en un point C. En désignant par a_1 et $a_1 + \alpha_1$ les angles que forment avec une normale à la surface les rayons incidents AI et AI' et par a_2 et $a_2 + \alpha_2$ les angles que font avec ces normales les rayons réfractés IR et I'R', l'angle IAI' est égal à α_1, et l'angle ICI' à α_2. Abaissons de I sur AI' la perpendiculaire IP, et de I sur CI' la perpendiculaire IP'; désignons par p_1 la distance AI et par p_2 la distance CI; on a, puisque α_1 et α_2 sont des infiniment petits:

$$(2) \qquad IP = \alpha_1 p_1 \qquad IP' = \alpha_2 p_2$$

d'ailleurs, en remarquant que I'IP est égal à $a_1 + \alpha_1$ et I'IP' à $a_2 + \alpha_2$:

$$(3) \qquad IP = II' \cos(a_1 + \alpha_1) \quad \text{et} \quad IP' = II' \cos(a_2 + \alpha_2)$$

de (2) et de (3) on tire:

$$(4) \qquad \frac{\alpha_1 p_1}{\cos(a_1 + \alpha_1)} = \frac{\alpha_2 p_2}{\cos(a_2 + \alpha_2)} \quad \text{ou} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\cos(a_2 + \alpha_2)}{\cos(a_1 + \alpha_1)}$$

comme α_1 et α_2 sont des infiniment petits $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ est la dérivée $(a_2)'$ de a_2 par rapport à a_1; d'ailleurs, α_1 et α_2 sont négligeables devant a_1 et a_2. Il vient donc:

$$(5) \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{(a_2)'} \frac{\cos a_2}{\cos a_1}$$

que le point A. Les deux lignes focales se coupant, pour cette incidence, elles se réduisent à un point A′, image du point A. Ainsi ce n'est que pour la position du minimum de déviation

En égalant les dérivées par rapport a a_1 des deux membres de la relation $n_1 \sin a_1 = n_2 \sin a_2$, on a :

$$(6) \qquad n_1 \cos a_1 = (a_2)' \, n_2 \cos a_2$$

et, en remplaçant $(a_2)'$ par sa valeur dans (5) il vient :

$$(7) \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos^2 a_2}{\cos^2 a_1} \quad \text{ou} \quad \frac{p_1}{n_1 \cos^2 a_1} = \frac{p_2}{n_2 \cos^2 a_2}$$

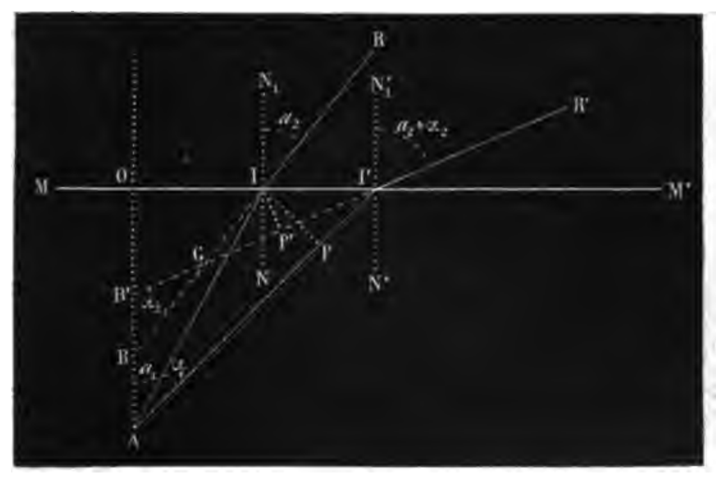


Fig. 82.

On voit que la distance IC $(= p_2)$ est indépendante de α_1, par conséquent, tous les rayons infiniments voisins de AI, ont, après réfraction, des prolongements qui se coupent en C : *le point* C *appartient à la seconde ligne focale.*

Ce que nous venons de dire pour un plan passant par l'axe AO s'applique à tout plan passant par cet axe. Pour tous ces plans le point C de la ligne focale est à une même distance de OA : cette ligne focale, lieu des points C, est un arc de cercle perpendiculaire à l'axe OA.

qu'un prisme donne une image nette d'un point, et, par conséquent, d'un petit objet. C'est là une propriété importante à connaître, et qui explique pourquoi on dispose habituellement au minimum de déviation les prismes qui servent dans les instruments d'optique (1).

(1) On peut trouver ainsi qu'il suit la position des lignes focales produites par un prisme, pour des rayons qui tombent près de son arête.

Remarquons d'abord que les rayons infiniment voisins qui se rencontrent en un point de la ligne focale parallèle à l'arête sont dans un plan contenant l'autre ligne focale c'est-à-dire dans la section principale du point A. De même, les rayons infiniment voisins qui se coupent en un point de la ligne focale perpendiculaire à l'arête sont dans un plan parallèle à cette arête.

Ceci posé, occupons-nous d'abord de cette dernière ligne focale.

Menons du point A une normale AN (fig. 83) à la première face du prisme, ainsi que le rayon lumineux AX qui tombe près de son arête X, dans la section principale passant par A, prise comme plan de figure. Tous les rayons issus de A et qui forment avec AN le même angle i que AX sont sur la surface d'un cône, et nous avons vu (note de la page 383) qu'après avoir traversé la première face, la direction de ces rayons réfractés forme un nouveau cône K ayant encore AN comme axe, mais dont le sommet est en B, la distance BX étant donnée par la relation (formule (1) de la note précédente) :

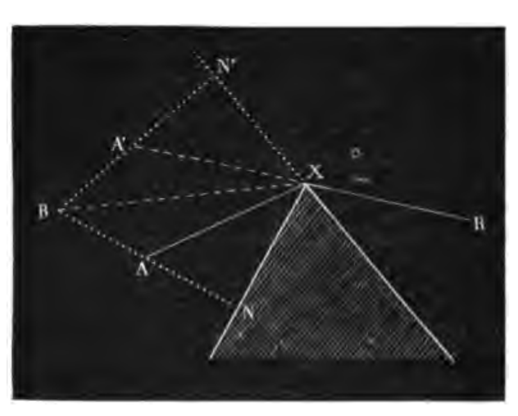


Fig. 83.

$$\text{(1)} \qquad \frac{AX}{BX} = \frac{n_1}{n_2}$$

dans laquelle n_1 représente l'indice de réfraction absolu de l'air et n_2 celui de la substance qui forme le prisme.

Abaissons de B une perpendiculaire BN′ sur le plan de la seconde face, et considérons un cône L ayant BN′ pour axe et B pour sommet, coupant suivant deux génératrices s et s' le cône K. Les rayons dont la direction coïncide avec s et s' appartenant au cône L se réfractent à travers la seconde face de façon que les rayons deux fois réfractés se trouvent sur un cône ayant encore BN′ pour axe. Par raison de symétrie, ces deux rayons sont dans un plan parallèle à l'arête, par conséquent, s'ils sont infiniment voisins, le point de concours A′ de leur direction, situé sur l'axe BN′, est un point de la ligne focale perpendiculaire à l'arête. Or, pour que ces rayons soient infiniment voisins il faut que le cône L soit tangent suivant BX au cône K, et l'on a alors la relation :

$$(2) \qquad \frac{A'X}{BX} = \frac{n_1}{n_2}$$

De (1) et (2) on tire: A′X = AX: ***la ligne focale perpendiculaire à l'arête est à la même distance de celle-ci que le point A.***

Cherchons maintenant la position de la ligne focale parallèle à l'arête. Comme nous l'avons déjà dit, les rayons infiniment voisins qui concourent au point où cette ligne focale parallèle à l'arête traverse la section principale de A sont contenus dans cette section principale. Prenons donc celle-ci comme plan de la figure 84.

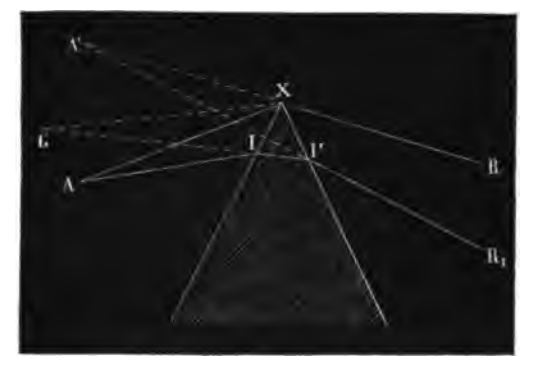


Fig. 84.

Soit AX un rayon qui tombe près de l'arête ; nous avons vu plus haut (note précédente, page 384) que tous les rayons compris dans le plan de figure et infiniment voisins de AX, après avoir traversé la première face, ont des directions qui se coupent en un même point C, dont la distance CX à la première face est donnée par (formule 7) :

$$(3) \qquad \frac{AX}{n_1 \cos^2 i} = \frac{CX}{n_2 \cos^2 r}$$

en désignant par i l'angle d'incidence du rayon AX et par r l'angle de réfraction correspondant.

En tombant sur la seconde face, ces rayons ont les mêmes directions que

La considération des lignes focales est due à Sturm (1).

s'ils venaient du point C ; par conséquent, après réfraction à travers la seconde face, ces rayons ont des directions qui se rencontrent en un certain point A' dont la distance à la deuxième face est donnée en appliquant la même relation que ci-dessus par :

$$(4)\qquad \frac{CX}{n_2 \cos^2 r'} = \frac{A'X}{n_1 \cos^2 i'}$$

r' désignant l'angle d'incidence sur la seconde face et i' l'angle d'émergence.

En égalant les deux valeurs de $\frac{CX}{n_2}$ tirées de (3) et (4), il vient :

$$A'X \frac{\cos^2 r'}{\cos^2 i'} = AX \frac{\cos^2 r}{\cos^2 i}$$

ou :

$$(5)\qquad A'X = AX \frac{\cos^2 r \cos^2 i'}{\cos^2 r' \cos^2 i}$$

Dans le cas du minimum de déviation on a: $i = i'$, $r = r'$; d'ou :

$$A'X = AX$$

(1) Charles Sturm, mathématicien français, professeur à l'École polytechnique, est né à Genève en 1803 et mort en 1855.

C'est à propos de la théorie de la vision qu'il a été amené à considérer les droites focales (1845, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, T. XX, p. 554 et 761).

Sturm a montré l'existence des lignes focales non seulement par l'analyse mathémathique, mais aussi par l'expérience suivante.

On réalise un point lumineux en faisant pénétrer par un petit trou pratiqué dans le volet d'une chambre noire un faisceau de rayons solaires. On reçoit ce faisceau sur une fiole en verre pleine d'eau qui réfracte les rayons d'une façon très irrégulière. Sur la face postérieure de la fiole on a collé un papier opaque percé d'une petite ouverture de forme quelconque du reste. Faisons remarquer que les rayons réfractés qui passent par cette ouverture rencontrent la surface à laquelle ils sont normaux suivant une très petite étendue, et, par conséquent, qu'ils rentrent dans les conditions voulues. Aussi, en écartant plus ou moins une feuille de papier blanc sur laquelle on reçoit le faisceau réfracté, trouve-t-on deux positions où la tache lumineuse formée par le faisceau devient linéaire, ces deux lignes lumineuses étant perpendiculaires entre elles, comme le veut la théorie.

4. **Aberrations de sphéricité.** — Soit A un point lumineux et A′ l'image qu'en donne un miroir sphérique, (fig. 85) ; les rayons infiniment voisins de l'axe AO (*rayons centraux*), après

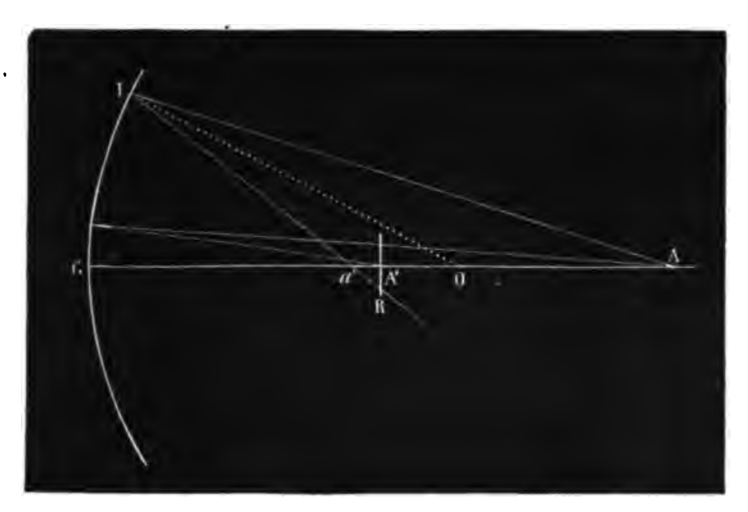


Fig. 85.

réflexion, coupent cet axe en A′, mais les rayons issus de A qui tombent sur les bords du miroir (*rayons marginaux*), après réflexion, coupent cet axe en un point un peu différent *a*′. La distance des deux points *a*′ et A′ est ce qu'on appelle l'*aberration de sphéricité longitudinale.* Pour les miroirs, c'est une grandeur qu'on considère comme positive si le point *a*′ est en arrière de A′ dans le sens de la marche de la lumière incidente, et comme négative dans le cas contraire. Si l'on place en A′ perpendiculairement à l'axe AO un écran plan, un rayon marginal réfléchi I*a*′ le rencontre en R, à une distance A′R du point A′ qu'on appelle l'*aberration de sphéricité transversale.* On voit qu'un point lumineux A, placé sur l'axe principal [1], éclaire

(1) Dans le cas où le miroir est limité par un cercle, il forme une calotte sphérique, et l'on appelle *axe principal* l'axe qui passe par le pôle de cette

par réflexion toute la surface d'un cercle ayant le foyer conjugué A' pour centre et un rayon égal à l'aberration transversale.

Les remarques et les définitions que nous venons de donner dans le cas d'un miroir sphérique s'appliquent aussi bien au cas d'une lentille sphérique ou d'un système dioptrique centré quand le point lumineux est sur l'axe principal ou en est très près. Seulement, dans ce cas, l'aberration longitudinale est considérée comme positive quand le point de concours des rayons marginaux est en avant du point de concours des rayons centraux, comme négative quand il est en arrière.

Le calcul des aberrations ne présente pas de difficultés, mais il est, en général, très laborieux surtout dans le cas des lentilles.

Pour un miroir sphérique, ces aberrations sont rigoureusement nulles si le point lumineux est placé au centre de courbure puisque tous les rayons, frappant normalement le miroir, reprennent après réflexion la même direction et passent tous par le centre. Elles sont extrêmement petites si le point lumineux est dans le voisinage du centre, et augmentent à mesure qu'il s'en éloigne. Si le point lumineux est à l'infini sur l'axe principal, on trouve très facilement, pour l'aberration longitudinale λ, la formule

$$(1) \qquad \lambda = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = \frac{R}{2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} - 1\right)$$

et, pour l'aberration transversale ρ, la formule

$$(2) \qquad \rho = \lambda \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{Rr\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)}{R^2 - 2r^2}$$

en désignant par R le rayon de courbure OI du miroir (fig. 86),

calotte (*sommet* du miroir). Si l'on néglige ces aberrations, l'axe principal d'un miroir sphérique ne jouit d'aucune propriété que ne possède au même titre un autre axe quelconque ; c'est pour cela que jusqu'ici nous n'en avons pas parlé.

par r le rayon IH du cercle de base de la calotte sphérique et par α l'angle d'ouverture du miroir IOC (1).

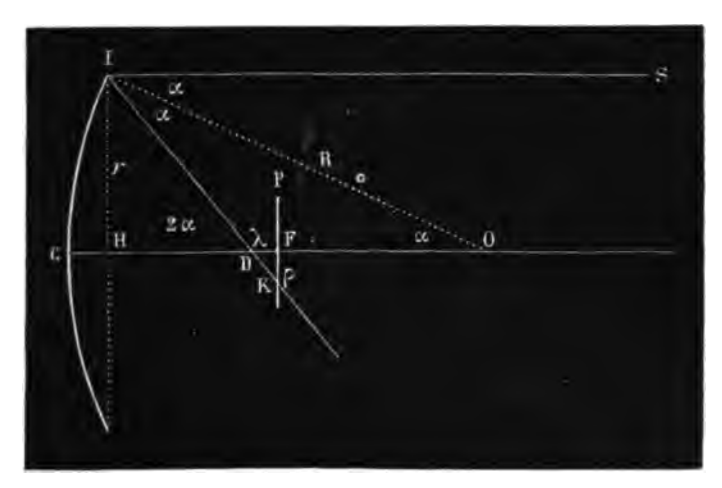


Fig. 86.

(1) Considérons, en effet, un rayon SI provenant d'un point A situé à l'infini sur l'axe principal OC : ce rayon est parallèle à OC. Le rayon réfléchi IDK, coupe en D l'axe principal et en K un plan P perpendiculaire à OC et passant par le foyer principal F, image du point A. On a ;

$$\lambda = \text{DF} \qquad \text{et} \qquad \rho = \text{FK}$$

Or, l'angle d'incidence SIO et, par conséquent, l'angle de réflexion OID sont égaux à α : le triangle IOD est donc isocèle, ce qui donne :

$$\text{(1)} \qquad \text{OD} \cos\alpha = \frac{\text{OI}}{2} = \frac{\text{R}}{2} \qquad \text{d'où :} \quad \text{OD} = \frac{\text{R}}{2}\frac{1}{\cos\alpha}$$

On a d'ailleurs :

$$\lambda = \text{OD} - \text{OF} = \frac{\text{R}}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

D'autre part, la considération du triangle rectangle DFK donne immédiatement :

$$\rho = \lambda \operatorname{tang} 2\alpha$$

Les lentilles plan convexes très minces étant fort employées dans les instruments d'optique, leur aberration mérite une mention spéciale. Le calcul montre qu'il existe sur l'axe principal deux points M et N situés du côté de la face plane, l'un un peu en deçà, l'autre un peu au delà du foyer, pour lesquels l'aberration est sensiblement nulle; c'est-à-dire que, si un point lumineux est placé en M ou en N, les rayons marginaux réfractés coupent l'axe au même point que les rayons centraux. Pour un point lumineux placé sur l'axe entre M et N, l'aberration longitudinale est positive, tandis qu'elle est négative si le point placé sur l'axe est en dehors du segment MN. L'expérience vérifie l'existence des points sans aberrations M et N : si l'on place en ces points un petit objet et qu'on en examine l'image réelle ou virtuelle donnée par la lentille, on la trouve aussi nette soit qu'on couvre les bords de la lentille pour ne conserver que les rayons centraux, soit qu'on couvre le centre pour ne conserver que les rayons marginaux, sans qu'il soit nécessaire de déplacer l'appareil optique qui sert à examiner l'image. Nous verrons plus loin une importante application de cette propriété.

Pour nous rendre compte de l'influence des aberrations sur la netteté des images, calculons la valeur de l'aberration transversale dans le cas d'un point A à l'infini placé sur l'axe principal d'un miroir concave sphérique de 2 mètres de rayon de courbure et de 10 centimètres de rayon de base. En faisant $R = 200^c$ et $r = 10^c$ dans la formule (2) on trouve $\rho = 0^c{,}0125$. Ainsi dans le plan focal, il se forme, non pas un point comme image du point A mais un petit disque lumineux ayant un peu plus de deux dixièmes de millimètre de diamètre. Si le point de l'infini est en dehors de l'axe principal, au lieu d'un disque on a dans

Du reste, le triangle rectangle IHO fait connaître les valeurs de α en fonction de r :

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} \qquad \text{d'où:} \qquad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \qquad \text{et} \quad \tan 2\alpha = \frac{2r\sqrt{R^2 - r^2}}{R^2 - 2r^2}$$

et, en substituant, on obtient les formules indiquées dans le texte.

le plan focal une tache lumineuse ovale, dont le plus grand diamètre est supérieur à celui du disque, et d'autant plus grand que l'axe du point A est plus incliné sur l'axe principal.

Il semble que ces aberrations soient assez fortes pour rendre l'image d'un objet confuse, les taches lumineuses correspondant aux points voisins empiétant les unes sur les autres, surtout si, comme dans les télescopes, l'image réelle que donne le miroir est grossie par un oculaire. Pourtant l'expérience prouve que, même dans ce cas, l'image n'est pas trop confuse. Cela tient à ce que le disque ou la tache ovale qui correspond à un point A de l'objet est très inégalement éclairé par ce point. Si l'on a bien disposé un écran au foyer conjugué A′ de A, la tache qui se peint sur celui-ci présente en ce point A′ (image donnée par les rayons centraux) un maximum de lumière très prononcé; en effet, ce point A′ est, comme nous le savons, un foyer dû à la rencontre des deux caustiques. Il en résulte que dans les conditions les plus ordinaires d'intensité relative des différents points d'un objet, la partie visible de la tache lumineuse qui correspond au point lumineux a un diamètre moindre que celui qui a été calculé ci-dessus.

5. **APLANÉTISME.** — Les aberrations de sphéricité sont un défaut pour la parfaite netteté des images. Aussi a-t-on cherché à les faire disparaître en donnant aux surfaces optiques une courbure convenable. Un système optique qui donne d'un point lumineux une image dépourvue d'aberrations de sphéricité est dit *aplanétique*. On ne peut réaliser l'aplanétisme rigoureux que pour un seul point lumineux; mais, quand l'image d'un objet n'est pas trop grande, si les aberrations sont rigoureusement nulles pour un de ses points, elles sont tellement faibles pour les autres que pratiquement l'image est parfaite.

On voit aisément quelle est la forme que doit avoir un miroir pour donner d'un point A placé à distance finie une image réelle dépourvue d'aberrations en un autre point donné A′ : c'est une portion d'ellipsoïde de révolution, ayant pour axe la droite AA′, et engendré par la rotation d'une ellipse dont A et A′ sont les deux foyers. En effet, considérons un rayon quelconque AI émis par le point A; prenons comme plan de la figure 87 le plan A′AI,

qui coupe suivant une section méridienne l'ellipsoïde; ce plan, contenant la normale IN au point I, est le plan d'incidence du rayon AI. Le rayon réfléchi IR est contenu dans ce plan; en outre, comme il forme avec la normale IN à l'ellipse un angle égal à celui que forme le rayon AI, ce rayon IR passe, comme on le sait, par le second foyer A' de l'ellipse.

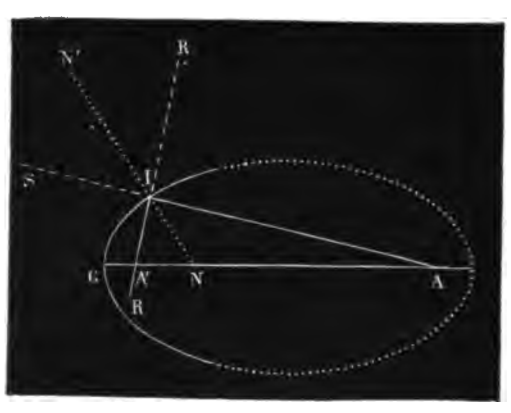


Fig. 87.

Nous venons de supposer que la réflexion se faisait sur le côté concave de l'ellipsoïde. On voit tout de suite que des rayons, tels que SI, qui se dirigeraient vers le point objet-virtuel A et se réfléchiraient sur le côté convexe de l'ellipsoïde, donneraient une image virtuelle A' sans aberrations.

Le même raisonnement fait voir qu'un miroir formé par une portion d'un hyperboloïde de révolution autour de l'axe des foyers, donne d'un point A situé à l'un des foyers une image A' située à l'autre foyer et qui est dépourvue d'aberrations (fig. 88). Si la réflexion se fait du côté concave, un point-objet réel placé au foyer A correspondant à la nappe qui forme le miroir donne une image virtuelle placée à l'autre foyer A'. Réciproquement, un objet virtuel placé au foyer A' donne une image réelle en A.

Si la réflexion se fait du côté convexe, on peut obtenir d'un objet réel placé en A' une image virtuelle placée en A, et, réciproquement, d'un objet virtuel placé en A une image réelle placée en A'.

Ainsi, pour obtenir d'un point réel une image sans aberrations, il faut employer un miroir concave elliptique, si l'on désire avoir une image réelle, ou un miroir concave hyperbolique,

si l'on désire une image virtuelle. Plus l'image réelle ou virtuelle doit être éloignée plus les foyers doivent être écartés, et, à la limite, si l'image doit se former à l'infini, il faut un miroir elliptique ou hyperbolique dont un des foyers est à l'infini, c'est-à-dire un miroir parabolique.

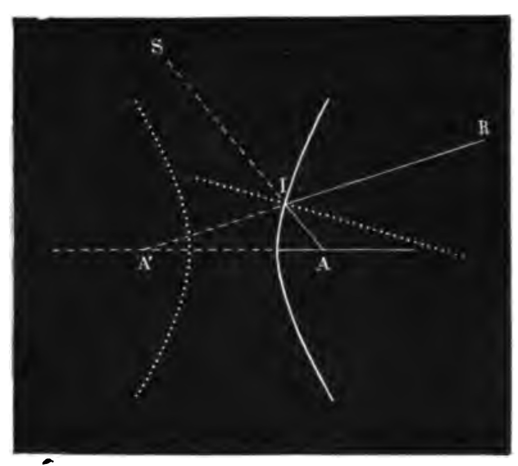


Fig. 68.

Réciproquement, un miroir parabolique concave donne d'un point à l'infini situé sur l'axe de révolution une image réelle sans aberrations placée à son foyer.

Du reste, si l'on néglige les aberrations, comme nous l'avons fait en traitant des miroirs sphériques au chapitre II, les formules fondamentales

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f} \quad \text{et} \quad \frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$$

trouvées dans ce chapitre sont applicables à tous ces miroirs quelle que soit la position d'un point lumineux situé sur l'axe principal (axe de révolution) ou situé en dehors de cet axe mais dans son voisinage; il suffit pour s'en convaincre de considérer les rayons centraux, ceux qui tombent vers le sommet du miroir. En effet, au point où l'axe de révolution rencontre la surface du miroir (*sommet*), il existe une sphère osculatrice à la surface; des rayons qui tombent en des points infiniment voisins du sommet se réfléchissent comme si le miroir était formé par la sphère osculatrice. Cette sphère a son centre sur l'axe à une

certaine distance, dont la moitié est la distance focale f de ce miroir; par conséquent, pour ces rayons les formules ci-dessus sont applicables et, aux aberrations près, chacun de ces miroirs jouit des mêmes propriétés qu'un miroir sphérique.

Les miroirs des télescopes employés aujourd'hui sont paraboliques. Un miroir parabolique ne diffère, du reste, d'un miroir sphérique de même diamètre, de même distance focale et dont le sommet occupe la même position qu'en ce que les bords sont reculés d'une quantité extrêmement faible. Ainsi, même en prenant comme exemple un grand miroir de 80 centimètres de diamètre et de 5 mètres de distance focale, pour amener celui-ci de la forme sphérique à la forme parabolique, il faut enlever sur les bords une couche de matière dont l'épaisseur n'atteint que 32 dix-millièmes de millimètre (3,2 microns) [1]. Une quantité

(1) Soient, en effet,

$$y^2 = 4fx \qquad \text{et} \qquad (X - 2f)^2 + Y^2 = 4f^2$$

les équations d'une parabole et d'un cercle qui lui est osculateur en son sommet, puisque le centre de ce cercle est sur l'axe de la parabole à une distance du sommet égale au double de la distance focale f. En tournant autour de l'axe, ces courbes engendrent les surfaces des miroirs paraboliques et sphériques remplissant les conditions indiquées plus haut. Or, pour $Y = y$ (demi-diamètre du miroir), on tire des formules ci-dessus :

$$x = \frac{y^2}{4f} \qquad \text{et} \qquad X = 2f - \sqrt{4f^2 - y^2}$$

d'où :

$$X - x = 2f - \sqrt{4f^2 - y^2} - \frac{y^2}{4f} = \frac{(2f - \sqrt{4f^2 - y^2})^2}{4f} = f\left(1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{4f^2}}\right)^2$$

On voit que X est plus grand que x ; par conséquent les bords du miroir sphérique sont en avant des bords du miroir parabolique. Comme la quantité $\frac{y^2}{4f^2}$ est très petite, on peut, dans le développement de la racine carrée, négliger les puissances supérieures à la première, ce qui donne

$$X - x = \frac{y^4}{64f^3}$$

pour $2y = 80$ cent. et $f = 500$ cent., il vient :

$$X - x = 0{,}00032 \text{ cent.}$$

de matière aussi faible est de l'ordre de celles qu'on enlève par le polissage. Or les miroirs en métal se ternissent en s'oxydant ou se sulfurant à l'air; il faut de temps en temps les repolir et l'on a dès lors à refaire tout le travail extrêmement laborieux qui est nécessaire pour avoir un miroir aplanétique.

Foucault a eu, en 1857, l'heureuse idée d'utiliser pour la construction des miroirs, un procédé d'argenture sur verre découvert par Steinheil de Munich, et retrouvé par Drayton (1). Les miroirs de Foucault sont en verre; quand on leur a donné la forme parabolique on les argente à la surface: la couche d'argent déposée est tellement mince et d'une épaisseur si égale que la forme parabolique est parfaitement conservée après l'argenture. L'argent réfléchit une plus grande quantité de lumière que le bronze des miroirs employé autrefois; mais le plus grand avantage que présentent ces miroirs est que, quand la couche d'argent s'est ternie par sulfuration, il suffit de la dissoudre avec de l'acide azotique, ou simplement de l'enlever avec un linge un peu rude, et d'argenter à nouveau le miroir, sans avoir à retoucher à sa forme qui n'est pas altérée par ces opérations.

En outre, Foucault a indiqué aux opticiens un procédé sûr pour donner aux miroirs la forme parabolique, ce qui a rendu tout à fait pratique la construction des miroirs aplanétiques, si difficile à obtenir autrefois (2).

(1) Ce procédé d'argenture du verre est fondé sur la réduction de l'azotate d'argent par le sucre interverti; il a été successivement perfectionné par Foucault et par M. Martin.

(2) Pour s'assurer de l'aplanétisme et reconnaître les imperfections d'un miroir, Foucault a indiqué trois méthodes différentes (*Annales de l'Observatoire de Paris*, T. V, p. 197); nous n'en décrirons qu'une, la plus sensible et celle qu'il a toujours employée, du reste.

On place devant le miroir un point très lumineux, obtenu en faisant converger sur un trou très petit A, pratiqué dans un écran, les rayons d'une lampe. Le miroir donne une image de ce point A au foyer conjugué A'. Si le miroir est aplanétique pour la position du point A, l'image A' par suite des phénomènes de *diffraction*, est non un point, mais un petit disque brillant. Si l'on place l'œil derrière le disque A' de façon à y recevoir la lumière réfléchie par le miroir, celui-ci apparaît avec un éclat uniforme. Or, chaque point du disque A' reçoit de la lumière de tous les points du miroir, et presque toute la lumière renvoyée par celui-ci passe par ce disque. Si l'on place alors au devant de l'œil, et dans le plan du disque, un écran E, dont le bord

On peut trouver aussi quelle doit être l'équation d'une surface réfringente pour obtenir d'un point une image sans aberrations; mais la difficulté de réaliser ces surfaces a fait renoncer à les employer dans la construction des lentilles.

rectiligne coupe une partie du disque, la lumière provenant de chaque point du miroir et reçue par l'œil sera affaiblie dans le même rapport : le miroir paraîtra encore uniformément éclairé, mais avec une intensité d'autant plus faible que l'écran E masque une plus grande partie du disque A'.

Si, au contraire, le miroir n'est pas aplanétique pour la position du point A, la présence de l'écran E au devant de l'œil diminue dans des proportions différentes la lumière provenant des diverses régions du miroir : l'éclat de celui-ci n'est plus uniforme ; les parties qui sont en saillies sur la surface idéale qui donnerait une image sans aberrations de sphéricité, apparaissent comme si elles avaient un relief exagéré et qu'elles fussent éclairées obliquement par une lumière placée du côté opposé à l'écran E.

Les moindres défauts de la surface réfléchissante sont ainsi rendus apparents.

Foucault corrige ces défauts par un procédé de *retouches locales* : à l'aide d'un polissoir, il fait disparaître les saillies jusqu'à ce que le miroir paraisse d'un éclat uniforme.

Les miroirs, tels qu'ils sortent des mains des constructeurs, sont à peu près sphériques ; car on les obtient par l'usure du verre sur un bassin sphérique, en interposant entre les surfaces un peu d'émeri.

Pour s'assurer de la parfaite sphéricité, ou la corriger par le procédé des retouches locales, Foucault se sert de la propriété que possède un miroir sphérique d'être aplanétique pour un point placé au centre de courbure O : il place le point lumineux A très près de celui-ci, et l'écran E au foyer conjugué A', qui est très près aussi du centre O.

Le miroir étant rendu parfaitement sphérique, on rapproche un peu de celui-ci le point A le foyer conjugué A' s'écarte, et le miroir n'est plus aplanétique pour cette nouvelle position de A. On corrige par le procédé des retouches locales le défaut d'aplanétisme, ce qui rend le miroir elliptique, avec A et A' pour foyers. On approche de nouveau le point A, et ainsi progressivement on transforme le miroir en un miroir elliptique dont les foyers sont de plus en plus éloignés l'un de l'autre. Quand on a écarté autant les deux foyers que le permet la longueur de l'atelier (15 ou 20 mètres) le miroir est bien près de la forme parabolique. Pour effectuer la légère retouche qui l'amènera exactement à cette forme, Foucault s'est fondé sur le fait suivant : quand, à partir du point A pour lequel le miroir est aplanétique, on recule d'une très petite quantité a le point lumineux, le miroir, examiné à l'aide de l'écran E, prend le même aspect de creux et de reliefs pour deux formes très voisines de ce miroir, si a possède la même valeur dans les deux cas. Quand le miroir a été rendu un ellipsoïde de révolution à foyers A et A' très écartés, on mesure les distances a de A au foyer

Du reste, on arrive à un aplanétisme approché par un autre procédé. La formule

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$

montre que, quand on s'est fixée la distance focale f, on peut établir encore une autre relation entre les deux rayons de courbure R et R′ des faces de la lentille. Le calcul permet de trouver la relation qui donne à la lentille un minimum d'aberration. Ainsi, dans le cas où l'objet dont on veut obtenir une image réelle est à l'infini (cas d'un objectif de lunette), la lentille qui donne le minimum d'aberration est biconvexe, le rayon de courbure de l'une des faces ayant six fois la valeur de celui de l'autre face, et la face la plus bombée étant tournée vers l'objet.

On voit qu'une lentille plan-convexe dont la face convexe est tournée vers l'objet lointain n'est pas très loin de réaliser la forme précédente; l'aberration longitudinale qu'elle donne n'est que d'un dixième plus considérable. Ainsi on obtient les meilleures images, dans l'emploi des lentilles plan-convexes, en tournant la face bombée vers l'objet quand celui-ci est à une distance notablement supérieure à la distance focale. Nous avons vu au paragraphe précédent, qu'au contraire, si l'objet est à une distance un peu supérieure ou un peu inférieure à la distance focale il y a avantage, au point de vue des aberrations, à tourner vers l'objet la face plane.

6. COURBURE DE L'IMAGE D'UN OBJET PLAN. — Nous savons que l'image d'un objet plan se forme dans un plan parallèle

principal F du miroir, qui est situé un peu plus près de celui-ci que le point A. On recule alors le point lumineux, qui était en A, de la quantité *a* et l'on examine l'aspect de creux et de reliefs que présente le miroir. On ramène ensuite le point lumineux en A et, par le procédé des retouches locales, on donne au miroir l'apparence de creux et de reliefs qu'on vient d'observer, ce qui le rend exactement parabolique.

On s'assure de la perfection du travail final en montant le miroir dans le tube d'un télescope et se servant de celui-ci pour viser une règle très éloignée à divisions rapprochées. On obtient ainsi le *pouvoir définissant* du télescope dont fera partie le miroir concave.

quand l'objet s'écarte très peu d'un axe qui lui est perpendiculaire, cet axe devant, en outre, dans le cas des lentilles, être confondu, ou à peu près, avec l'axe principal.

Lorsqu'il n'en est pas ainsi, un miroir sphérique ou un système de surfaces réfringentes sphériques centrées peut encore donner des points qui s'écartent notablement de l'axe une image assez nette si, par un diaphragme ou par suite de la petitesse du diamètre des lentilles, il n'y a qu'un faisceau de rayons voisins qui concourent à la formation de l'image de chaque point. Mais alors,

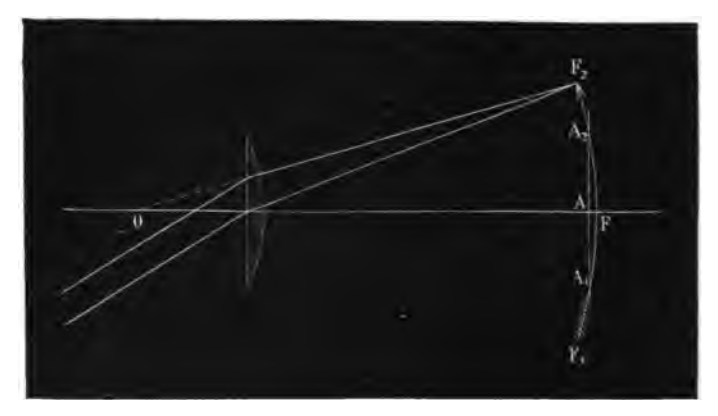


Fig. 89.

en général, les images des divers points de l'objet plan ne sont pas dans un même plan : l'image est courbe.

Il y a donc là un nouveau genre d'*aberration*, c'est-à-dire une nouvelle cause de déformation des images, dont il est nécessaire de tenir compte pour la construction des instruments d'optique.

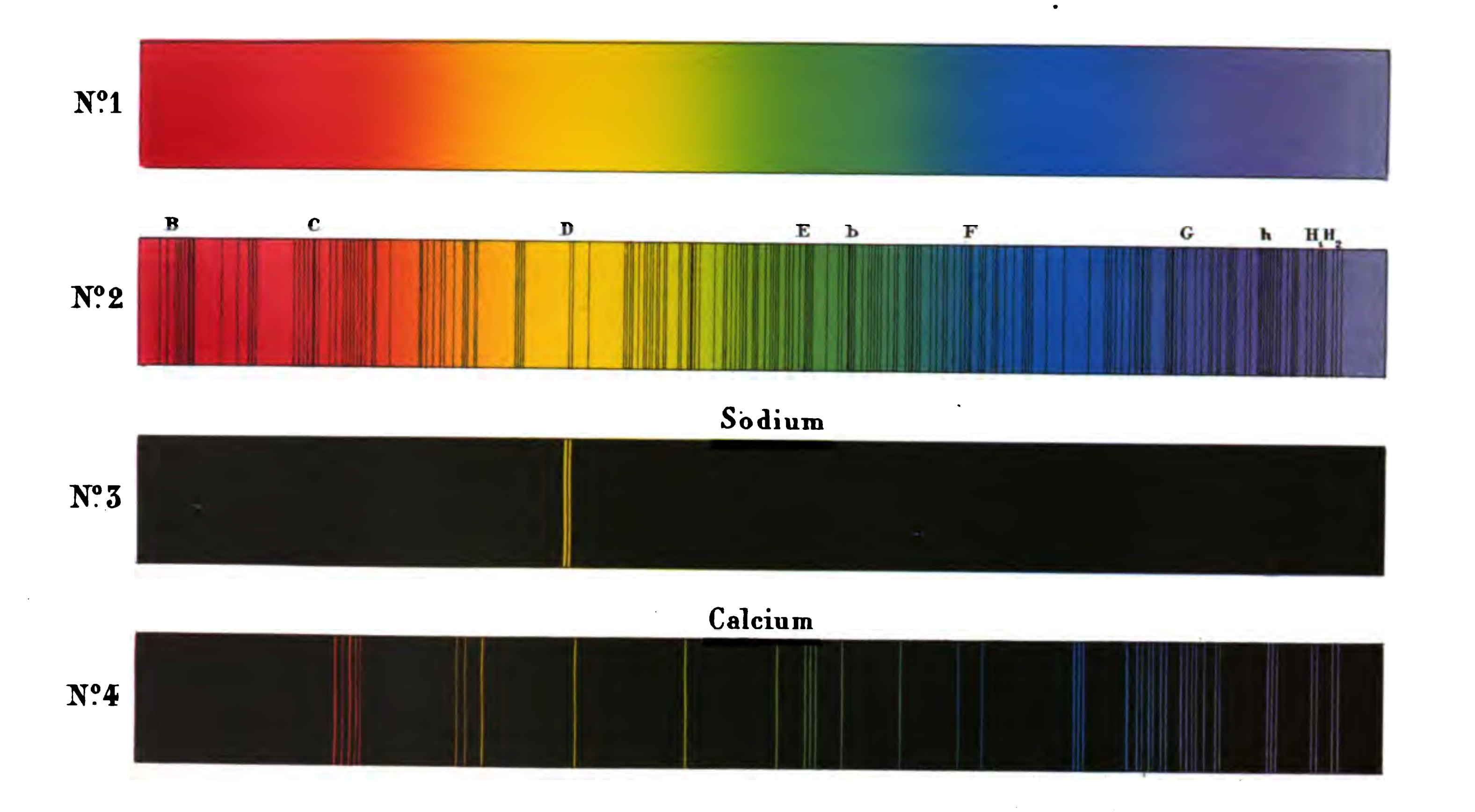
Dans le cas d'un miroir ou d'une seule surface réfringente sphérique, les lois que nous avons établies permettent immédiatement de voir dans quel sens l'image sera courbée. Dans le cas d'une lentille ou de plusieurs surfaces sphériques centrées, on arrive aussi à ce résultat en examinant la forme des images fournies successivement par les surfaces réfringentes, l'image

donnée par un certain nombre de surfaces servant d'objet par rapport à la surface suivante.

Dans quelques cas le problème est très simple. Par exemple, considérons une lentille plan-convexe (fig. 89); un point situé à l'infini du côté de la face plane envoie sur la lentille un faisceau de rayons parallèles qui, après avoir traversé cette face plane, restent parallèles entre eux et vont, par conséquent, concourir sensiblement en un point de la sphère focale correspondant à la seconde face, après avoir traversé celle-ci. Les images des points d'un objet placé à l'infini sont donc situées sur une sphère F_1FF_2 concentrique à la seconde face de la lentille et passant par le second foyer F de celle-ci.

Réciproquement, supposons un objet placé suivant F_1FF_2 et regardé du côté de la face plane par un œil disposé pour voir à l'infini; celui-ci en verra une image virtuelle plane à l'infini. Si le même œil regarde à travers la lentille un objet plan A_1AA_2 coupant l'axe en un point A placé un peu en avant de F et coupant en A_1 et A_2 la sphère focale F_1FF_2, les images A'_1 et A'_2 des points A_1 et A_2 se formeront à l'infini, tandis que l'image virtuelle A' du point A se formera à distance finie. L'image virtuelle $A'_1A'A'_2$ de l'objet plan sera donc courbe et tournera sa convexité du côté de la lentille.

Ces remarques trouveront leur application plus loin.



Nº1
Nº2
B
C
D
E
b
F
G
h
H_1 H_2
Sodium
Nº3
Calcium
Nº4

La lumière blanche est due à la superposition d'une infinité de lumières simples diversement colorées et possédant chacune un indice de réfraction différent.

S'il en est ainsi, on voit bien que les diverses lumières colorées qui composent le blanc, subissant une déviation différente par le prisme, se trouveront séparées à leur sortie.

Newton a démontré, de la façon la plus nette, la justesse de cette explication. Nous allons reproduire ses principales expériences et prouver :

1° Que les couleurs du spectre sont simples, c'est-à-dire ne s'étalent pas en un nouveau spectre lorsqu'on les fait tomber à la surface d'un prisme ;

2° Qu'elles possèdent des indices de réfraction différents;

3° Que la réunion de toutes les couleurs du spectre produit sur l'œil l'effet du blanc.



3. **LES COULEURS DU SPECTRE SONT SIMPLES.** — Faisons tomber

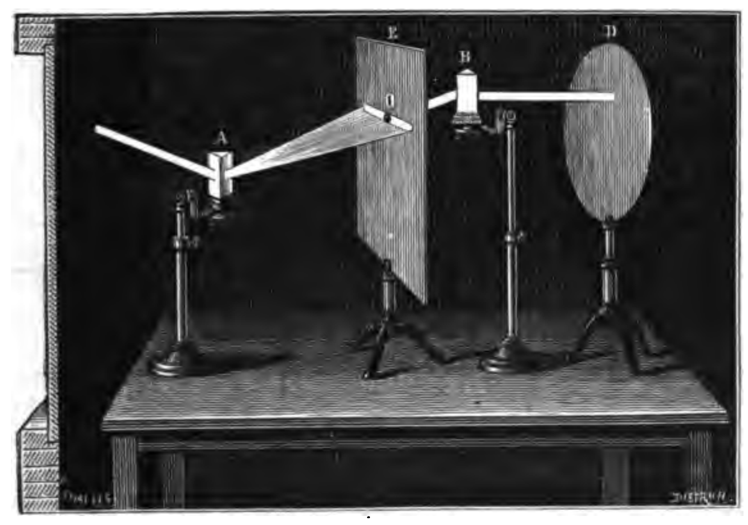


FIG. 90.

sur un écran opaque E (fig. 90) un spectre obtenu en recevant sur un prisme A un faisceau de lumière blanche.

Pratiquons une ouverture O dans l'écran E, de façon à laisser passer une petite portion du spectre qui nous paraisse sensiblement de même teinte dans toute son étendue, le rouge par exemple, et faisons tomber ce faisceau coloré sur un second prisme B. Nous constaterons, en le recevant sur un écran blanc D, qu'il est dévié par le prisme B *sans être dispersé*, c'est-à-dire sans s'étaler et sans donner naissance à d'autres couleurs.

4. LES DIVERSES COULEURS DU SPECTRE ONT DES INDICES DE RÉFRACTION DIFFÉRENTS. — Reprenons exactement la même disposition expérimentale que dans le cas précédent. En faisant tourner autour de son arête le premier prisme A, qui reçoit le faisceau de lumière blanche, on peut faire tomber sur l'ouverture O les diverses parties du spectre. Tous les faisceaux diversement colorés qui rencontrent successivement le second prisme, qu'on laisse immobile, tombent sur sa face d'entrée en faisant le même angle d'incidence. Or, on constate que les faisceaux diversement colorés sont inégalement déviés par le second prisme : la déviation va en croissant quand on passe du rouge au violet. Ceci indique bien que l'indice de réfraction des diverses couleurs du spectre va en croissant du rouge au violet (voir Chap. III § 7 les formules du prisme).

On peut, du reste, modifier de beaucoup de manières cette expérience fondamentale. En voici, par exemple, une autre forme. On supprime l'écran et l'on place derrière le premier prisme A, dont nous supposerons l'arête verticale, un second prisme B dont l'arête est horizontale et qui reçoit le faisceau dévié et dispersé par le premier prisme (fig. 91). En faisant tomber sur le premier prisme un faisceau de lumière blanche horizontal, on obtiendrait sur un écran blanc vertical E un spectre horizontal R'V', si le second prisme n'existait pas. Mais le second prisme déviant dans le sens vertical les diverses couleurs de ce premier spectre, et les déviant de quantités inégales, il en résulte un spectre oblique RV. Ce fut là une des premières expériences de Newton.

5. LA SUPERPOSITION DES DIVERSES COULEURS DU SPECTRE REPRODUIT LA LUMIÈRE BLANCHE. — Il reste à établir que le mélange

des diverses couleurs simples qui constituent le spectre produit bien sur l'œil l'effet du blanc.

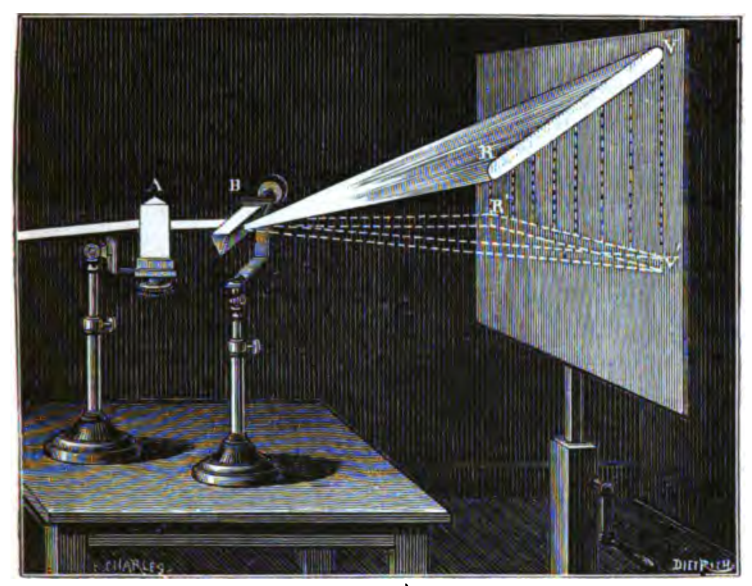


Fig. 91.

Newton a beaucoup varié les expériences qu'il a faites à ce sujet. Dans l'une d'elles, il a mélangé des poudres colorées à peu près de la teinte des couleurs principales du spectre. Après quelques tâtonnements, il est arrivé à produire par leur mélange une poudre grise. Or, le gris diffère du blanc par un moindre éclat. En éclairant par un rayon de soleil une couche de cette poudre grise, elle paraissait aussi blanche qu'une feuille de papier placée à l'ombre.

On conçoit que ce procédé n'est pas parfait, les nuances des poudres colorées ne pouvant être identiques aux couleurs mêmes du spectre [1].

(1) On peut adresser le même reproche à l'expérience du disque rotatif, si souvent répétée dans les cours, et qui a été imaginée par le physicien hollandais Mussenbroeck vers 1762, et non par Newton, auquel on l'attribue habituellement. Sur le pourtour d'un disque on colle des secteurs en papiers

Newton est arrivé à un meilleur résultat en mélangeant les couleurs mêmes du spectre. Il a employé pour cela plusieurs procédés.

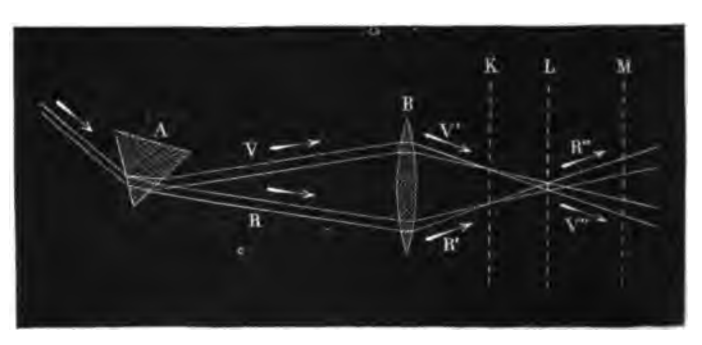


FIG. 92.

Une de ses premières expériences, la plus parfaite peut-être, consiste à faire tomber le spectre fourni par un prisme A (fig. 92) sur la surface d'une lentille convergente B placée à une distance du prisme supérieure à sa distance focale. En recevant sur une feuille de papier blanc les rayons réfractés, ceux-ci y forment un spectre nuancé, quand la feuille de papier est en K près de la lentille; mais, en écartant le papier, on voit les diverses couleurs se rapprocher puis se confondre, et l'on trouve une position L telle que toutes les couleurs sont confondues : la tache lumineuse est alors d'un blanc parfait. Si l'on continue à écarter la feuille (M), les couleurs se séparent de nouveau, et forment un spectre dans lequel les teintes sont disposées dans un ordre inverse, par rapport au premier spectre. Il est aisé de voir, du

de nuances aussi voisines que possible des sept couleurs principales du spectre. En faisant tourner rapidement le disque, il paraît gris. Or, on sait que l'impression produite sur l'œil dure quelques instants après que la cause qui lui a donné naissance a cessé d'agir; il en résulte que, si le disque tourne assez vite, un point de la rétine conserve à la fois l'impression de toutes les couleurs du disque : le mélange des sensations colorées donne la sensation du gris.

reste, que c'est à l'endroit où les faisceaux colorés s'entrecroisent que se trouve l'image du prisme donné par la lentille. En effet, tous les rayons qui sont émis par un point A du prisme, quelle que soit leur couleur, vont, après réfraction, concourir au point A' image du point A; en ce point A' les diverses couleurs du spectre doivent donc se trouver confondues comme elles le sont dans le prisme même [1].

Dans cette expérience, on obtient une tache colorée en masquant par un écran opaque (une lame de carton par exemple) quelques-unes des couleurs qui tombent sur la lentille : les couleurs conservées donnent une image du prisme ayant une teinte qui varie suivant la nature des couleurs interceptées.

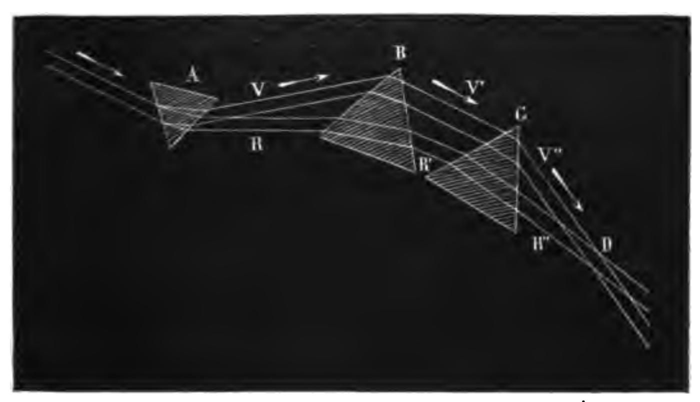


Fig. 93.

Newton indique que, dans l'expérience précédente, on peut remplacer la lentille par un système de deux prismes B et C (fig. 93), réfractant et dispersant en sens inverse le faisceau réfracté et dispersé par un prisme A. La dispersion produite par l'en-

(1) On peut, tout aussi bien, remplacer dans cette expérience la lentille convergente par un miroir concave; il est même plus commode, dans un cours, d'employer un miroir parce que sa surface étant, en général, plus considérable que celle d'une lentille, on peut donner au spectre une plus grande étendue.

quand l'objet s'écarte très peu d'un axe qui lui est perpendiculaire, cet axe devant, en outre, dans le cas des lentilles, être confondu, ou à peu près, avec l'axe principal.

Lorsqu'il n'en est pas ainsi, un miroir sphérique ou un système de surfaces réfringentes sphériques centrées peut encore donner des points qui s'écartent notablement de l'axe une image assez nette si, par un diaphragme ou par suite de la petitesse du diamètre des lentilles, il n'y a qu'un faisceau de rayons voisins qui concourent à la formation de l'image de chaque point. Mais alors,

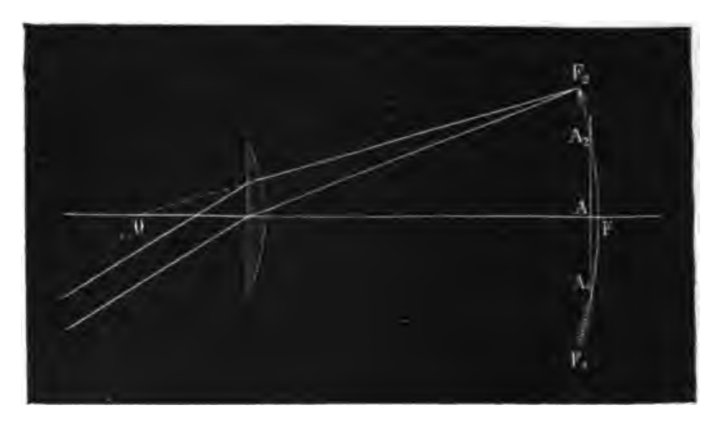


Fig. 89.

en général, les images des divers points de l'objet plan ne sont pas dans un même plan : l'image est courbe.

Il y a donc là un nouveau genre d'*aberration*, c'est-à-dire une nouvelle cause de déformation des images, dont il est nécessaire de tenir compte pour la construction des instruments d'optique.

Dans le cas d'un miroir ou d'une seule surface réfringente sphérique, les lois que nous avons établies permettent immédiatement de voir dans quel sens l'image sera courbée. Dans le cas d'une lentille ou de plusieurs surfaces sphériques centrées, on arrive aussi à ce résultat en examinant la forme des images fournies successivement par les surfaces réfringentes, l'image

riences précédentes, en supprimant quelques-unes des couleurs du spectre *vr* par un écran noir mat, la tache *b* paraît coloree.

6. COULEURS COMPLÉMENTAIRES. — Supposons qu'on supprime plusieurs des couleurs du spectre de la lumière blanche; les couleurs conservées forment par leur mélange une certaine teinte colorée A. Les couleurs supprimées formeraient par leur mélange une autre teinte colorée B. Il est clair que le mélange de la teinte A et de la teinte B doit donner du blanc, puisque l'ensemble de ces deux teintes comprend toutes les couleurs du spectre. D'une façon générale, on désigne sous le nom de *couleurs complémentaires* deux teintes dont le mélange donne du blanc.

Si l'on supprime le rouge du spectre, l'ensemble des autres couleurs donne du vert, et, réciproquement, si l'on supprime le vert, l'ensemble des autres couleurs donne du rouge : le rouge est complémentaire du vert. Si l'on supprime le jaune du spectre l'ensemble des autres couleurs donne du bleu; inversement, si l'on supprime le bleu, l'ensemble des autres couleurs donne du jaune : le jaune et le bleu sont complémentaires.

7. DE LA COLORATION DES OBJETS. — DIFFUSION. — Nous appelons en général *couleur d'un objet* la couleur que présente cet objet quand il est eclairé par de la lumière blanche, la lumière du jour par exemple. Mais la couleur d'un même objet dépend essentiellement de la nature de la lumière qui le frappe. Ainsi, formons un spectre lumineux à l'intérieur d'une pièce qui ne reçoit pas d'autre lumière que celle qui traverse le prisme; faisons tomber le spectre sur un objet quelconque dépourvu de poli spéculaire; nous constaterons que l'objet ne renvoie à l'œil que la couleur simple du spectre qui le frappe, de façon que chaque partie de l'objet paraît de la couleur du spectre qui l'éclaire.

En faisant cette expérience, nous verrons que si l'objet n'est pas blanc à la lumière du jour, il renvoie inégalement à l'œil les diverses couleurs simples du spectre. Ainsi une étoffe rouge, tendue dans le spectre, paraît fortement éclairée dans la partie rouge, plus faiblement dans la partie jaune, et paraît tout à fait noire dans le vert et le bleu : elle *absorbe* les rayons verts et bleus, et ne les *diffuse* pas. On conçoit, dès lors, pourquoi, vue à

la lumière du jour, l'étoffe paraît rouge : elle renvoie à l'œil le rouge qui compose la lumière blanche en plus grande quantité que les autres couleurs simples. Ainsi s'expliquent toutes les colorations que peuvent avoir les objets qui diffusent la lumière. Les objets blancs sont ceux qui diffusent également toutes les couleurs simples du spectre; les objets noirs ceux qui, absorbant toutes les couleurs, n'en renvoient aucune à l'œil, et produisent sur lui le même effet que l'obscurité.

Les corps transparents qui nous paraissent incolores, comme le verre ordinaire, sont ceux qui laissent passer en quantités égales toutes les couleurs du spectre; les corps transparents qui nous paraissent colorés, sont ceux qui sont opaques pour certaines couleurs simples, et transparents pour d'autres, ou, d'une façon plus générale, qui transmettent en proportion inégale les diverses couleurs. Ainsi, quand on place sur le trajet d'un faisceau de lumière blanche, tombant sur un prisme, un verre coloré en rouge par de l'oxydule de cuivre, le spectre se réduit à peu près à la partie rouge, les autres couleurs étant arrêtées.

8. POUVOIR DISPERSIF. — La différence des indices des deux couleurs extrêmes du spectre varie d'une substance à une autre. Ainsi le verre d'optique à base de plomb (*flint glass*) présente une différence entre ces deux indices bien supérieure à celle que présente le verre à base de chaux (*crown glass*).

On appelle *pouvoir dispersif* d'une substance le rapport $\frac{n_2 - n_1}{n - 1}$ de la différence $n_2 - n_1$ des indices de réfraction pour les deux couleurs extrêmes du spectre à l'excès de l'indice de réfraction n de la couleur moyenne sur l'unité [1].

(1) On définit souvent le pouvoir dispersif d'une substance comme le rapport $\frac{d_2 - d_1}{d}$ de la différence des déviations d_2 et d_1 des couleurs extrêmes, données par un prisme formé de cette substance, à la déviation d de la couleur moyenne. Défini ainsi, le pouvoir dispersif dépend un peu de l'angle du prisme employé et de l'incidence : ce n'est donc pas une véritable caractéristique de la substance. Pourtant, si le prisme employé est d'un petit angle a, et si les rayons tombent sous une incidence voisine de la nor-

Nous donnerons plus loin (Chap. VIII § 10) un tableau des pouvoirs dispersifs des substances les plus importantes.

9. SPECTRE PUR. — Supposons qu'un point lumineux A (fig. 95) émette une lumière *monochromatique*, c'est-à-dire une lumière simple indécomposable par le prisme. Formons, au moyen d'une

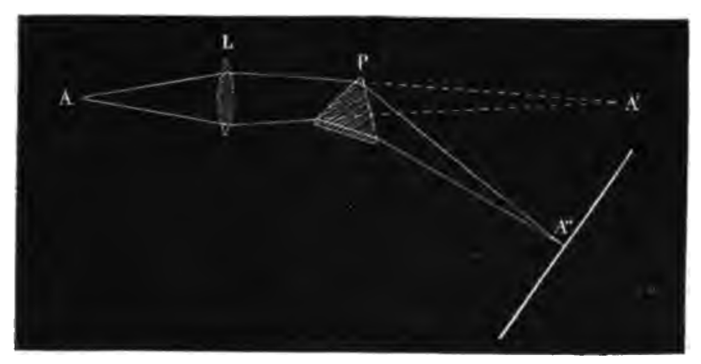


Fig. 95.

lentille convergente L, une image réelle A' du point A. Si sur le trajet du faisceau qui a traversé la lentille nous disposons un prisme, les rayons sont déviés et donnent de A' qui fonctionne par rapport au prisme comme un point-objet virtuel une image réelle nette, *si le prisme est au minimum de déviation.* Pour toute autre position du prisme, l'image de A' est remplacée par deux lignes focales, ce qui empêche d'obtenir une image nette de A sur l'écran qui reçoit le faisceau dévié. Dans ce qui va

male, on a, comme nous l'avons vu (Chap. III § 7 form. 5): $d = (n-1)a$; d'où :

$$\frac{d_2 - d_1}{d} = \frac{n_2 - n_1}{n - 1}$$

La définition du pouvoir dispersif fondée sur les déviations devient identique, dans ce cas, à la définition donnée dans le texte, qui est évidemment préférable.

suivre nous supposerons le prisme placé au minimum de déviation.

Si, maintenant, nous prenons comme objet lumineux une fente parallèle à l'arête du prisme et éclairée par derrière à l'aide d'une lumière monochromatique, nous pourrons obtenir sur un écran convenablement placé une image nette de cette fente; cette image sera d'autant plus étroite que la fente elle-même sera plus étroite.

La position de l'image de la fente sur l'écran dépend de l'indice de réfraction de la lumière monochromatique qui éclaire la fente, et elle est d'autant plus rejetée du côté de la base du prisme que cet indice de réfraction est plus grand.

Si la fente est éclairée à la fois par plusieurs lumières monochromatiques différentes, il se formera sur l'écran autant d'images de la fente qu'il y a de couleurs simples dans la lumière qui l'éclaire, puisque ces couleurs ont des indices de réfraction différents. La lumière qui éclaire la fente est ainsi *analysée* par le prisme, qui en donne un spectre; ce spectre est discontinu, les images brillantes de la fente étant séparées par des espaces obscurs.

Si les couleurs sont très nombreuses et d'indices très voisins, il faut, pour que le spectre soit pur, c'est-à-dire pour que les diverses couleurs n'empiètent pas les unes sur les autres que la fente soit très étroite, afin que ses images dans les différentes couleurs le soient aussi.

Quand les couleurs sont en nombre infini, les indices de ces couleurs variant par degrés continus, comme cela a lieu lorsque la fente est éclairée par la lumière blanche, si étroite que soit cette fente, ses images dans les couleurs successives empiètent forcément les unes sur les autres et l'on a un spectre continu. Mais, encore dans ce cas, le spectre est d'autant plus pur que la fente est plus étroite et que l'écran est mieux au point. On s'aperçoit que l'écran est bien au point par la netteté des bords inférieurs et supérieurs du spectre (fig. 96).

Si, dans le spectre pur d'une lumière, on trouve des lignes sombres parallèles à l'arête du prisme, cela indique que la couleur qui donnerait une image de la fente à l'endroit où se forme la raie sombre manque dans la lumière analysée, ou, tout au

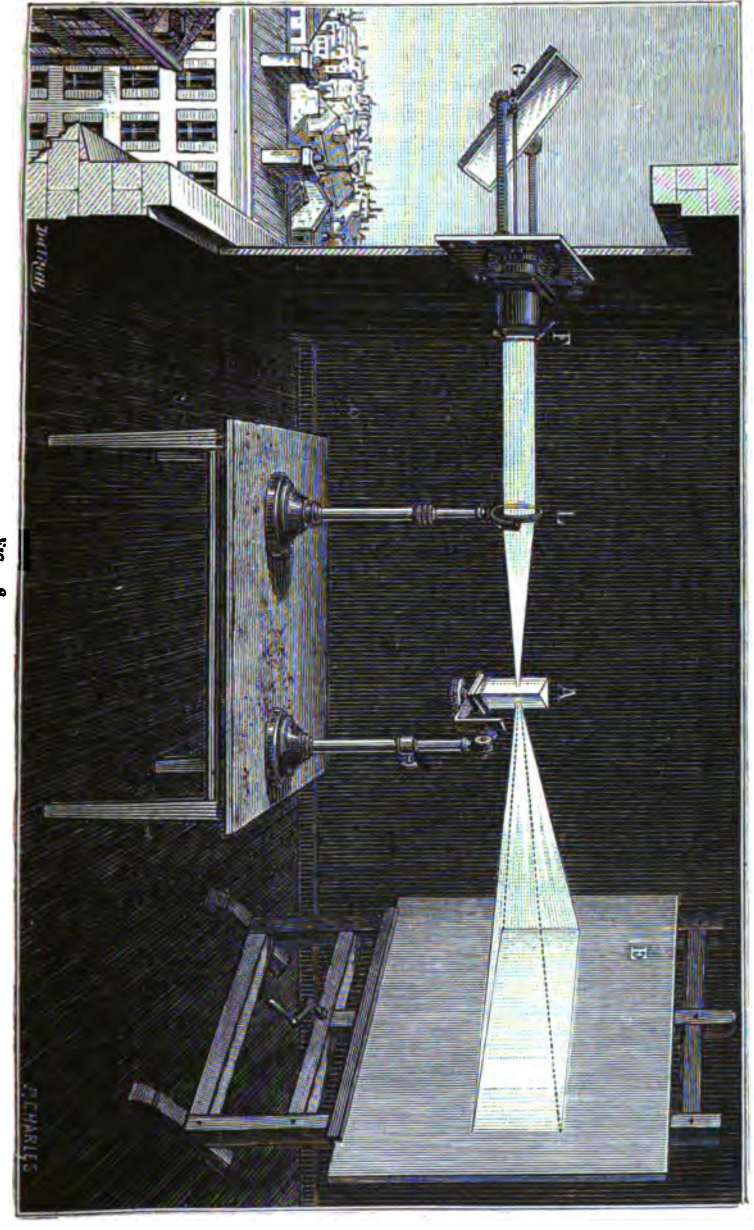


Fig. 6.

moins, est d'une intensité plus faible (1). Ainsi, en analysant la lumière solaire par le prisme, on voit de nombreuses raies de ce genre, dont les positions relatives sont parfaitement fixes (planche 1 n° 2). Nous ferons plus loin l'étude des raies du spectre solaire (2).

La longueur du spectre du rouge au violet dépend de plusieurs causes. Evidemment cette longueur est d'autant plus grande que l'écran est plus loin du prisme. Elle dépend aussi du pouvoir dispersif de la substance qui forme le prisme et de la valeur de son angle. Enfin elle dépend de l'incidence des rayons sur la face d'entrée du prisme. Quand l'incidence est presque rasante, le spectre est court; en faisant tourner le prisme autour de son arête, afin de rendre l'incidence moins oblique et de s'approcher du minimum de déviation, on voit le spectre s'étaler davantage. Il continue à s'étaler, si l'on dépasse la position du minimum de déviation, et devient très long au moment où, la réflexion totale se produisant sur la seconde face du prisme, le spectre s'évanouit. Nous ferons remarquer, à ce propos, que le violet ayant l'indice de réfraction le plus grand est la première couleur qui disparaît du spectre en subissant la réflexion totale; le rouge est la dernière.

10. **SPECTRE VIRTUEL.** — Si l'on regarde à travers un prisme P (fig. 97) une fente lumineuse F parallèle à l'arête, on voit, si le prisme est au minimum de déviation, une image virtuelle nette

(1) Le plus souvent, quand la fente est étroite on voit le spectre sillonne de raies noires perpendiculaires à l'arête du prisme et supprimant sur leur parcours toutes les couleurs du spectre du rouge au violet. Ces raies proviennent simplement de quelques poussières ou de quelques bavures qui bouchent la fente en certains points : ce sont les images de ces points obscurs dans toutes les couleurs du spectre.

(2) Quand on emploie pour éclairer la fente les rayons directs du Soleil, renvoyés par un miroir plan (*porte-lumière*), il se forme dans le plan focal de la lentille une image du Soleil. Tous les rayons qui ont traversé la fente et la lentille passent à travers cette très petite image. Or, c'est là qu'il convient de mettre le prisme (fig. 96), parce qu'ainsi on n'en utilise qu'une très petite portion, et que les défauts qui peuvent exister sur les bords du prisme ne produisent pas d'effets fâcheux.

de cette fente dans chacune des couleurs simples qui composent la lumière éclairant la fente; on a donc un spectre virtuel de cette lumière.

• Faisons remarquer que le violet étant plus dévié que le rouge, on voit dans le spectre virtuel le violet du côté de l'arête et le rouge du côté de la base.

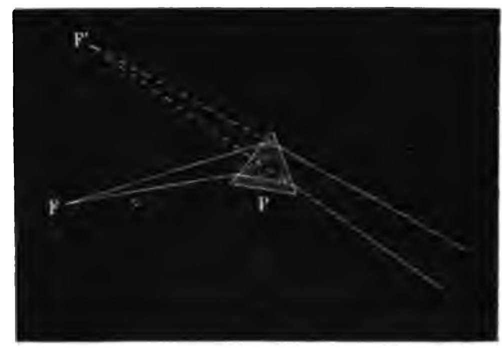


Fig. 97.

11. IRISATION DES IMAGES VUES A TRAVERS UN PRISME OU UNE LENTILLE. — Un objet qu'on regarde à travers un prisme ou une lentille paraît le plus souvent bordé de couleurs bleues ou jaunes, qui sont dues au phénomène de la dispersion qui accompagne la réfraction.

Considérons, par exemple, le cas d'un prisme et supposons qu'on regarde à travers le prisme un objet blanc sur fond noir. Le prisme donnera naissance à une image virtuelle de cet objet dans chacune des couleurs simples qui composent la lumière blanche. Ces images n'auront pas la même position : l'image violette sera la plus près de l'arête du prisme, l'image rouge la plus éloignée. S'il existe une partie commune à l'image rouge et à l'image violette, cette partie sera commune aussi à toutes les autres couleurs du spectre, et l'œil verra du blanc en cet endroit; mais, plus près de l'arête du prisme, le rouge et les couleurs les moins réfrangibles manquant, l'œil verra une bande colorée passant du bleu au violet à mesure qu'on s'écartera de la partie blanche; inversement du côté de la base du prisme, le violet et les couleurs les plus réfrangibles manquant, l'œil verra une bande colorée dont la teinte variera du jaune au rouge à mesure qu'on s'éloignera de la partie blanche.

La distance focale d'une lentille infiniment mince étant donnée

par la formule $\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$ (Chap. III § 21), on voit que pour chaque couleur il y a une distance focale spéciale, puisque l'indice de réfraction n dépend de la couleur. Par conséquent, en vertu des formules fondamentales $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ et $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$, on voit que la distance p' à laquelle se forme l'image nette d'un objet et la grandeur de cette image dépendent de la couleur. Si l'objet est blanc, il y a une série d'images dans chaque couleur, inégalement distantes de la lentille et, par conséquent, de grandeurs différentes : l'image d'un objet blanc sera donc bordée d'une bande colorée.

Ces irisations sont un défaut pour la netteté des images (*aberration de réfrangibilité*). Nous allons voir qu'en combinant convenablement deux prismes, ou deux lentilles, formés de verres inégalement dispersifs, on parvient à obtenir la réfraction de la lumière sans irisation appréciable des images. On désigne de pareils systèmes sous le nom de prismes ou lentilles *achromatiques*.

Newton ne croyait pas à la possibilité de l'achromatisme. Les idées de Newton ayant paru inexactes à Euler [1], d'après ce fait que l'œil est achromatique, ce savant mathématicien démontra théoriquement la possibilité de l'achromatisme et donna des règles pour le réaliser, vers 1753. Mais c'est l'opticien anglais Dollond [2] qui, en voulant réfuter les idées d'Euler par l'expérience, se convainquit de leur justesse et réalisa les premiers prismes et les premières lentilles achromatiques.

Nous commencerons par étudier l'achromatisme des prismes.

12. ACHROMATISME DES PRISMES. — L'achromatisme parfait est irréalisable ; mais on peut obtenir, en combinant deux prismes formés de substances n'ayant pas le même pouvoir dispersif, une même déviation pour deux rayons de couleurs différentes

(1) Léonard Euler est né à Bâle en 1707 et est mort à Saint-Pétersbourg en 1783.

(2) John Dollond est né à Spitalfields en 1706 et est mort en 1761.

déterminées. Ainsi l'on peut faire, par exemple, que l'image jaune et l'image bleue d'un objet blanc soient confondues ; l'objet paraît alors à peu près sans irisation, quoique les images dans les autres couleurs ne soient pas exactement superposées.

En combinant trois prismes de trois substances différentes, on pourrait obtenir la superposition exacte de trois couleurs, et ainsi de suite. Mais, en général, on se borne à réunir deux couleurs, l'achromatisme est assez parfait pour qu'il soit inutile de compliquer davantage le système.

Nous allons nous occuper de l'achromatisme dans le cas seulement de prismes à angle très faible ; ce cas est plus facile à traiter que le cas général, et c'est le seul qui soit intéressant en pratique.

Si l'on fait tomber un faisceau de lumière blanche sur le système de deux prismes dont les arêtes parallèles sont tournées d'un même côté, il est clair que, les déviations produites par chacun des prismes s'ajoutant, il en sera de même des différences entre les déviations des rayons rouges et des rayons violets : la dispersion produite par le système des deux prismes sera plus grande que celle produite par un seul prisme. Mais, si le second prisme, tout en ayant son arête parallèle à celle du premier, est renversé par rapport à lui (fig. 98), les déviations produites par chacun des prismes se retranchent, et il en est de même des différences entre les déviations de deux rayons de couleurs différentes. Il peut se faire alors que ces déviations deviennent les mêmes sans être nulles ; c'est ce que nous allons montrer.



Fig. 98.

Soient a et a' les valeurs des angles de ces prismes ; comme nous l'avons dit, nous supposons ces angles très petits. Supposons, en outre, que le faisceau de lumière blanche tombe sur la face d'entrée du premier prisme sous une incidence voisine de la normale ; il en sera alors de même pour les incidences des

rayons sur les trois autres faces réfringentes du système, si, comme nous le supposons aussi, les faces voisines des deux prismes sont parallèles. Dans ce cas, nous avons vu (Chap. III § 7), que les déviations d et d' données par les prismes sont indépendantes de l'angle d'incidence, étant fournies par les relations :

$$(1) \qquad d = (n - 1)\, a \qquad d' = (n' - 1)\, a'$$

dans lequelles n et n' représentent les indices des deux prismes pour la couleur considérée.

La déviation δ du rayon à travers le système des deux prismes est donc donnée par :

$$(2) \qquad \delta = d - d' = (n - 1)\, a - (n' - 1)\, a'$$

D'après cette relation si δ est positif d est plus grand que d' : le rayon est rejeté du côté de la base du premier prisme ; si δ est négatif d est plus petit que d' : le rayon est rejeté du côté de la base du second prisme.

Soient maintenant δ_1, n_1 et n'_1 la déviation et les indices correspondants à une couleur déterminée, le jaune, par exemple, et δ_2, n_2 et n'_2 la déviation et les indices pour une autre couleur déterminée, le bleu, par exemple. On a :

$$(3) \qquad \begin{aligned} \delta_1 &= (n_1 - 1)\, a - (n'_1 - 1)\, a' \\ \delta_2 &= (n_2 - 1)\, a - (n'_2 - 1)\, a' \end{aligned}$$

Si l'on veut que les rayons de ces deux couleurs différentes, confondus dans la lumière incidente, sortent parallèlement, il faut avoir : $\delta_2 - \delta_1 = 0$; c'est-à-dire :

$$(4) \qquad (n_2 - n_1)\, a - (n'_2 - n'_1)\, a' = 0$$

d'où :

$$(5) \qquad \frac{a}{a'} = \frac{n'_2 - n'_1}{n_2 - n_1}$$

Telle est la condition d'achromatisme : il faut choisir les angles a et a' de façon à satisfaire à la relation (5).

Si nous voulons, en outre, que le système achromatique donne une petite déviation δ déterminée, il faut que a et a' satisfassent à l'une des deux relations (3), qui sont identiques l'une à l'autre si a et a' satisfont à la condition d'achromatisme (5).

Eliminons a' entre les relations (5) et l'une de relations (3) ; il vient, en supprimant l'indice de δ :

$$(6) \qquad \delta = a(n_2 - n_1)\left[\frac{n_1 - 1}{n_2 - n_1} - \frac{n'_1 - 1}{n'_2 - n'_1}\right]$$

Supposons que l'indice 2 se rapporte au bleu et l'indice 1 au jaune ; alors $n_2 - n_1$ est une quantité positive. D'ailleurs si n_1 et n_2 se rapportent au *crown glass* et n'_2 et n'_1 au *flint glass*, comme ce verre à base de plomb est plus dispersif que le premier, on a :

$$(7) \qquad \frac{n'_2 - n'_1}{n'_1 - 1} > \frac{n_2 - n_1}{n_1 - 1}$$

La quantité entre crochets dans la relation (6) étant positive, on voit que δ est positif, c'est-à-dire que *le rayon est dévié par le système achromatique vers la base de celui des deux prismes qui est formé du verre le moins dispersif.*

La relation (5) montre, du reste, que c'est le prisme le moins dispersif qui doit avoir le plus grand angle (1).

Nous verrons plus loin (Chap. VIII § 2) comment on mesure les indices de réfraction des diverses couleurs, qu'il est nécessaire de connaître pour obtenir un prisme achromatique donnant une déviation déterminée. Nous verrons aussi comment le *diasporamètre* (Chap. VIII § 12) permet d'obtenir directement

(1) Newton croyait que pour toutes les substances l'expression $\frac{n_2 - n_1}{n_1 - 1}$ avait la même valeur. S'il en était ainsi, d'après la relation (6), la déviation serait nulle : on ne pourrait achromatiser un prisme qu'en annulant la déviation qu'il produit. C'est pour cette raison que Newton ne croyait pas à la possibilité de l'achromatisme.

le rapport $\frac{n'_2 - n'_1}{n_2 - n_1}$, c'est-à-dire le rapport des angles des deux prismes.

13. ACHROMATISME DES LENTILLES. — Considérons un système formé de deux lentilles infiniment minces, placées au contact l'une de l'autre, de façon que leurs axes principaux soient confondus, et baignées par l'air sur leurs deux faces. Soient p la distance d'un point lumineux A à la première lentille, ϖ la distance à cette lentille de l'image A′ qu'elle donne du point A, et f sa distance focale. On a :

$$(1) \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{\varpi}=\frac{1}{f}$$

L'image A′ de A va fonctionner comme objet par rapport à la seconde lentille; soit ϖ_1 la distance de A′ à cette lentille. On a pour la distance p' de la nouvelle image A″ donnée par la seconde lentille :

$$(2) \qquad \frac{1}{\varpi_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f'}$$

en désignant par f' la distance focale de la seconde lentille. Or, les deux lentilles étant infiniment minces et infiniment voisines, ϖ et ϖ_1 ont la même valeur absolue. Seulement si A′ est une image virtuelle, ϖ est négatif, et, comme A′ fonctionne alors comme objet réel, ϖ_1 est positif : on a donc $\varpi_1 = -\varpi$; si A est une image réelle, ϖ est positif, mais cette image fonctionne alors comme objet virtuel par rapport à la seconde lentille, ϖ_1 est négatif, et l'on a encore $\varpi_1 = -\varpi$. La formule (2) peut donc s'écrire :

$$(3) \qquad -\frac{1}{\varpi}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f'}$$

ajoutons membre à membre les relations (1) et (3); il vient :

$$(4) \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$$

Pour la distance à laquelle se forme l'image, on voit que le système des deux lentilles se comporte comme une lentille unique dont la distance focale F serait donnée par

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'} \tag{5}$$

Il en est de même aussi pour la grandeur de l'image. En effet, un rayon qui se dirige vers le centre optique de la première lentille passe aussi par le centre optique de la seconde qui en est infiniment voisin et, par conséquent, sort du système sans déviation : c'est un axe secondaire. Par conséquent, le rapport entre la grandeur de l'image et la grandeur de l'objet est égal au rapport des distances de l'image et de l'objet au système.

La démonstration que nous venons de faire s'étend d'elle-même au cas de trois, de quatre, d'un nombre quelconque de lentilles infiniment minces et infiniment voisines :

Un système de plusieurs lentilles centrées infiniment minces et infiniment voisines est équivalent (pour la distance et la grandeur des images) *à une lentille unique dont la convergence* $\frac{1}{F}$ *serait égale à la somme algébrique des convergences des lentilles qui composent ce système :* $\left(\frac{1}{f}, \frac{1}{f'}, \frac{1}{f''}, \frac{1}{f'''} \text{ etc...}\right)$

Faisons remarquer que, quand la lentille est convergente sa convergence $\frac{1}{f}$ est positive ; quand une lentille est divergente, f étant négatif, sa convergence $\frac{1}{f}$ est négative.

Si, en juxtaposant deux lentilles, on peut obtenir un système dont la distance focale F soit la même pour le jaune et pour le bleu, en vertu de la relation

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{F}$$

ce système fournira d'un objet quelconque une image jaune qui

coïncidera en position et en grandeur avec l'image bleue : il y aura achromatisme parfait pour ces deux couleurs et, par conséquent, achromatisme suffisant pour toutes les autres.

Or, il est possible, comme nous allons le montrer, de trouver deux lentilles formant un système achromatique en les taillant dans des verres inégalement dispersifs.

Désignons par R_1 et R_2 les rayons de courbure des faces de la première de ces lentilles, et par n_1 son indice de réfraction pour le jaune ; la distance focale f_1 pour les rayons de cette couleur est donnée par

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \tag{6}$$

De même, en désignant par R'_1 et R'_2 les rayons de courbure des faces de la deuxième lentille et par n'_1 son indice de réfraction pour le jaune, sa distance focale f'_1 pour cette couleur est donnée par

$$\frac{1}{f'_1} = (n'_1 - 1)\left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R'_1}\right) \tag{7}$$

Le système formé par la superposition des deux lentilles aura pour les rayons jaunes une distance focale F_1 donnée par :

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f'_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + (n'_1 - 1)\left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R'_1}\right) \tag{8}$$

De même, pour les rayons bleus, il aura une distance focale F_2 donnée par :

$$\frac{1}{F_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + (n'_2 - 1)\left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R'_1}\right) \tag{9}$$

en désignant par n_2 et n'_2 les indices des lentilles pour cette couleur.

Pour que le système soit achromatique, il faut avoir :

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{F_2} \tag{10}$$

d'où, en retranchant membre à membre (8) de (9) :

$$(11) \quad (n_2-n_1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)+(n'_2-n'_1)\left(\frac{1}{R'_2}-\frac{1}{R'_1}\right)=0$$

Comme $n_2 - n_1$ et $n'_2 - n'_1$ sont des quantités, positives on voit que $\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$ et $\left(\frac{1}{R'_2}-\frac{1}{R'_1}\right)$ doivent être de signes contraires :

L'une des lentilles du système achromatique doit être convergente et l'autre divergente.

La condition d'achromatisme (6) peut se mettre sous la forme

$$(12) \qquad -\frac{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R'_2}-\frac{1}{R_1}}=\frac{n'_2-n'_1}{n_2-n_1} \quad (1)$$

Le diasporamètre (Chap. VIII § 12) permet de déterminer le second membre de cette relation.

Comme on désire que le système achromatique possède une convergence $\frac{1}{F}$ déterminée, il faut que les rayons de courbures des faces des lentilles satisfassent, en outre, à l'une des deux relations (8) ou (9), qui sont identiques quand les rayons de courbure satisfont à la condition d'achromatisme (11).

(1) En désignant par n et n' les indices de réfraction moyens pour les deux verres, on peut écrire cette relation :

$$-\frac{(n-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)}{(n'-1)\left(\frac{1}{R'_2}-\frac{1}{R'_1}\right)}=\frac{\left(\frac{n'_2-n'_1}{n'-1}\right)}{\left(\frac{n_2-n_1}{n-1}\right)} \quad \text{ou} \quad -\frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{f'}}=\frac{\left(\frac{n'_2-n'_1}{n'-1}\right)}{\left(\frac{n_2-n_1}{n-1}\right)}$$

Les valeurs absolues des convergences des deux lentilles doivent être inversement proportionnelles aux pouvoirs dispersifs.

Eliminons $\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R'_1}$ entre la relation (11) et la relation (8); en supprimant l'indice de F, il vient :

$$(13) \qquad \frac{1}{F} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left[\frac{n_1 - 1}{n_2 - n_1} - \frac{n'_1 - 1}{n'_2 - n'_1}\right]$$

Supposons que la première lentille soit formée du verre le moins dispersif ; on a alors :

$$\frac{n_2 - n_1}{n_1 - 1} < \frac{n'_2 - n'_1}{n'_1 - 1}$$

la quantité entre crochets étant alors positive ainsi que la quantité $n_2 - n_1$, on voit que le signe de $\frac{1}{F}$ dépend du signe $\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$ et, par conséquent, du signe de $\frac{1}{f}$:

Le système achromatique est convergent si la lentille formée du verre le moins dispersif est convergente ; le système achromatique est divergent si la lentille formée du verre le moins dispersif est divergente.

La condition d'achromatisme (11) et la condition pour le système d'avoir une distance focale déterminée F (13), permettent d'établir encore deux autres conditions entre les quatre rayons de courbure R_1, R_2, R'_1 et R'_2.

Les opticiens prennent, en général, comme troisième condition $R_2 = - R'_1$, de façon que les faces en regard des deux lentilles s'adaptent exactement l'une sur l'autre.

La quatrième condition que s'imposent les opticiens dans la taille des courbures des lentilles est la condition d'aplanétisme ; c'est-à-dire qu'ils s'efforcent de rendre minima les aberrations de sphéricité du système.

Par exemple, supposons que la lentille achromatique soit destinée à donner une image réelle d'objets lointains, comme un

objectif de lunette astronomique. Nous avons vu qu'une lentille biconvexe, dont la face tournée vers l'objet a un rayon de courbure qui est le sixième de celui de l'autre face, donne le minimum d'aberration, quand la lentille est homogène. Comme les indices de réfraction moyens du crown-glass et du flint-glass, qui entrent dans une lentille achromatique, sont peu différents l'un de l'autre, la lentille achromatique présente encore un minimum d'aberration quand la face extérieure de la lentille de crown a un rayon de courbure six fois plus grand que celui de la face extérieure de la lentille de flint qui doit être tourné vers l'objet. La lentille de flint est alors un ménisque divergent et, par conséquent, la lentille de crown est biconvexe (fig. 99).


Fig. 99.

Les règles que nous venons d'indiquer pour l'achromatisme, concernant les lentilles infiniment minces, ne peuvent donner que des résultats approchés pour les lentilles réelles. La théorie de Gauss sur les lentilles épaisses permettrait de trouver des règles tout à fait exactes ; mais dans le cas de lentilles achromatiques à longue distance focale, comme celles qui forment les objectifs des lunettes, ces règles exactes diffèrent à peine des règles élémentaires établies pour les lentilles infiniment minces. Aussi, les opticiens ne se servent que de ces règles élémentaires : ils obtiennent ainsi un achromatisme approché, et, en retouchant les faces des lentilles, ils arrivent, par un tâtonnement régulier, à faire disparaître ou du moins à rendre extrêmement faibles les aberrations de sphéricité et de réfrangibilité, tout en conservant au système la même distance focale [1].

(1) Dans quelques cas, on emploie trois lentilles de trois verres différents pour faire coïncider les images de trois couleurs et obtenir un achromatisme plus parfait, par exemple, dans le cas des lentilles qui servent pour la construction des lunettes de Galilée. Le problème, en considérant les lentilles comme infiniment minces et infiniment voisines, se traite absolument comme dans le cas de deux lentilles.

14. ACHROMATISME DES IMAGES DONNÉES PAR RÉFLEXION SUR LA BASE D'UN PRISME ISOCÈLE. — Soit (fig. 100) ACB la section principale d'un prisme dont les angles C et B sont égaux entre eux (prisme isocèle). Considérons dans cette section principale un rayon SI tombant sur la face AB, se réfractant suivant IK,

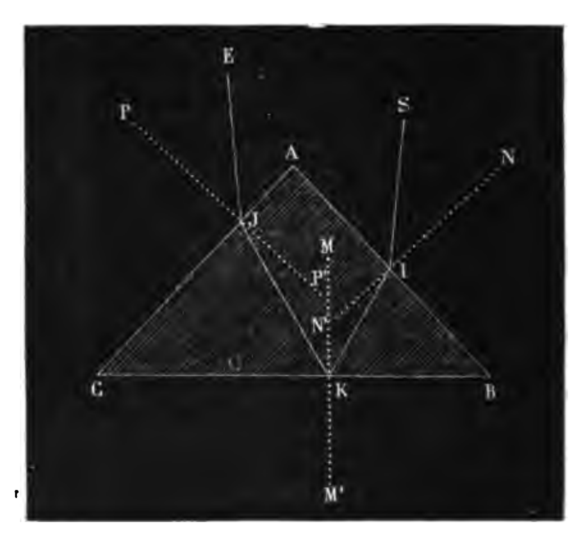


FIG. 100.

subissant une réflexion (totale ou partielle) sur la base BC et prenant alors la direction KJ, puis sortant suivant JE à travers la face AC. Menons les normales NIN', MKM', PJP' aux trois faces par les points I, K et J. Toutes ces droites sont dans une même section principale, ainsi que les diverses parties du rayon SIKJE. Or, on a les égalités suivantes :

$$(1) \qquad \begin{aligned} N'IK + N'KI &= IBK \\ P'JK + P'KJ &= JCK \end{aligned}$$

et, comme IBK égale JCK par hypothèse, et que N'KI égale

P'KJ, puisque l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, on tire de (1) :

$$(2) \qquad N'IK = P'JK$$

Il en résulte que les angles extérieurs NIS et PJE sont égaux, puisqu'on a :

$$(3) \qquad \sin NIS = n \sin N'IK = n \sin P'JK = \sin PJE$$

Par conséquent, quelle que soit leur couleur, des rayons qui tombent parallèlement entre eux sur la face AB et qui se réfléchissent sur la base BC, sortent par la face AC parallèlement entre eux, comme s'ils avaient traversé une lame de verre à faces parallèles (la face symétrique de AB par rapport à CB et la face AC).

Il en résulte que les images données par réflexion partielle ou totale sur la base d'un prisme isocèle sont parfaitement achromatiques. Il n'en serait plus de même si les angles du prisme en B et C n'étaient pas égaux.

Les prismes isocèles et, en particulier, les prismes isocèles et rectangles sont constamment employés dans les instruments d'optique au lieu de miroirs plans. Quand le rayon tombe sur la base de façon à subir la réflexion totale, il y a autant de lumière réfléchie qu'avec un miroir plan en argent, les images ne présentent pas plus d'irisation, et l'on a l'avantage d'avoir un miroir inaltérable.

CHAPITRE VI

VISION

Avant de commencer l'étude des instruments d'optique, il est indispensable de se rendre compte de la manière dont s'opère la vision; il est nécessaire, par conséquent, d'étudier l'organe de la vue et même, jusqu'à un certain point, de connaître ses imperfections.

1. DESCRIPTION DE L'ŒIL. — L'œil est un globe mobile dans une cavité du crâne, *l'orbite*, sous l'influence de muscles au nombre de six. La figure 101 en représente une coupe par un plan horizontal.

La partie périphérique du globe oculaire est formée d'une membrane à laquelle sa dureté a fait donner le nom de *sclérotique* AA. La sclérotique proprement dite est opaque, mais en avant de l'œil, elle est remplacée par une calotte transparente, la *cornée transparente* B, qui fait légèrement saillie sur le reste du globe oculaire, en présentant une courbure un peu plus forte. Par opposition au nom de *cornée transparente*, la partie blanche et opaque de la sclérotique visible à travers les paupières s'appelle la *cornée opaque*.

La sclérotique est tapissée à son intérieur par une membrane très mince, riche en vaisseaux sanguins, la *choroïde*. Cette membrane présente dans les cellules superficielles de ses deux faces un pigment noir, qui rend obscur tout le fond de l'œil.

La choroïde manque dans la partie antérieure de l'œil. Elle se termine en avant par un anneau MM, de nature musculaire, qui s'appelle le *muscle ciliaire*. La partie postérieure de cet anneau contient des plexus de vaisseaux sanguins renflés en massue et disposés dans le sens des rayons, qui constituent le *corps ciliaire*.

De la choroïde se détache encore une autre membrane annulaire, *la zone de Zinn*, située en arrière du corps ciliaire.

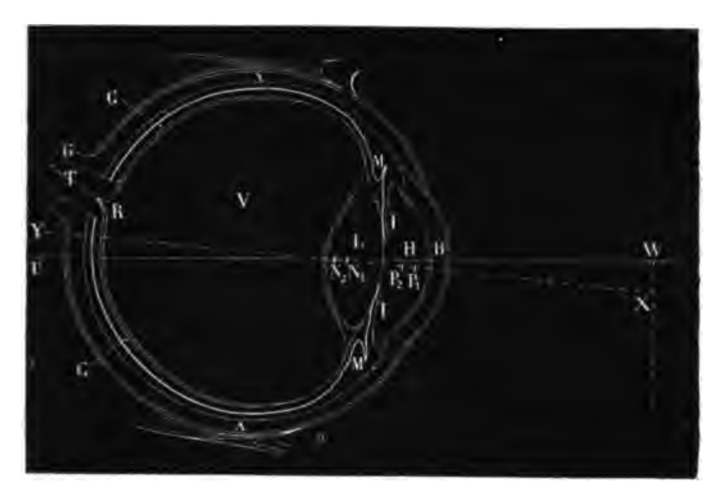


Fig. 101.

Entre le corps ciliaire et la partie antérieure du muscle ciliaire se trouvent, comme enchâssés, les bords d'un disque, *l'iris* II, percé en son milieu d'une ouverture, circulaire chez l'homme, la *pupille*. L'iris est de nature musculaire, et le jeu de ces muscles dilate ou rétrécit la pupille. C'est l'iris qui, vu à travers la cornée transparente, donne à l'œil sa couleur variable d'un individu à un autre. Quant à la pupille, elle apparait comme un point noir au milieu de l'iris.

La choroïde est recouverte elle-même dans le fond de l'œil par une membrane de nature nerveuse *la rétine* CC. Celle-ci est formée par l'épanouissement à la surface de la choroïde des fibres

d'un gros nerf de sensibilité spéciale, le *nerf optique* T. Ce nerf traverse la choroïde qui manque à cet endroit en un point R placé non pas exactement au milieu du fond de l'œil mais un peu plus près du nez. La sclérotique se prolonge à la surface du nerf et en forme la gaine G.

Le nerf optique pénètre dans la cavité cérébrale par une ouverture située dans le fond de l'orbite; avant de se fondre avec la masse du cerveau, les deux nerfs optiques se réunissent et s'entrecroisent partiellement : les fibres qui s'étalent sur la partie droite de chaque œil se réunissent et pénètrent dans la partie droite du cerveau; les fibres qui s'étalent sur la partie gauche de chaque œil se réunissent de même et pénètrent dans la partie gauche du cerveau.

La rétine est une membrane translucide; sa structure est fort compliquée, nous renverrons pour sa description exacte aux traités spéciaux. Indiquons seulement que le milieu de la rétine présente une petite excavation (*fosse centrale*) entourée d'une bordure jaune (*tache jaune*).

Immédiatement derrière l'iris se trouve un corps transparent ayant la forme d'une lentille biconvexe dont la face antérieure est moins bombée que la face postérieure : c'est le *cristallin* L. Celui-ci est enfermé dans une enveloppe transparente très mince, la *capsule cristalline* dont le pourtour est fixé à la zone de Zinn; c'est ainsi que le cristallin est maintenu en place. Cet organe n'est pas homogène ; il est formé par des couches concentriques dont l'indice de réfraction augmente, en allant des couches périphériques aux couches centrales : l'indice absolu moyen est 1,384.

L'œil se trouve divisé par le cristallin en deux parties inégales. La partie antérieure H, comprise entre la cornée et le cristallin, contient un liquide mobile, en grande partie formé d'eau : c'est *l'humeur aqueuse*. La partie postérieure de l'œil V, comprise entre le cristallin et la rétine, renferme un milieu transparent incolore, de consistance gélatineuse, *l'humeur vitrée*. Ce tissu gélatineux est contenu à l'intérieur d'une enveloppe très mince transparente, la *membrane hyaloïde*, qui recouvre la rétine et la face postérieure du cristallin.

L'indice de réfraction absolu de l'humeur aqueuse est 1,337 et celui de l'humeur vitrée est presque le même, 1,339.

2. FORMATION DES IMAGES SUR LA RÉTINE. — Nous venons de voir qu'en avant de la rétine il existe une succession de milieux réfringents parfaitement transparents. Ces milieux forment un système optique convergent : en effet, derrière la cornée transparente, ménisque à faces à peu près parallèles se trouve l'humeur aqueuse plus réfringente que l'air; aussi, des rayons tombant parallèlement entre eux sur la cornée, convergent en traversant l'humeur aqueuse; le cristallin, lentille biconvexe formée par une substance plus réfringente que celles qui baignent ses faces, augmente la convergence de ces rayons, qui concourent en un point toujours assez voisin de la rétine.

Dans un œil, même normal, les surfaces réfringentes ne sont pas exactement des surfaces sphériques centrées; pourtant elles ne s'éloignent pas tellement de ces conditions qu'on ne puisse, par approximation, regarder l'œil comme un système dioptrique centré. Or, nous savons que tout système centré peut être remplacé, au point de vue de la marche des rayons dans les milieux extrêmes, ici l'air et l'humeur vitrée, par le système de deux plans principaux, de deux points nodaux, et de deux foyers principaux.

La mesure des rayons de courbure de la cornée et des deux faces du cristallin, et la connaissance des indices de réfraction des milieux de l'œil a permis de fixer les éléments de ce système optique. Voici, d'après l'ouvrage de M. Beaunis, la valeur moyenne de la position de ces éléments :

		Distances au sommet de la cornée. en centimètres.	Différences.
Premier point principal	P_1 (fig. 101)	$0^c,22$	$0^c,04$
Deuxième point principal	P_2	$0^c,26$	
Premier point nodal	N_1	$0^c,72$	$0^c,04$
Deuxième point nodal	N_2	$0^c,76$	
Longueur focale antérieure		$1^c,50$	
Longueur focale postérieure		$2^c,01$	

Comme les deux plans principaux sont très voisins, on pent, tout en restant dans une approximation suffisante, les supposer confondus, comme on le fait dans le cas d'une lentille très mince;

la confusion des deux plans principaux entraîne celle des deux points nodaux (*œil réduit*).

Empressons-nous d'ajouter que les nombres de ce tableau n'ont rien d'absolu : non seulement ils varient suivant l'individu et suivant l'âge, mais aussi, comme nous allons le voir, suivant la distance même de l'objet que l'œil regarde; il faut considérer ces nombres comme une moyenne obtenue par un grand nombre de mesures faites sur des yeux normaux.

Le système optique de l'œil donne des objets extérieurs une image réelle et renversée, qui se peint sur la rétine.

L'expérience suivante permet de s'assurer qu'il en est bien ainsi. On fixe à une ouverture pratiquée dans le volet d'une chambre noire, un œil de cheval ou de bœuf, la cornée étant tournée vers l'extérieur; auparavant, on a diminué l'épaisseur de la sclérotique à sa partie postérieure. On voit alors se peindre sur cette membrane translucide l'image renversée des objets extérieurs.

Quand la rétine est exactement au foyer conjugué de l'objet, l'image qui se peint sur la rétine est parfaitement nette; dans ces conditions, l'observateur voit nettement l'objet. Si, au contraire, la rétine n'est pas au foyer conjugué de l'objet, l'image qui se forme sur elle est diffuse, et l'observateur ne voit que confusément l'objet : la perception est la même, dans ce cas, que s'il s'était peint nettement sur la rétine l'image d'un objet diffus. En définitive, cette image qui se forme sur la rétine est un intermédiaire indispensable dans l'acte de la vision, et de la netteté de cette image dépend la netteté de la perception visuelle (1).

(1) On s'est souvent demandé, et quelques chercheurs se demandent encore, comment il se fait que nous voyons droits les objets, quand leurs images se peignent renversées sur la rétine.

En réalité, dans l'état actuel de nos connaissances, il n'y a pas même lieu de se poser cette question; car, avant de l'aborder, il faudrait évidemment savoir comment on perçoit la sensation produite par l'image qui se peint sur la rétine; or, il paraît bien probable que l'homme ne se rendra jamais un compte exact du mécanisme de la perception.

Tout ce qu'on peut dire à ce sujet, c'est que, comme pour toutes les au-

3. **ANGLE VISUEL.** — Menons par les deux extrémités d'un objet que l'œil regarde les rayons qui passent par le premier point nodal de l'œil; soit α l'angle que forment ces rayons, c'est l'angle sous lequel on voit l'objet (*angle visuel*) : plus cet angle est grand, plus l'objet est vu gros. En effet, chacun des deux rayons que nous venons de considérer donne naissance dans l'humeur vitrée à un rayon qui lui est parallèle et qui passe par le second point nodal; ces deux rayons forment, par conséquent, entre eux, l'angle α, et ils frappent la rétine aux deux points où se forme l'image de chacune des extrémités de l'objet. On voit donc que la grandeur de l'image rétinienne ne dépend à peu près que de l'angle α, puisque la distance à la rétine du second point nodal est à peu près invariable.

Un même objet est vu sous un angle d'autant plus faible qu'il est plus éloigné, c'est pour cela que les objets paraissent d'autant plus petits qu'ils sont plus loin.

Quand l'angle visuel devient trop petit, l'objet cesse d'être distingué des objets voisins. Ainsi, en général, pour les vues moyennes, les traits qui limitent les millimètres sur une règle graduée cessent d'être vus distinctement à partir de 350 centimètres, ce qui correspond à un angle visuel d'une minute environ et à une image rétinienne de $0^c,0004$.

L'acuité visuelle, c'est-à-dire la possiblité de distinguer de petits objets voisins, dépend beaucoup, du reste, de la perfection de l'œil, et est très variable d'un individu à un autre.

Ajoutons qu'un objet brillant se détachant sur un fond sombre peut être aperçu même quand il est vu sous un angle beaucoup plus petit qu'une minute; c'est alors l'éclat, et non l'angle, qui règle la visibilité. On en a un exemple dans les étoiles fixes

tres perceptions, nous rapportons la sensation éprouvée non à l'extrémité de la fibre nerveuse qui la transmet, mais à la cause extérieure, parfois très éloignée, qui l'a produite. Quand la partie supérieure de notre rétine est éclairée, nous savons que la source lumineuse qui a donné naissance à la sensation est en bas; nous le savons par cette éducation de l'œil que chaque homme, chaque animal supérieur a faite d'une manière presque toujours inconsciente, les aveugles de naissance qui recouvrent la vue en ayant seuls conscience.

qui sont vues toutes sous un angle tellement petit qu'il est impossible de le mesurer.

4. ACCOMMODATION. — Supposons que l'œil voit nettement un objet situé à une très grande distance, la lune ou les étoiles, par exemple : l'image de cet objet se forme exactement sur la rétine. Un autre objet situé moins loin, mais à une distance considérable encore par rapport aux distances focales de l'œil, par exemple à une distance excédant 50 mètres, formera son image encore très sensiblement dans le plan focal postérieur de l'œil comme celle d'un objet situé à l'infini. On conçoit par là que, sans aucun changement dans la disposition des milieux optiques de l'œil, celui-ci puisse voir nettement à la fois les objets depuis une distance de 50 à 60 mètres jusqu'à l'infini.

Mais si l'œil n'éprouvait aucun changement, il ne pourrait voir nettement des objets beaucoup plus rapprochés, distants de deux ou trois décimètres par exemple ; car, l'image nette de ces objets rapprochés se formant plus loin que celle des objets éloignés, il se peindrait une image confuse sur la rétine.

Puisque nous pouvons voir nettement les objets rapprochés aussi bien que les objets éloignés, il faut que l'œil éprouve une modification quand, après avoir regardé un objet éloigné, il regarde un objet rapproché. On peut s'assurer, du reste, avec un peu d'attention, que l'on ne peut pas voir simultanément nets un objet situé près de l'œil et un objet situé loin, et qu'il faut un certain temps pour qu'un œil, qui vient de regarder de près, puisse voir nettement un objet éloigné, ou réciproquement.

C'est à cette modification que subit l'œil pour voir successivement nets des objets situés à des distances différentes que l'on donne le nom *d'accommodation*.

Les expériences de Cramer, reprises et complétées par Helmholtz, ont fait connaître la nature du changement qui se produit dans l'acte de l'accommodation : les faces du cristallin prennent une courbure plus forte à mesure que l'objet qu'on regarde est plus voisin de l'œil; le cristallin devenant plus convergent, l'image de l'objet est ramenée à se former nettement sur la rétine.

Voici maintenant quel est le procédé d'expérience imaginé par

Cramer. Quand on approche de l'œil d'une personne un objet brillant, comme la flamme d'une bougie, on voit par réflexion, trois images de cet objet (*images de Purkinje*) : une première image A (fig. 102) est droite et très éclairée ; elle est produite par la réflexion de la lumière sur la face antérieure de la cornée qui forme un miroir convexe. Une seconde image B, droite aussi, mais plus grande et beaucoup plus pâle est due à la réflexion de la lumière sur la face antérieure du cristallin. Enfin, une troisième image C, petite et renversée, est fournie par la réflexion des rayons sur la face postérieure du cristallin, qui forme un miroir concave. Or, Cramer, en examinant l'œil avec un microscope pourvu d'un micromètre oculaire, a reconnu que pendant l'acte de l'accommodation l'image B formée par la face antérieure du cristallin se déforme. A mesure que l'objet se rapproche, cette image devient plus petite, indiquant une augmentation dans la convexité de la face antérieure du cristallin.

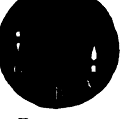


FIG. 102.



FIG. 103.

Helmholtz a mesuré avec beaucoup de soin, à l'aide d'un instrument appelé *ophtalmomètre* (1) les dimensions de ces images, ce qui permet de calculer les rayons de

(1) L'ophtalmomètre consiste en une lunette au-devant de laquelle est disposé un système composé de deux lames de verre épaisses, à faces parallèles, A et B (fig. 103) placées l'une au-dessus de l'autre et traversées cha-

courbure des surfaces, réfringentes, en connaissant les indices de réfraction de l'humeur aqueuse et du tissu cristallin.

La variation de grandeur des images a permis à Helmholtz de déterminer la variation de la courbure des surfaces réfléchissantes. Il a reconnu ainsi, conformément aux expériences de Cramer, que la cornée ne subit aucune déformation, et que la face antérieure du cristallin se renfle quand l'œil s'accommode pour voir plus près; mais il a reconnu aussi, que la face postérieure du cristallin se renfle un peu pendant cette accommodation, ce qui avait échappé à Cramer. En outre, le calcul lui a montré que les variations de courbure des faces du cristallin sont juste celles

cune, par conséquent, par la moitié des rayons qui tombent sur l'objectif. Ces lames peuvent tourner en sens inverse de quantités égales, de façon à faire des angles égaux avec l'axe de la lunette.

Considérons un point lumineux O situé suivant l'axe de la lunette à une distance des lames peu considérable. Les rayons qu'il émet et qui tombent sur la lame A sortent parallèlement à leur direction d'entrée mais éprouvent un déplacement. Il en résulte que la lame A donne de O une image virtuelle O_1 à peu près à la même distance que l'objet O, mais déviée latéralement. Cette déviation est nulle si la lame est perpendiculaire à l'axe de la lunette; elle augmente de plus en plus à mesure que l'angle α que fait la normale à la lame avec l'axe de la lunette augmente. La deuxième lame B donnant une déviation en sens inverse, on voit, à travers la lunette, deux images O_1 et O_2 du point O. La distance d de ces images est facile à connaître par la valeur de l'angle α; on trouve aisément la relation:

$$d = 2e \sin \alpha \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}\right)$$

dans laquelle e est l'épaisseur de chaque lame et n l'indice de réfraction du verre.

Pour obtenir avec cet instrument la grandeur des images formées par réflexion sur les surfaces d'un œil vivant, on fait tourner les lames A et B jusqu'à ce que les deux images de la bougie, provenant du dédoublement par l'ophtalmomètre d'une des images de Purkinje, soient tangentes l'une à l'autre ; alors la distance des points semblables des deux images est égale au diamètre de chacune d'elles. Connaissant l'angle dont il a fallu faire tourner les lames, on connaît, par là, le diamètre de l'image.

Faisons remarquer qu'une fois qu'on a rendu les deux images tangentes l'une à l'autre, ce résultat persiste malgré les petits mouvements le l'œil soumis à l'examen ; c'est ce qui permet de faire facilement la mesure sur un œil vivant.

qui conviennent pour ramener l'image à se former nette sur la rétine : il n'y a, par conséquent, pas d'autres causes qui produisent l'accommodation.

Ces changements de courbure du cristallin sont dus au jeu du muscle ciliaire et à un afflux de sang dans le corps ciliaire.

5. LIMITE DE VISION DISTINCTE. — Un œil normal peut voir nettement des objets placés à l'infini : il voit les étoiles comme des points brillants, la lune avec un contour net. En accommodant, l'œil normal peut voir des objets placés plus près jusqu'à environ 15 à 12 centimètres de l'œil; mais il est incapable, quelqu'effort qu'il fasse, de voir nettement des objets situés très près : il y a une limite à l'accommodation, la courbure du cristallin ne peut dépasser une certaine valeur. Pour tout œil, il existe une distance en deçà de laquelle il cesse de voir avec netteté, c'est la *distance minima de vision distincte*; le point le plus rapproché que l'œil peut voir nettement s'appelle le *punctum proximum*.

Quand on veut voir distinctement de petits objets à l'œil nu, on les approche à la distance minima de vision distincte, car c'est à cette distance qu'ils sont vus sous le plus grand angle sans cesser d'être vus nettement. Plus le punctum proximum est rapproché de l'œil, mieux l'œil est capable de distinguer les petits détails d'un objet.

6. EMMÉTROPIE. — MYOPIE. — HYPERMÉTROPIE. — L'œil normal qui peut voir depuis une distance de 12 à 15 centimètres jusqu'à l'infini est appelé *œil emmétrope* : sans effort, l'œil emmétrope voit nettement à l'infini; en faisant le léger effort que nécessite l'accommodation, il peut voir à distance finie.

On désigne sous le nom d'œil *myope* un œil qui est caractérisé par l'impossibilité de voir nettement au delà d'une certaine distance (*distance maxima de vision distincte*); le point le plus éloigné qu'il peut voir avec netteté s'appelle le *punctum remotum*.

Pour un œil myope, le punctum proximum est plus rapproché que pour un œil emmétrope, il peut n'être qu'à 7 ou 8 centimètres de l'œil et même moins. Aussi les myopes peuvent-ils voir plus gros les petits objets que les emmétropes.

L'intervalle compris entre le punctum proximum et le punctum remotum (*latitude d'accommodation*) est d'autant moins étendu

que ces points sont plus près de l'œil; ainsi certains myopes ne peuvent voir net que des objets placés entre 8 et 20 centimètres de l'œil.

La myopie est due à une convergence trop grande du cristallin. Un objet éloigné donne naissance alors à une image située en avant de la rétine. Il faut donc que l'objet se rapproche jusqu'à une certaine distance (punctum remotum) pour que son image se peigne nettement sur la rétine; l'œil peut voir encore l'objet quand il se rapproche davantage en accommodant, c'est-à-dire en renflant davantage son cristallin, jusqu'à ce que l'objet ait dépassé la position du punctum proximum.

La myopie est quelquefois héréditaire, mais le plus souvent elle est acquise. Quand on a fait effort pendant quelque temps pour regarder de petits objets, qu'on approche près de l'œil pour les voir sous le plus grand diamètre apparent possible, par exemple, après la lecture d'un ouvrage imprimé en caractères fins, un œil même normal devient myope pendant quelque temps; on s'en aperçoit à ce que les objets éloignés ne peuvent plus être vus distinctement. Cette myopie momentanée met souvent plus d'une demi-heure à disparaître complètement : le cristallin, qui s'était renflé au maximum pour donner une image nette de l'objet placé aussi près que possible de l'œil, ne peut plus immédiatement revenir à la forme plus aplatie qui est nécessaire pour la vision distincte des objets éloignés. Si cet effort de l'œil se répète fréquemment pendant que le sujet est jeune, le cristallin garde définitivement une courbure trop prononcée et la myopie définitive survient.

La statistique constate que la myopie n'existe guère que dans la classe studieuse. La mauvaise habitude qu'ont beaucoup d'enfants et de jeunes gens de lire de très près en est la cause [1]. Les myopes sont en très petit nombre dans les basses classes d'un lycée. Leur nombre augmente et la myopie s'aggrave à mesure qu'on examine une classe plus élevée.

La myopie se corrige aisément par l'emploi de verres diver-

(1) L'emploi trop fréquent de dictionnaires, souvent imprimés beaucoup trop fin, joint à un éclairage parfois défectueux des salles d'étude, contribue beaucoup à donner aux élèves l'habitude de regarder de près et est une des causes qui augmente le nombre des myopes.

gents. Désignons par D la distance maxima de vision distincte d'un myope; supposons que celui-ci place devant son œil, et très près, une lentille divergente de distance focale précisément égale à D; cette lentille donne une image virtuelle et droite des objets situés à l'infini dans son plan focal, c'est-à-dire à une distance D de l'œil; par conséquent, cette image est vue nettement. Les objets placés plus près de l'œil fournissent une image située à une distance moindre que D; en accommodant, l'œil peut les voir aussi. En définitive, l'adjonction d'un verre divergent à un œil dont les milieux réfringents sont trop convergents donne un système optique d'une convergence convenable.

Mais on voit qu'il ne faut pas que le myope prenne un numéro de lorgnon trop fort, c'est-à-dire une lentille divergente à trop court foyer; en effet, si la distance focale est inférieure à D, l'image fournie par la lentille des objets situés à l'infini, tombe en avant du punctum remotum, l'œil est déjà obligé d'accommoder pour la voir nette, et cette accommodation continuelle aggrave la myopie, ce qui est dangereux pour la conservation de la vue.

L'habitude de se servir d'un lorgnon pour regarder de près, quand on pourrait s'en passer, force aussi à accommoder plus qu'il ne serait nécessaire sans le lorgnon et produit le même inconvénient.

Passons maintenant à un autre genre de vue, *l'hypermétropie*, qui est le contraire de la myopie. Un assez grand nombre de personnes peuvent voir nettement des objets virtuels; ainsi, en regardant à travers une lentille convergente à longue distance focale et placée près de l'œil des objets situés très loin, elles les voient nettement. Or, la lentille convergente donne des objets éloignés une image réelle qui fonctionne par rapport à l'œil comme un objet virtuel. Un œil qui est capable de voir un objet virtuel est appelé *hypermétrope* : pour un pareil œil le système réfringent est moins convergent que pour un œil emmétrope, et il est déjà obligé d'accommoder pour voir les objets réels situés à l'infini, *a fortiori* à distance finie. Presque toujours, le punctum proximum est plus éloigné pour un œil hypermétrope que pour un œil emmétrope, ce qui se conçoit aisément.

Quand le punctum proximum est trop éloigné, il en résulte une gêne dans la vision; ainsi, pour lire, il faut placer le livre

trop loin, ce qui non seulement est incommode, mais, en outre, ne permet pas de voir les caractères sous un diamètre apparent assez grand pour être bien distincts.

On corrige le défaut que présente un punctum proximum trop éloigné, en plaçant au-devant de l'œil une lentille convergente ; celle-ci donne d'un objet, situé dans le plan focal, une image à l'infini qui est vue nettement par l'œil. Si l'objet est placé un peu au delà du plan focal, la lentille en donne une image réelle, fonctionnant comme objet virtuel par rapport à l'œil et qui peut encore être vue. Si l'objet est un peu en deçà du plan focal, la lentille en donne une image virtuelle éloignée qui peut être encore vue en accommodant. Ainsi, c'est toujours dans le voisinage du plan focal de la lentille qu'il faut placer l'objet à regarder.

Du reste, comme nous l'établirons à propos de la loupe, l'angle sous lequel l'œil voit l'objet à travers la lentille ne dépend, à peu près, que de la distance de l'objet à la lentille.

7. **PRESBYTIE.** — La *puissance d'accommodation*, c'est-à-dire la plus grande variation que peut présenter la convergence des milieux optiques de l'œil, diminue à mesure qu'on avance en âge. Cette diminution commence à se faire sentir dès l'âge de 35 à 40 ans ; le punctum remotum s'écarte de plus en plus de l'œil ; à 70 ans, la puissance d'accommodation est nulle, l'œil est tout à fait *presbyte.* Si dans la jeunesse l'œil était emmétrope, dans la vieillesse il ne voit plus nettement que les objets situés très loin ; si l'œil était hypermétrope, il ne voit plus net à aucune distance, et ne peut voir nettement que des objets virtuels ; si l'œil était myope, le punctum proximum s'étant confondu avec le punctum remotum (qui s'est le plus souvent un peu éloigné), l'œil ne voit plus net que les objets situés juste à cette distance : les objets situés au delà et en deçà de ce plan sont vus confusément. L'œil est alors myope et presbyte à la fois.

On corrige l'inconvénient que présente l'éloignement du punctum proximum, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, en plaçant devant l'œil une lentille convergente (*bésicles* ou *lunettes*). Dans le cas d'un œil à la fois myope et presbyte, deux genres de verres sont nécessaires : des verres divergents pour voir les objets éloignés, situés au delà du plan de vision

distincte, des verres convergents pour voir les objets situés près, situés en deçà du plan de vision distincte.

8. CHAMP DE L'ŒIL. — Pour qu'un objet soit vu très nettement, il faut que son image se forme sur la fosse centrale qui est la partie de la rétine qui présente la sensibilité maximum. Or, la fosse centrale n'a que $0^c,02$ de diamètre ; elle soustend donc du point nodal un angle égal à $\frac{0,02}{1,5}$, c'est-à-dire un angle de $0°46'$. Les objets vus très nettement sont ainsi contenus dans un cône (*champ de vision nette*) dont l'angle générateur n'est que de $0°23'$.

Si nous ne nous apercevons pas habituellement de la petitesse du champ de vision nette, cela tient à la facilité avec laquelle nous dirigeons vers le point d'un objet qui attire notre attention *l'axe visuel* de l'œil, c'est-à-dire la droite qui joint le point nodal au milieu de la fosse centrale (1). L'image du point qui attire notre attention se faisant alors sur la fosse centrale, ce point est vu nettement ainsi que la partie de l'objet qui en est très voisine.

Mais la portion de l'espace que peut voir plus ou moins nettement un œil immobile est très considérable ; cela se conçoit, car les images des points situés sur un axe, faisant un grand angle avec l'axe visuel de l'œil, peuvent se peindre nettement sur la rétine, à cause de sa forme sphérique.

Supposons l'œil fixe, et menons les axes secondaires des points qui sont à la limite de la portion de l'espace vue par l'œil ; ces droites forment un cône qui contient à son intérieur tous les points vus : ce cône s'appelle le *champ* de l'œil.

Le champ de l'œil est loin d'être un cône de révolution : les angles que font avec l'axe visuel les génératrices de ce cône qui sont situées dans la région interne et supérieure (du côté du nez et du front) ont une valeur de 60° en moyenne, tandis que, du côté externe, les angles des génératrices et de l'axe visuel atteignent et même dépassent un peu 90° (2).

(1) L'axe visuel de l'œil (WU fig. 101) est loin de se confondre avec l'axe principal du système optique (XY) ; ces deux axes font entre eux un angle d'environ 5°.

(2) Il peut paraître surprenant que des rayons tombant sur l'œil dans une

Du reste, l'œil ne reconnait pas la couleur des objets situés près des bords du champ : ces objets lumineux ne donnent que la sensation du blanc. La sensation colorée ne se manifeste que pour des points situés à l'intérieur d'un cône (*champ coloré*) moins ouvert que le précédent. Ce champ coloré est aussi plus étendu du côté externe que du côté interne, et cette étendue varie avec la couleur. Ainsi, pour le bleu, le champ est plus vaste que pour le rouge, et pour le rouge plus vaste que pour le vert.

L'étendue de ces divers champs est, du reste, un peu variable suivant le sujet. La figure 104 faite d'après les résultats obtenus par le docteur Gillet de Grandmont, donne une idée de leur valeur moyenne. Les courbes représentées sont les intersections des divers champs avec une sphère ayant pour centre le point nodal de l'œil, en projection stéréographique sur un plan diamétral perpendiculaire à l'axe visuel.

9. **ABERRATIONS DE L'ŒIL.** — Le système optique de l'œil présente peu d'aberration de sphéricité. Cela tient, en partie, à ce que les rayons centraux, traversant la portion du cristallin qui a le plus grand indice de réfraction, concourent en un point plus rapproché du cristallin que si celui-ci avait partout l'indice qu'il possède sur ses bords : les points de concours des rayons centraux et marginaux sont ainsi très voisins.

En outre, l'iris est un diaphragme qui ne laisse passer par son ouverture, la pupille, que des rayons voisins les uns des autres. Cette disposition ne diminue pourtant pas le champ de la vision, puisque des rayons tombant, même très obliquement sur la cornée, peuvent encore traverser la pupille.

La pupille jouit du reste de la propriété remarquable de se rétrécir quand l'œil regarde un objet vivement éclairé ; or, plus le diamètre de la pupille est petit, plus l'image formée sur la

direction faisant avec l'axe visuel un angle supérieur à 90°, c'est-à-dire situés derrière le plan tangent à la cornée, au point où elle est rencontrée par cet axe, puissent donner une image sur la rétine. Le fait s'explique par la forte courbure de la cornée : la réfraction qu'elle fait subir aux rayons qui tombent vers son bord externe presqu'en rasant sa surface, permet à ceux-ci de traverser la pupille.

rétine est nette. En même temps, ce rétrécissement de la pupille diminue la quantité de lumière qui frappe le fond de l'œil, et empêche la fatigue cérébrale que cause un éclairement trop intense de la rétine.

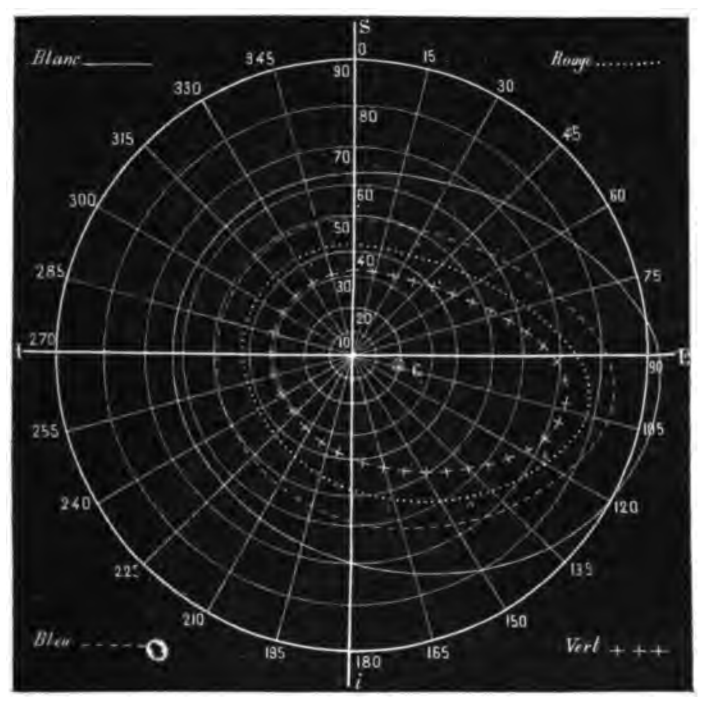


Fig. 104.

Dans les endroits sombres, la pupille, au contraire, se dilate beaucoup, ce qui permet l'introduction d'un faisceau de rayons plus large, et rend visibles des objets qui ne seraient pas vus si l'ouverture de la pupille restait petite.

L'aberration de réfrangibilité existe : l'œil n'est pas parfaitement achromatique ; la distance focale est moindre pour les rayons violets que pour les rayons rouges. Dans les circonstances habituelles, on s'aperçoit peu du défaut d'achromatisme ; car lors-

qu'un objet est loin du punctum proximum, la distance des images d'un même point dans les deux couleurs extrêmes du spectre ne diffère guère que de $0^c,05$. Mais il n'en est plus de même si l'objet est près du punctum proximum ou un peu en deça. Ainsi, quand, à travers un verre au cobalt qui laisse passer les rayons rouges et les rayons bleus, on regarde la flamme d'une bougie placée près de l'œil, en accommodant pour les rayons bleus on voit la flamme bordée de rouge; en accommodant pour les rayons rouges, on voit la flamme bordée de bleu.

Si des dessins rouges sont faits sur un fond bleu, on ne peut accommoder à la fois pour le rouge et pour le bleu, de là une fatigue de l'œil qui, suivant l'attention que l'on porte au rouge ou au bleu, accommode pour l'un ou pour l'autre. Ces variations dans l'accommodation font croire que la partie rouge du dessin est plus près de l'œil que la partie bleue, parce que, pour voir nettement le rouge, il faut que l'œil accommode plus fortement, et que l'acte d'accommodation contribue habituellement à nous faire connaître la distance des objets rapprochés.

10. **VISION BINOCULAIRE.** — Quand nous regardons un objet avec les deux yeux, nous faisons converger les axes visuels de chacun des yeux vers le point qui attire notre attention. Dans ces conditions, l'objet n'est vu qu'une fois, quoique chacune des impressions produites sur les deux rétines soit transmise au cerveau.

Mais si, sans cesser de regarder un objet rapproché de l'œil, nous portons notre attention sur un objet délié placé plus loin, nous constaterons que cet objet est vu double. Réciproquement, si nous regardons un objet éloigné, un objet rapproché est vu deux fois.

La mobilité du regard est telle, et l'on a tellement l'habitude de *regarder* l'objet sur lequel on porte son attention, qu'on est presqu'obligé de faire exprès la petite expérience que nous venons d'indiquer pour se convaincre que l'on perçoit deux images des objets vus sans être regardés.

Il convient d'ajouter pourtant que les deux images des objets vus doubles sont peu écartées, en général, et que, si l'objet a un diamètre parallèle à la ligne des yeux un peu considérable, les

deux images, se superposant en partie, sont peu distinctes l'une de l'autre. En outre, dès qu'on regarde un objet un peu éloigné, les images des autres objets éloignés sont sensiblement superposées, quelles que soient les distances de ces objets.

Le fait que nous ne percevons qu'une image d'un objet vers lequel se dirigent les axes visuels des deux yeux montre qu'à chaque point A de la rétine de l'un des yeux correspond un point A' sur la rétine de l'autre œil, tel que les actions lumineuses produites sur les points A et A' donnent naissance à une perception unique. La possibilité de l'existence de ces *points correspondants* se conçoit, grâce à l'entrecroisement des nerfs optiques : on comprend qu'une fibre nerveuse venant d'un point de la rétine de l'œil droit puisse aboutir à la même cellule cérébrale qu'une autre fibre partant d'un point de la rétine de l'œil gauche, et que les sensations produites par la mise en activité de ces deux fibres se trouvent ainsi confondues.

11. DU RELIEF. — La sensation du *relief* nous fait apprécier l'inégale distance des points rapprochés de l'œil et, par conséquent, la dimension d'un objet, suivant le sens des rayons qui pénètrent dans l'œil.

Il faut regarder l'objet avec les deux yeux pour avoir cette sensation particulière du relief qui, n'étant pas la seule cause qui permette de juger de la distance d'un objet à l'œil, ne doit pas être confondue avec *l'appréciation de la distance* [1].

(1) On apprécie la distance, même avec un seul œil, par suite d'une sorte d'éducation de l'œil. Les aveugles-nés qui recouvrent la vue à la suite d'une opération n'apprécient pas d'abord les distances avec les yeux ; ils sont obligés de contrôler l'impression visuelle par le sens du toucher pour en comprendre la signification. En général, cette éducation de l'œil est faite inconsciemment par les enfants à un âge trop peu avancé pour qu'ils en conservent le souvenir plus tard, mais elle n'en existe pas moins réellement.

Dans la vision avec un seul œil, plusieurs phénomènes permettent, en effet, de juger de la distance d'un objet. Nous avons déjà indiqué l'effort d'accommodation pour les objets situés près ; mais de toutes les causes celle qui contribue le plus à nous faire connaître la distance est la forme et la dimension de l'image rétinienne d'objets dont nous connaissons la forme et les dimensions réelles. En reproduisant ces objets *en perspective* sur un plan un peintre nous donne dans un tableau l'illusion des objets eux-mêmes

On peut s'en convaincre, en fermant un œil, puis en l'ouvrant : on voit alors les objets voisins se détacher les uns des

Suivant que nous voyons des hommes, des maisons, des arbres sous un faible diamètre apparent, ou sous un grand diamètre, nous les jugeons loins ou près.

On conçoit, du reste, que ce procédé puisse être trompeur puisque le diamètre apparent dépend en même temps de la dimension réelle de l'objet; aussi des illusions curieuses résultent parfois de ce mode d'appréciation. Nous en citerons une des plus frappantes : quand de la rive droite de la Seine, à Paris, on regarde les tours de l'Église Saint-Sulpice, ces tours paraissent à une grande distance l'une de l'autre, et l'on a peine à comprendre qu'elles puissent faire partie d'un même édifice. Cette illusion s'explique facilement; en réalité, la tour du Sud, la plus éloignée de l'observateur, est plus petite et un peu moins large que la tour du Nord ; on voit donc la tour du Sud sous un diamètre apparent notablement plus faible que l'autre tour ; et, comme inconsciemment on se figure que les deux tours doivent être identiques, on croit que la tour vue sous le petit angle est bien plus éloignée que l'autre.

Dans nos climats, les objets éloignés sont vus, en général, d'une manière plus confuse, avec des couleurs moins tranchantes, que les objets rapprochés, à cause de la transparence imparfaite de l'atmosphère. Les peintres mettent à profit cette observation et produisent des effets de lointain en adoucissant les tons.

Mais on comprend que, la transparence de l'air étant très variable, il en puisse résulter quelquefois des erreurs dans l'appréciation de la distance et des illusions d'optique. C'est ainsi que, quand le temps est clair, les montagnes paraissent plus rapprochées ; en outre, comme on les voit toujours sous le même diamètre apparent, les croyant plus près, on les juge moins hautes ; de là, cette illusion bien connue de la variation apparente de la hauteur des montagnes suivant la transparence de l'air.

Tout le monde a été frappé de la grosseur que présente parfois la Lune à son lever, tandis qu'elle paraît beaucoup moins grosse quand elle s'est élevée sur l'horizon. Il est bien évident, cependant, que la Lune est vue exactement sous le même diamètre apparent quand elle est à l'horizon ou quand elle passe au méridien ; seulement, les rayons lumineux traversant une quantité d'air beaucoup plus grande dans le premier cas que dans le second, elle apparaît alors moins brillante. Pour cette raison, et plus encore, parce qu'à son lever, la Lune est vue derrière des objets terrestres que nous savons être très éloignés, inconsciemment nous la croyons plus loin de l'œil et, par conséquent, nous lui attribuons un plus grand diamètre réel.

Dans la vision avec les deux yeux, l'effort que font les muscles de l'œil pour faire converger les deux axes visuels vers l'objet qu'on regarde contribue puissamment, ainsi que le relief, à faire juger de la position des objets rapprochés, mais non des distances relatives des objets éloignés.

autres, et l'on constate ainsi que l'on a avec les deux yeux la sensation du relief que l'on n'avait pas avec un seul œil.

Cette sensation est due à ce que les deux images rétiniennes d'un même objet rapproché ne sont pas tout à fait identiques: l'œil droit D (fig. 105) voit un peu plus de la partie droite MN de l'objet, l'œil gauche G un peu plus de la partie gauche KL.

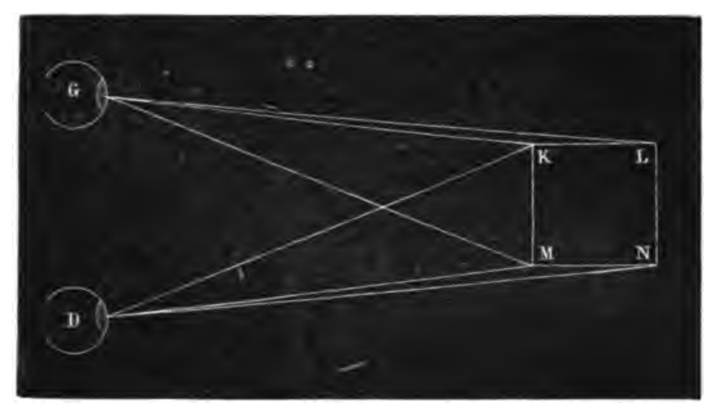


Fig. 105.

Ce qui prouve que la sensation du relief provient de la superposition cérébrale de ces deux images un peu différentes, c'est qu'on peut produire cette sensation en superposant les images de deux dessins représentant le même objet, mais regardé de deux points de vue un peu différents. L'appareil bien connu qui sert à produire cette illusion est le *stéréoscope*, imaginé par Wheatstone.

Cet instrument se compose (fig. 106) de deux portions de lentilles convergentes de même distance focale, qui doivent être placées devant chacun des yeux. La portion conservée de la lentille forme une sorte de prisme à face convexe; les arêtes de ces deux prismes sont en regard l'une de l'autre. Chaque œil regarde à travers l'une des lentilles, une des deux images stéréoscopiques : ces images, placées côte à côte, représentent, comme nous l'avons déjà dit, le même objet vu un

peu différemment : le dessin qui reproduit une plus grande partie de la droite de l'objet est placé devant l'œil droit, celui qui reproduit une plus grande partie de la gauche devant l'œil gauche.

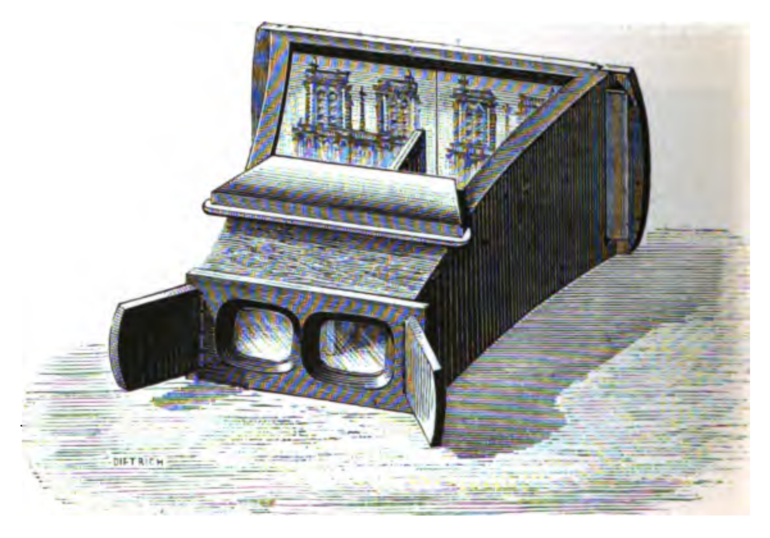


Fig. 106.

Considérons maintenant les points A_1 et A_2 (fig. 107) des deux images qui représentent le même point de l'objet. Joignons A_1 et A_2 aux centres optiques C_1 et C_2 des lentilles correspondantes; ces deux axes C_1A_1 et C_2A_2 se coupent en un même point A'. Or, la distance du dessin aux lentilles est telle que celles-ci fournissent de ce dessin une image virtuelle précisément placée à la distance A'. Ces deux images virtuelles sont ainsi superposées; en outre, elles sont à une distance convenable (30 centimètres environ) pour être vues nettement. Dès lors, si chaque œil regarde l'image virtuelle correspondante, il se peint sur les points correspondants de chaque rétine une image d'un même point de l'objet : le cerveau ne perçoit qu'une seule image. Or, cette image parait en relief, tandis

que si les deux dessins stéréoscopiques représentent exactement le même objet vu du même point, le stéréoscope ne donne plus la sensation du relief.

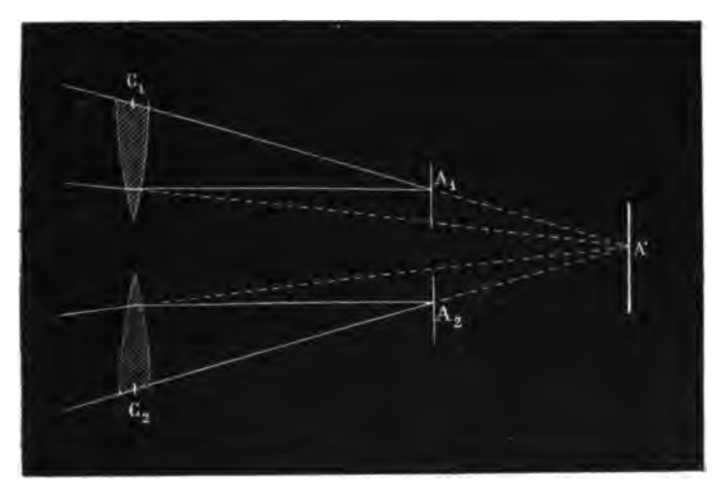


Fig. 107.

Quand les deux dessins stéréoscopiques sont pris de deux points de vue distants de la distance des deux yeux (6,5 centimètres environ), le stéréoscope donne un relief ordinaire. Si les dessins stéréoscopiques sont pris de deux points de vue plus distants, le stéréoscope donne un relief exagéré.

CHAPITRE VII

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Nous allons décrire dans ce chapitre un certain nombre d'appareils formés de miroirs ou de lentilles, qui ont, en général, pour but de substituer à un objet une image plus avantageuse à regarder, ou à employer dans les expériences d'optique.

Nous réserverons pour le chapitre suivant la description des instruments qui sont plus spécialement employés dans les mesures optiques.

1. PORTE-LUMIÈRE. — HÉLIOSTAT. — On peut toujours à l'aide d'un miroir plan diriger un rayon de direction donnée dans une autre direction donnée. Il suffit évidemment de disposer le miroir de façon que sa normale soit bissectrice de l'angle des deux directions, ce qui est toujours possible. C'est sur ce principe que repose le fonctionnement du *porte-lumière* et des *héliostats*.

Le porte-lumière, qui est très employé dans les expériences d'optique, a pour but de renvoyer les rayons du Soleil dans une direction déterminée, en général horizontale.

Cet instrument se compose (fig. 108) d'un long miroir plan M pouvant tourner à volonté autour de deux axes rectangulaires entre eux, ce qui permet de donner à la normale toutes les directions possibles et de l'amener dans la position voulue. Pour cela, le miroir est porté par un axe soutenu par deux montants; ceux-ci sont fixés à une monture sous forme de roue dentée qui peut tourner elle-même entre deux plaques parallèles reliées

invariablement l'une à l'autre. Ces plaques, qu'on assujettit au volet d'une chambre noire, sont percées d'une large ouverture permettant de recevoir dans la chambre les rayons ré-

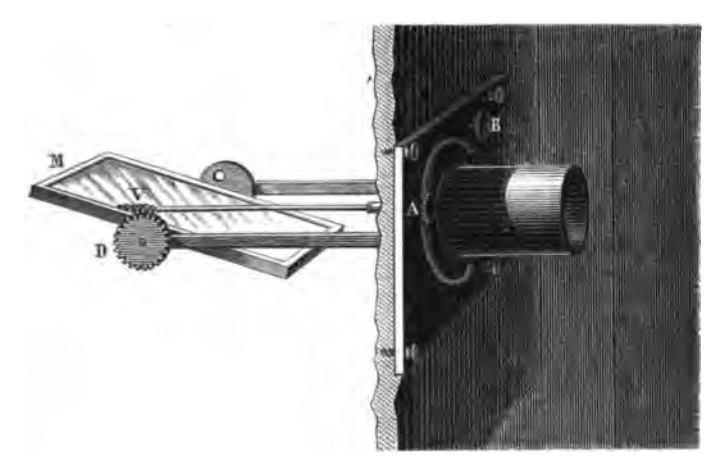


Fig 108.

fléchis par le miroir. Un bouton B commande un pignon agissant sur la roue dentée qui porte les deux montants, et permet ainsi de faire tourner le miroir autour d'un axe perpendiculaire au volet de la chambre noire. Une vis sans fin V, commandée par un second bouton A, engraine dans un pignon D que porte le miroir et permet de faire tourner celui-ci autour d'un axe parallèle au volet.

Le Soleil se déplaçant, on doit de temps en temps toucher aux deux boutons du porte-lumière pour ramener les rayons solaires réflechis dans la direction voulue.

Si l'on veut obtenir une fixité parfaite des rayons réfléchis, il faut se servir d'un instrument nommé *héliostat* (1), qui au

(1) On donne aussi aux héliostats le nom de *sidérostats* ; ils peuvent, en effet, être employés pour maintenir l'image d'un astre quelconque dans une direction déterminée, malgré le mouvement diurne, ce qui est nécessaire dans certains cas, par exemple, lorsqu'on veut en faire une photographie.

moyen d'une horloge maintient la normale du miroir suivant la bissectrice de l'angle que forme la direction fixe, suivant laquelle on veut renvoyer les rayons, avec la direction variable des rayons solaires incidents.

Le premier héliostat a été imaginé par Fahrenheit ; les rayons y subissaient deux réflexions ce qui est un inconvénient ; S'Gravesand, Gambey, Silbermann, Foucault ont successivement construit des héliostats dans lesquels il n'y a qu'un seul miroir (1).

(1) Nous nous bornerons ici à décrire l'héliostat de Foucault le plus parfait de tous.

Donnons-en d'abord le principe. Considérons un miroir plan M (fig. 109) pouvant tourner dans tous les sens autour d'un point O fixe situé dans son plan. Ce miroir porte deux tiges rigides, partant du point O, l'une OP normale au plan du miroir et située par derrière, l'autre OQ dans le plan même du miroir.

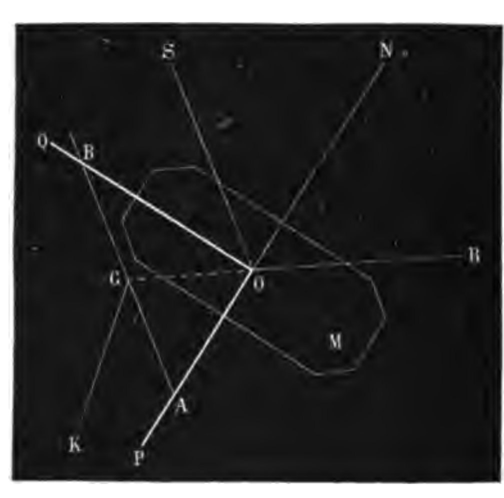


Fig. 109.

Une tige rigide AB, passant par un point fixe C, est assujettie à avoir son extrémité A sur OP et à glisser en B sur OQ ; en outre, la distance constante CA est égale à la distance invariable aussi des points fixes C et O. Il résulte de là que le triangle OCA est isocèle et, par conséquent, que les angles COA et CAO sont égaux entre eux. Or, supposons qu'on ait dirigé primitivement la droite AB suivant la direction des rayons solaires, et que cette droite tourne, d'un mouvement uniforme, autour d'un axe CK parallèle à l'axe de rotation de la Terre, de façon à faire un tour complet en 24 heures : la ligne BA restera constamment dans la direction des rayons solaires Considérons maintenant le rayon solaire SO qui abou-

2. OBJECTIFS. — Un *objectif* est un système convergent, destiné a donner d'un objet une image réelle.

L'objectif peut être constitué par un miroir concave (objectif

tit au point O ; étant parallèle à CA, il forme avec la normale AON un angle d'incidence SON égal à l'angle CAO comme correspondant. L'angle de réflexion RON étant égal à NOS est égal à CAO ou à son égal COA. Comme, en outre, OR est dans le plan d'incidence CAO, on voit que OR est dans le prolongement de la droite fixe CO. Ainsi, les rayons solaires qui tombent parallèlement à SO sont tous renvoyés parallèlement à la direction invariable COR, malgré la rotation apparente du Soleil.

La figure 110 dans laquelle les mêmes lettres représentent les mêmes parties que dans la figure théorique 109, montre comment Foucault a réalisé l'appareil.

Une horloge H fait tourner d'un mouvement uniforme l'axe CK. Cette horloge peut se déplacer de façon à mettre l'axe CK dans le plan méridien, et, comme l'horloge est inclinée afin que l'axe CK fasse avec l'horizon un angle invariable égal à la latitude du lieu où doit servir l'instrument, l'axe CK se trouve alors parallèle à l'axe de rotation de la Terre. La tige rigide ACB peut tourner en C, de manière à lui faire faire avec un plan perpendiculaire à CK et, par conséquent, parallèle à l'équateur un angle égal à la déclinaison du Soleil ; c'est à cela que sert l'arc de cercle gradué G. Cet arc de cercle et la tige ACB sont portés directement par un manchon L qui enveloppe l'axe de rotation KC commandé par le mouvement d'horlogerie, et qui peut en être rendu solidaire au moyen d'une vis de pression *p*. En desserrant celle-ci, on peut faire à volonté tourner autour de KC la tige AB, ce qui permet de l'amener dans la direction des rayons solaires ; en serrant alors la vis de pression *p*, AB reste constamment dans la direction du Soleil, malgré son déplacement.

L'articulation de BCA et de OP est obtenue, au moyen d'un anneau qui glisse sur OP et qui est porté par une fourchette terminant CA et pouvant tourner autour d'un axe que porte l'anneau. L'extrémité B de la tige ACB passe dans une glissière, qui représente la droite OQ.

Le miroir est porté par une fourchette FF' terminant une colonne verticale V. Il peut tourner autour de l'axe horizontal supporté par la fourchette, et autour de l'axe vertical de la colonne. Ces deux axes se rencontrant au point O, le miroir est mobile dans tous les sens autour de ce point fixe.

En général, la droite CO est horizontale, car c'est dans une direction horizontale que, le plus souvent, on désire renvoyer les rayons solaires ; pourtant on peut donner à cette droite CO une direction oblique à l'horizon. A cet effet, la fourchette FF' repose directement sur un manchon V qui peut être soulevé en glissant sur l'axe XO, et fixé à la hauteur voulue ; grâce à la tige articulée UX la figure COXU forme un parallélogramme ; aussi la ligne idéale CO reste-t-elle toujours égale et parallèle à la ligne UX de longueur constante, dont on peut fixer arbitrairement la direction.

catoptrique), par une lentille convergente ou par un système de lentille (objectif *dioptrique*).

Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit au sujet des propriétés des miroirs concaves ; nous ferons remarquer seulement que ce genre d'objectif a, sur les objectifs formés de lentilles, l'avantage de donner des images absolument dépourvues d'irisation. Il n'en est jamais rigoureusement ainsi pour les objectifs dioptriques ; on doit, pour atténuer ce défaut et le rendre insensible, le composer de lentilles achromatiques. Mais les objectifs dioptriques sont d'un emploi plus commode et présentent, en outre, l'avantage d'être moins altérables.

Rappelons que la grandeur et la position de l'image fournie par un système de plusieurs lentilles centrées ne dépend que de la position de ses plans principaux et de la valeur de la distance focale.

Quand le système est composé de plusieurs lentilles très minces et très rapprochées, sa convergence $\left(\frac{1}{F}\right)$ est égale à la somme des convergences des lentilles. Si les lentilles sont convergentes, et si elles sont à une distance les unes des autres notablement inférieure à leur distance focale, même sans être très rapprochées, le système possède évidemment une convergence supérieure à celle de chacune des lentilles ; du reste, les plans principaux d'un pareil système sont peu écartés l'un de l'autre. Au point de vue de la position et de la grandeur des images, un objectif formé ainsi de plusieurs lentilles convergentes centrées est équivalent à une seule lentille plus ou moins épaisse ; mais au point de vue de la netteté des images, il est préférable, quand on a besoin d'un objectif très convergent, de le composer de deux, trois ou quatre lentilles d'assez faible convergence plutôt que d'employer une seule lentille très convergente : les aberrations de sphéricité sont moins grandes.

Pour que les rayons solaires soient renvoyés dans la direction fixe voulue, la colonne verticale V peut se déplacer parallèlement à elle même en tournant autour de l'axe vertical CU ; de cette façon, le point O reste toujours à la même distance du point C, et la ligne COR peut être amenée dans la direction désirée.

On appelle *grossissement linéaire* d'un objectif le rapport qui existe entre une dimension linéaire de l'image et la dimension homologue de l'objet. Nous savons que ce rapport est égal à celui des distances de l'image et de l'objet aux plans principaux correspondants.

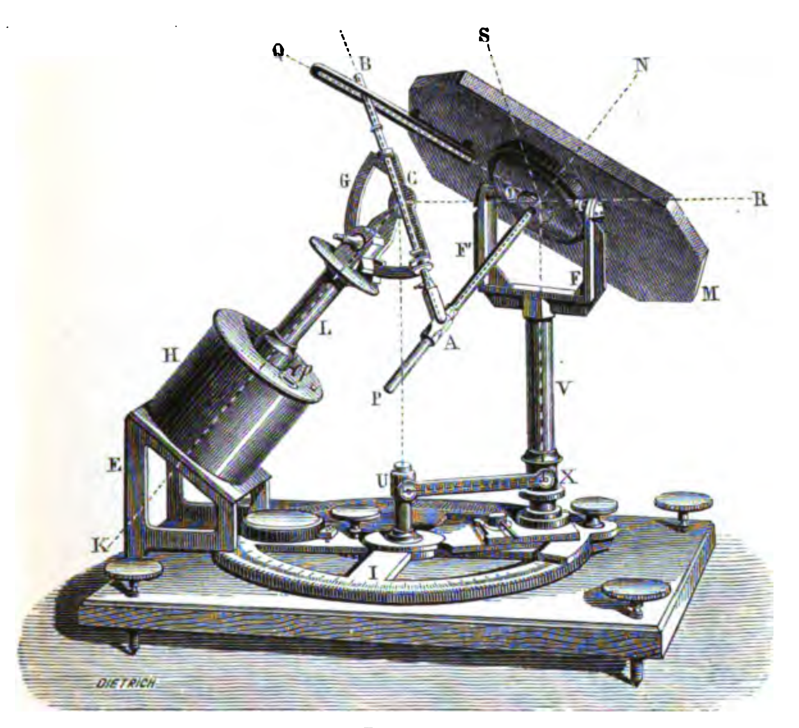


Fig. 110.

Nous allons examiner maintenant quelques appareils dont l'organe essentiel est simplement un objectif.

3. Chambre noire. — La *chambre noire* se compose d'un objectif dioptrique donnant une image réelle et renversée des objets extérieurs ; cette image vient se peindre sur un écran. Pour que cet écran ne soit éclairé que par les rayons qui ont traversé 'objectif, il est placé dans une boite ou chambre à parois

opaques; il est bon de noircir ces parois à l'intérieur pour qu'elles ne réfléchissent ni ne diffusent sur l'écran les rayons qui pourraient les frapper. De là le nom de *chambre noire*.

C'est en écartant plus ou moins l'objectif de l'écran que l'on rend l'image nette, que l'on *met au point*.

La chambre noire peut servir au dessinateur : en faisant tomber l'image réelle sur une feuille de papier, et en suivant le contour de l'image avec un crayon, on produit un dessin fidèle de l'objet.

Mais c'est surtout son emploi pour la photographie qui donne de l'importance à cet instrument. Les objectifs des chambres noires photographiques se composent le plus souvent de deux lentilles convergentes achromatiques de 30 à 40 centimètres de distance focale, placées à une distance de 8 à 10 centimètres l'une de l'autre. Entre elles on dispose un diaphragme percé d'une ouverture circulaire. Ce diaphragme ne diminue pas le champ, mais il diminue l'aberration de sphéricité en ne laissant passer, parmi les rayons issus d'un même point, qu'un faisceau de rayons voisins. Plus l'ouverture du diaphragme est petite, plus les images sont nettes, mais aussi moins elles sont lumineuses, et, toutes choses égales d'ailleurs, la durée de la pose sera d'autant plus longue que le diaphragme a une ouverture plus faible.

4. **APPAREILS DE PROJECTION.** — On se sert beaucoup aujourd'hui, dans les conférences et les cours publics, de projections de photographies ou d'images coloriées sur verre.

L'appareil de projection se compose essentiellement d'un objectif formé d'une seule lentille achromatique de 20 à 25 centimètres de distance focale, qui donne sur un écran éloigné de plusieurs mètres une image réelle renversée et agrandie du dessin sur verre ; celui-ci doit être placé, par conséquent, un peu au delà de la distance focale de l'objectif. Pour que cette image se peigne droite sur l'écran il faut, bien entendu, disposer le dessin dans une position renversée. Comme dans l'appareil précédent, on met au point en réglant convenablement la position de l'objectif, à l'aide d'un pignon et d'une crémaillère.

Si les dimensions linéaires de l'image sont 20 fois celles du

dessin sur verre, la surface de l'image est 400 fois celle du dessin. La lumière qui a traversé un centimètre carré de celui-ci se trouvant répartie sur 400 centimètres carrés, on voit que l'éclairement de l'image ne sera que la fraction $\frac{1}{400}$ de celle de l'objet. D'une façon générale si g est le grossissement linéaire, le rapport de l'éclairement de l'image à celui de l'objet est $\frac{1}{g^2}$. En outre, comme l'image est vue, non directement, mais par diffusion, une grande quantité de lumière est absorbée par l'écran. Aussi, pour que cette image ne soit pas trop sombre il faut éclairer très vivement l'objet. On emploie à cet effet la lumière Drummond, la lumière électrique ou, mieux encore, la lumière solaire.

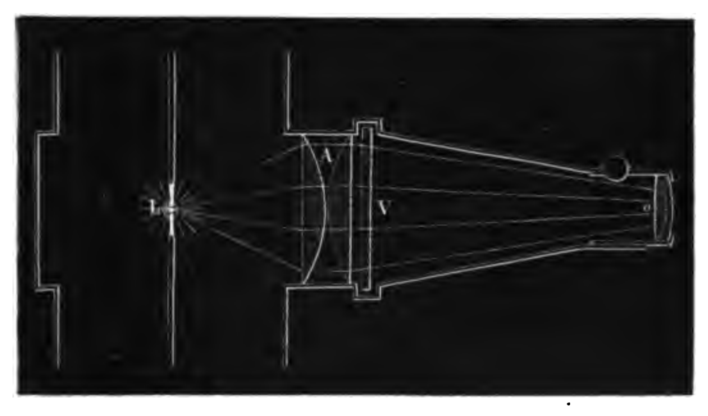


FIG. 111.

Comme une lentille de 20 à 25 centimètres de distance focale, telle que celle qui constitue l'objectif, ne peut dépasser 4 à 5 centimètres de diamètre sans que les aberrations de sphéricité ne viennent nuire à la netteté de l'image, et que le dessin sur verre a souvent une dimension plus considérable, il faut que les rayons qui ont passé à travers le dessin V (fig. 111) convergent vers l'objectif *o* afin qu'ils puissent tous le traverser. Pour

cela, le dessin V est placé contre un système convergent A (*accumulateur*) formé par une ou deux lentilles de grand diamètre que les rayons traversent avant de tomber sur lui. La distance focale de ce système doit être égale environ à sa distance à l'objectif, si l'on emploie comme source de lumière les rayons solaires (renvoyés horizontalement à l'aide d'un porte-lumière). Les rayons qui ont traversé l'accumulateur donnent alors une petite image du Soleil à peu près sur l'objectif, et tous les rayons qui ont traversé le dessin passant ainsi par une très petite portion de cette lentille, l'image est très nette. Si l'on se sert d'une lanterne à lumière Drummond, ou à lumière électrique L (fig. 111), il faut un système éclairant plus convergent, de façon à former encore sur l'objectif une image de la source lumineuse qui est près de l'accumulateur (1).

La *lanterne magique* est un appareil de projection à peu près

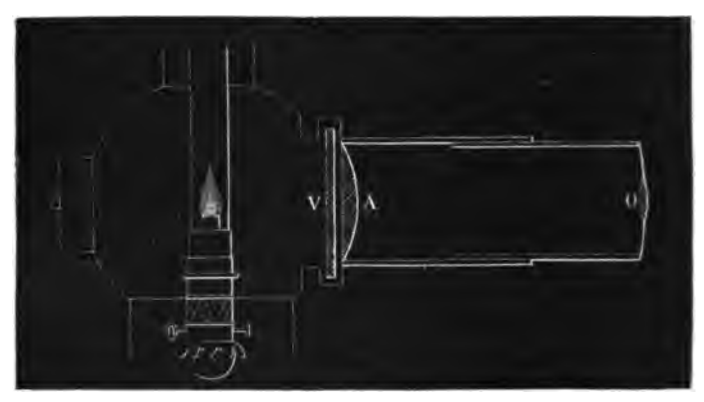


Fig. 112.

analogue à celui que nous venons de décrire. La plus grande différence tient à ce que l'accumulateur A (fig. 112) est formé

(1) Ces accumulateurs sont le plus souvent formés, dans ce cas, par deux lentilles plan-convexes A (fig. 111), qui se touchent par leurs faces bombées. Il est évident que les lentilles des accumulateurs n'ont pas besoin d'être achromatiques, ni même d'être bien parfaites.

par une seule lentille plan-convexe très bombée, placée derrière le dessin sur verre V (et non en avant, comme dans les bons appareils de projection) et tournant sa face bombée du côté de l'objectif O. Cette lentille A donne du dessin sur verre, qui est placé contre elle, une image virtuelle occupant à peu près la même position que l'objet; ainsi, elle modifie peu par sa présence la position et la grandeur de l'image donnée par l'objectif: elle ne joue que le rôle d'accumulateur en faisant converger sur celui-ci les rayons qui ont traversé le dessin sur verre V. Ordinairement l'objectif n'est pas achromatisé, les lanternes magiques étant des appareils assez grossiers, en général, dont le bon marché est le principal mérite.

5. **MICROSCOPE SOLAIRE.** — Le *microscope solaire* [1] est un appareil de projection qui est destiné à donner des images très agrandies de très petits objets transparents.

Si nous désignons par f la distance focale de l'objectif, par p et par l les distances de l'objet et de l'image aux plans principaux correspondants de cet objectif, on a la relation :

$$(1) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$$

d'autre part, le grossissement g a pour valeur:

$$(2) \qquad g = \frac{l}{p}$$

d'où :

$$(3) \qquad g = \frac{l}{f} - 1$$

Ce grossissement est d'autant plus grand que la distance l de l'écran à l'objectif est plus considérable. Comme on est limité, pour cette distance, par la dimension de la pièce dans laquelle on opère, on voit que, si l'on veut obtenir de très forts grossis-

(1) De μικρος *petit* et de σκοπέω *je regarde.*

sements, il faut prendre des objectifs très convergents, de façon que f soit très petit.

Aussi les objectifs des microscopes solaires (fig. 113) sont-ils

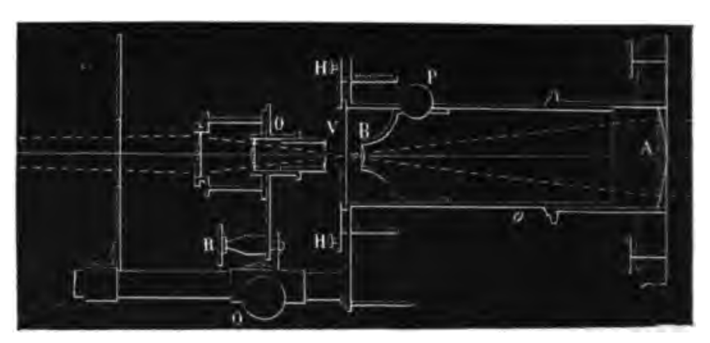


Fig. 113.

formés de trois à quatre lentilles convergentes centrées assez rapprochées l'une de l'autre; chacune de ces lentilles doit être achromatique (1).

(1) Dans les objectifs des microscopes solaires, ainsi que dans ceux des microscopes composés, qui leur sont presque identiques, la première lentille doit donner de l'objet une image virtuelle qui fonctionne comme objet réel vis-à-vis de la lentille suivante. Il faut, par conséquent, que l'objet soit placé très près de la première lentille. Or, comme on donne une surface relativement assez étendue aux lentilles objectives, il en résulte que les rayons issus d'un point de l'objet et qui tombent sur la première lentille forment un cône d'angle considérable: ainsi, les rayons incidents extrêmes font entre eux un angle qui peut aller jusqu'à 170°. Ce grand *angle d'ouverture* est non seulement avantageux pour admettre plus de rayons dans l'instrument, et avoir ainsi une clarté plus grande, mais aussi, en permettant l'introduction de rayons qui ont traversé très obliquement l'objet, des détails, des stries par exemple, qui ne seraient pas vus avec les rayons normaux, deviennent visibles: le *pouvoir analysant* augmente avec l'angle d'ouverture.

Mais, dans le cas de rayons faisant des angles de 85° avec l'axe principal, on est bien loin de la théorie élémentaire des lentilles où l'on suppose que les rayons ne font entre eux que de très petits angles, et l'on devrait s'attendre à avoir des images très déformées par les aberrations de sphéricité. Pourtant les constructeurs de microscopes sont arrivés à obtenir des ob-

Pour donner une idée du grossissement qu'on peut obtenir avec le microscope solaire, supposons que la distance focale soit 5 millimètres, et que l'écran soit placé à une distance de 5 mètres ; on aura $l = 500$ $f = 0,5$, le grossissement sera $\frac{500}{0,5} - 1 = 999$ (mille environ). On peut même obtenir facilement des grossissements plus considérables.

Si le grossissement linéaire est 1000, l'*éclairement* de l'image ne sera que la millionième partie de celle de l'objet ; aussi pour que l'image soit suffisamment éclairée il faut que l'objet soit traversé par une grande quantité de lumière. On l'éclaire généralement à l'aide des rayons directs du Soleil, d'où le nom de microscope *solaire*. Ces rayons sont renvoyés sur l'objet par un porte-lumière, et un système de deux lentilles convergentes A et B, la première de grand diamètre, la seconde d'un

jectifs d'un aplanétisme presque parfait. Ils sont formés de lentilles plan-convexes tournant toutes leur face plane vers l'objet et ayant des distances focales et des diamètres croissant à mesure qu'elles sont placées plus loin de lui.

La raison de cet aplanétisme, qui peut paraître surprenant, a été donnée par le botaniste anglais Jackson Lister en 1830. Nous avons vu (Chap. IV § 4) qu'une lentille plan-convexe est aplanétique pour deux points placés sur son axe principal, du côté de la face plane, l'un M au delà du foyer, l'autre N entre le foyer et la lentille ; entre ces deux points, l'aberration longitudinale est positive, en dehors, elle est négative. Supposons d'abord un objectif formé de deux lentilles seulement. Disposons l'objet AB entre la première lentille et son point N ; après avoir traversé cette lentille, les rayons centraux donnent de AB une image virtuelle A'B', et les rayons marginaux une autre image virtuelle $A'_1B'_1$ située plus près de la lentille. Plaçons maintenant la seconde lentille de façon que ces images très rapprochées A'B' et $A'_1B'_1$ tombent entre son foyer et son point M ; les rayons centraux et marginaux pour la première lentille restent centraux et marginaux pour la seconde, et celle-ci donne de $A'_1B'_1$, par les rayons marginaux, une image réelle qui peut occuper la même place que l'image réelle de A'B' qu'elle donne par les rayons centraux, les aberrations de la seconde lentille compensant la différence de distance de A'B' et de $A'_1B'_1$ si les deux lentilles sont convenablement placées.

On conçoit sans peine qu'on puisse de même calculer la distance et la courbure des lentilles pour des objectifs composés de trois ou quatre verres. Aussi cette observation de Lister a-t-elle été le point de départ de progrès très importants dans l'aplanétisme des objectifs de microscope.

diamètre moindre, fait converger le faisceau sur le très petit objet qui doit être grossi. Ces deux lentilles A et B donnent une image réelle très petite du Soleil; il est bon que cette image coïncide à peu près avec la première lentille de l'objectif O, et soit voisine, par conséquent, de l'objet V, pour que celui-ci soit vivement éclairé. A cet effet, la lentille B, appelée *focus*, peut être un peu déplacée, au gré de l'opérateur, au moyen d'un pignon P et d'une crémaillère.

L'objet V est généralement placé entre deux verres, qui sont pincés entre deux plaques métalliques à ressorts HH percées de deux trous circulaires en regard centrés sur l'axe principal de l'appareil : c'est le *porte-objet*.

La mise au point se fait, comme dans tous les appareils de projection, en faisant varier la distance de l'objectif à l'objet. Si cette distance est le double de la distance focale, on sait que l'image de l'objet se fera nette à la même distance, c'est à dire beaucoup trop près; si maintenant on rapproche l'objectif de l'objet d'une longueur égale à la distance focale, de façon à placer l'objet précisément dans le plan focal, l'image se formera nette à l'infini, trop loin, par conséquent. On voit qu'un petit déplacement de l'objectif donne un très grand déplacement de l'image. Aussi, afin de pouvoir amener l'objectif juste à la position convenable pour avoir une image nette sur l'écran fixe, l'opérateur peut-il donner à cet objectif un très petit mouvement à l'aide d'un pignon Q et d'une crémaillère, et même, pour parfaire la mise au point, à l'aide d'une vis de rappel R.

Le microscope solaire est précieux pour montrer de très petits objets à tout un auditoire ; mais il laisse toujours un peu à désirer sous le rapport de la netteté des images et, par là est inférieur au microscope composé, d'un emploi beaucoup plus commode du reste.

6. OCULAIRES. — Un *oculaire* est un petit système optique, formé d'une ou de plusieurs lentilles centrées, qui se place près de l'œil et à travers lequel on regarde un objet ou une image réelle fournie par un objectif, qui fonctionne par rapport à l'oculaire soit comme un objet réel, soit comme un objet virtuel.

L'oculaire donne de cet objet une image le plus souvent virtuelle (1) que l'œil regarde.

On appelle oculaires *positifs* ceux qui sont déstinés à regarder des objets réels. A l'exception des lentilles divergentes qui servent à corriger la myopie, ces oculaires sont tous convergents.

On appelle oculaires *négatifs* ceux qui sont destinés à regarder des objets virtuels. Ils peuvent être divisés en deux catégories : 1° — les oculaires négatifs *convergents* (comme l'oculaire d'Huyghens) ; — 2° les oculaires négatifs *divergents* comme l'oculaire de la lunette de Galilée.

Rappelons que le système optique qui constitue un oculaire peut être remplacé, pour la construction des images, par ses deux plans principaux et ses deux foyers, les points nodaux étant confondus avec les points principaux. Cette simplification permet d'établir un certain nombre de propriétés générales.

Quand un oculaire est composé de plusieurs lentilles et qu'il doit être associé à un objectif dans un instrument composé, on donne, en général, aux lentilles de l'oculaire un diamètre tel que tous les rayons qui ont traversé l'objectif et la première lentille de l'oculaire traversent aussi les lentilles suivantes. Tout en ayant égard à cette condition, on peut souvent donner aux lentilles qui suivent la première un diamètre plus petit, à cause de la convergence que la première lentille oculaire produit sur les rayons.

7. PUISSANCE D'UN OCULAIRE. — GROSSISSEMENT. — La *puissance* d'un oculaire est l'angle sous lequel on voit au travers une dimension linéaire de l'objet égale à l'unité de longueur, en choisissant cette unité assez petite pour que l'angle dont il s'agit puisse être confondu avec son sinus ou sa tangente. D'après cela, en désignant par P la puissance d'un oculaire, et par l la longueur très petite d'un objet réel ou virtuel, lP est l'angle sous lequel on voit l'objet à travers l'oculaire. C'est de la puissance que dépend la grandeur de l'image rétinienne :

(1) Dans le cas d'un œil hypermétrope, l'image fournie par l'oculaire peut être réelle et fonctionner par rapport à l'œil comme un objet virtuel.

plus la puissance est grande, plus *on voit gros* à travers l'oculaire.



Fig. 114.

Considérons, en particulier, un oculaire convergent, et prenons le cas le plus général qui peut se présenter : l'œil est disposé pour voir à une distance *d* et son point nodal antérieur O (fig. 114) est placé à une distance *e* du point nodal postérieur N_2 de l'oculaire. L'image virtuelle A'B' d'un objet AB est vue sous l'angle A'OB', et la puissance P de l'oculaire est égale à la valeur trigonométrique de cet angle, si AB est égal à l'unité.

Or, on a :

$$(1) \qquad \operatorname{tang} P = \frac{A'B'}{B'O} = \frac{A'B'}{AB} \cdot \frac{AB}{B'O} = \frac{B'N_2}{BN_1} \cdot \frac{AB}{B'O}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{BN_1} - \frac{1}{B'N_2} = \frac{1}{f}$$

en désignant par f la distance focale de l'oculaire ; d'où :

$$(2) \qquad \frac{B'N_2}{BN_1} = 1 + \frac{B'N_2}{f}$$

en substituant cette valeur dans (1), en remplaçant $B'N_2$ par sa

valeur $d - e$, B'O par d, AB par l'unité, et, enfin, en confondant tang P avec l'angle P, il vient :

$$(3) \qquad P = \left(1 + \frac{d-e}{f}\right)\frac{1}{d} = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{e}{f}\right) + \frac{1}{f}$$

Or, nous verrons (§14) que, quand un oculaire convergent fait partie d'un instrument d'optique, il faut, pour que l'œil soit bien placé, que son point nodal soit très voisin du foyer postérieur de l'oculaire. Dans ce cas, $\frac{e}{f}$ étant à peu près égal à l'unité, et $\frac{1}{d}$ toujours petit par rapport à $\frac{1}{f}$, le premier terme de l'expression de la puissance est tout à fait négligeable devant le second ; la puissance est alors indépendante de d c'est-à-dire de la vue de l'observateur, puis qu'on a sensiblement :

$$P = \frac{1}{f}$$

la puissance égale la convergence de l'oculaire.

Cette dernière proposition reste rigoureuse, quel que soit e, si l'œil de l'observateur est disposé pour voir à l'infini ($d = \infty$) ; aussi pour calculer la puissance d'un oculaire, supposerons-nous toujours l'œil disposé pour voir à l'infini.

Quand l'oculaire est formé d'une seule lentille (*loupe*), l'inverse de la distance focale donne immédiatement la valeur de la puissance.

Quand l'oculaire est composé de plusieurs lentilles, la dernière lentille, celle placée le plus près de l'œil sert de loupe pour regarder l'image réelle ou virtuelle de l'objet donnée par l'autre lentille ou l'ensemble des autres lentilles. Dans ce cas, pour calculer la puissance, le procédé le plus simple consiste à chercher la grandeur l de l'image fournie par les premières lentilles d'un objet de longueur égale à l'unité, et placé de façon que cette image soit dans le plan focal de la dernière lentille ; en désignant par r la distance focale de celle-ci, la puissance de cette loupe est $\frac{1}{r}$, et l'image de l'objet de longueur-unité

est vue sous l'angle $\frac{l}{r}$ par un œil accommodé pour la vision à l'infini; telle est donc la puissance de l'oculaire.

On appelle *grossissement* G de l'oculaire, le rapport entre la puissance de l'oculaire P et la puissance maxima P_1 de l'œil de l'observateur :

$$(1) \qquad G = \frac{P}{P_1}$$

Autrement dit, le grossissement est le rapport entre l'angle sous lequel on voit l'image de l'objet, fournie par l'oculaire à l'angle sous lequel on verrait à l'œil nu l'objet lui-même *placé à la distance minima* D *de vision distincte.*

Comme la puissance maxima de l'œil P_1 est égale à $\frac{1}{D}$; la formule (1) devient :

$$(2) \qquad G = PD$$

Le grossissement dépend de l'oculaire et de la vue de l'observateur. Puisque la puissance P est à peu près indépendante de la vue de celui-ci, on voit que, pour un même oculaire convergent, le grossissement est plus faible pour les vues myopes que pour les vues normales, puisque D est plus petit dans le premier cas, puisque la puissance maxima P_1 de l'œil myope est plus grande que celle de l'œil normal. Le grossissement représente, en quelque sorte, l'avantage que l'on a à se servir de l'oculaire : les myopes ont moins besoin d'un oculaire convergent que les personnes à vue longue.

8. MISE AU POINT D'UN OCULAIRE CONVERGENT. — Pour voir nettement à travers un oculaire, il faut que l'image qu'il fournit soit placée en deçà de la distance maxima et au delà de la distance minima de vision distincte.

Nous allons nous occuper ici, et dans les paragraphes suivants, des oculaires convergents, positifs ou négatifs; nous nous occuperons de l'oculaire divergent à propos de la lunette de Galilée.

En plaçant l'objet dans le premier plan focal d'un oculaire

convergent, l'image est à l'infini; elle est, par conséquent, convenablement placée pour être vue par un œil normal.

En rapprochant l'objet de façon à le placer entre le premier plan focal et le plan principal correspondant, l'image devient virtuelle; or, on peut toujours, en donnant une position convenable à l'objet, amener cette image à se former en deçà du maximum de vision distincte d'un œil si myope qu'il soit.

En éloignant l'objet un peu au delà du plan focal, au contraire, l'image devient réelle et peut encore être vue par un œil hypermétrope, si elle n'est pas trop près de l'œil, pour lequel cette image fonctionne comme objet virtuel.

La mise au point se fait donc en faisant varier la distance de l'objet à l'oculaire; par tâtonnement on arrive rapidement à donner à cette distance une valeur qui rend la vision parfaitement nette.

Comme l'œil peut s'accommoder de façon à voir à différentes distances, la distance de l'objet au premier plan principal peut varier entre deux limites p_1 et p_2 sans que la vision cesse d'être nette. Mais nous allons montrer que ces limites p_1 et p_2 sont d'autant plus voisines que l'oculaire est plus puissant.

Désignons par p la distance de l'objet au premier plan principal, par d la distance de l'image au second plan principal, et convenons de regarder d comme une quantité positive si l'image est virtuelle et négative dans le cas contraire. Cette quantité d représente la distance au point nodal de l'œil de l'image fournie par l'oculaire diminuée de la distance toujours petite du point nodal de l'œil au second point nodal de l'oculaire. Désignons enfin par f la distance focale de l'oculaire et par P sa puissance.

On a :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f} = P \tag{1}$$

d'où :

$$p = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{1}{f}} \tag{2}$$

Comme f est toujours petit vis à vis de d quand l'objet est au point, $\frac{1}{d}$ est petit vis à vis de $\frac{1}{f}$, par conséquent, la formule ci-dessus montre que p est voisin de f : *l'objet mis au point est toujours dans le voisinage du plan focal.*

Si d varie, sans que la vision cesse d'être nette, entre deux limites d_1 et d_2, on voit que les deux valeurs de p correspondantes p_1 et p_2 sont d'autant plus voisines que la puissance $P = \frac{1}{f}$ est plus grande, puisqu'on a :

$$(3) \qquad p_1 - p_2 = \frac{d_1 - d_2}{\left(1 + \frac{d_1}{f}\right)\left(1 + \frac{d_2}{f}\right)}$$

Cette quantité $p_1 - p_2$ représente en profondeur, suivant l'axe de l'oculaire, la portion de l'objet qu'on peut voir nettement sans déplacer celui-ci, mais en faisant varier l'accommodation, ce qui se fait très rapidement ; c'est, en quelque sorte la *latitude d'accommodation* pour les objets vus à travers l'oculaire : elle est d'autant plus faible que la puissance est plus grande.

Il est à remarquer que, quel que soit l'oculaire convergent, loupe mince ou épaisse, doublet, oculaire composé ou même microscope composé quelconque, pour une même puissance $P = \frac{1}{f}$ et pour une même vue, c'est-à-dire pour les mêmes valeurs de d_1 et de d_2, cette latitude d'accommodation $(p_1 - p_2)$ est la même d'après la formule (3).

9. ACHROMATISME DES OCULAIRES POSITIFS. — On n'achromatise pas, en général, les lentilles des oculaires convergents ; ce n'est pas très utile, en effet, car ils donnent avec des lentilles non achromatiques des images à peu près dépourvues d'irisation quand l'œil est convenablement placé. Plus loin nous examinerons à ce point de vue le cas où l'oculaire est associé à un objectif dioptrique. Nous nous bornerons ici au cas où l'oculaire est positif et sert à regarder un objet réel dépourvu

d'irisation tel qu'un objet matériel ou l'image réelle donnée par un miroir concave.

L'oculaire convergent, que ce soit une loupe ou qu'il soit formé de plusieurs lentilles, a une distance focale d'autant plus petite que la réfrangibilité de la couleur considérée est plus grande. Si donc l'objet est placé de façon à donner une image virtuelle, celle-ci sera d'autant plus éloignée et d'autant plus grande que la couleur qui éclaire l'objet est plus réfrangible.

Supposons un objet blanc sur fond noir; ses images dans les diverses couleurs simples seront séparées, l'image violette étant la plus grande et la plus éloignée. Si l'œil est placé loin de l'oculaire, l'image violette sera vue sous un angle plus grand que l'image rouge; l'image rétinienne violette débordera l'image rouge: l'objet blanc sur fond noir vu à travers l'oculaire paraîtra blanc au milieu où il y a superposition des images dans toutes les couleurs, mais bordé d'une zône bleue passant au violet sur le bord extrême où manquent les autres couleurs du spectre.

Dans le cas d'un objet noir sur fond blanc, la partie noire sera bordée d'une zone jaune-rouge pour des raisons semblables.

Mais, si l'on approche de plus en plus l'œil de l'oculaire, cette irisation diminue de plus en plus et devient insensible quand l'œil est très près de l'oculaire. Les images d'un même point dans le jaune et le bleu, en effet, sont sur une ligne droite qui coupe l'axe principal en un certain point K, toujours assez voisin de l'oculaire. Si donc le point nodal de l'œil pouvait coïncider avec K, les images d'un même point dans le jaune et le bleu se confondraient sur la rétine: toute irisation disparaîtrait [1].

Si l'on ne peut faire coïncider exactement le point nodal de

(1) Dans le cas d'une lentille infiniment mince, le centre optique se confond avec les points nodaux pour toutes les couleurs, et les images d'un même point dans les diverses couleurs sont rigoureusement en ligne droite : le point K est le centre optique. Pour une lentille épaisse ou pour un système optique quelconque dont les deux plans principaux ne sont pas confondus, il y a un système différent de points nodaux et, par conséquent, un axe secondaire différent pour chaque couleur : la position du point K varie un peu suivant le point objet considéré.

l'œil avec les divers points K correspondant aux divers points de l'objet, du moins en mettant l'œil près de l'oculaire, l'irisation est assez diminuée pour devenir insensible.

Après ces généralités, nous allons décrire quelques-uns des oculaires les plus employés.

10. LOUPE. — On donne le nom de *loupe, d'oculaire simple,* ou *d'oculaire de Képler* à un oculaire formé d'une seule lentille plus ou moins épaisse.

Nous n'avons rien à ajouter pour la théorie de la loupe à ce qui a été dit aux généralités sur les oculaires. Nous ferons remarquer seulement, qu'on a avantage à placer l'œil très près de la loupe, non seulement pour éviter l'irisation des images, mais aussi pour voir une plus grande surface de l'objet qu'on regarde, pour avoir un *champ* plus considérable, quand la loupe a un petit diamètre.



FIG. 115.

Les loupes sont des lentilles biconvexes en général; plus les faces sont bombées, plus la loupe est puissante, mais plus aussi les aberrations deviennent considérables.

Pour éviter cet inconvénient Wollaston [1], en 1813, a imaginé la disposition suivante : une sphère de verre est coupée en deux par un plan diamétral; puis

(1) William Hyde-Wollaston, né à Londres le 16 avril 1766, mort en 1828.

les deux parties sont séparées par un diaphragme présentant une ouverture d'un diamètre égal environ au tiers de celui de la sphère (fig. 115). Cette disposition ne diminue pas beaucoup le champ de l'instrument, et, ne laissant passer que les rayons voisins du centre, diminue l'aberration de sphéricité.

La loupe de Brewster (1), dite *Coddington*, la plus employée aujourd'hui par les naturalistes, n'est qu'une modification de celle de Wollaston : la sphère est simplement creusée d'une rainure profonde (fig. 116), qui produit le même effet que le diaphragme. En outre, on ne conserve de la sphère que la partie utile comprise dans un cylindre de diamètre égal environ aux $\frac{2}{3}$ de celui de la sphère.

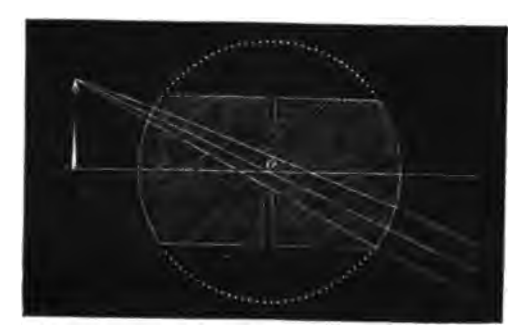


Fig. 116.

Dans de pareilles loupes, tout rayon se dirigeant vers le centre de la sphère la traverse sans déviation : les deux points nodaux et le centre optique sont confondus avec le centre de la sphère. Les deux plans principaux sont donc aussi confondus.

11. DOUBLET DE WOLLASTON. — LOUPE MONTÉE. — Comme pour les objectifs, on diminue l'aberration de sphéricité des oculaires en les composant de deux lentilles. Le *doublet de Wollaston* (1820), très souvent employé pour regarder de petits objets, se compose de deux lentilles plan-convexes centrées tournant chacune leur face plane vers l'objet. La première len-

(1) David Breswster est né à Sedburg (Ecosse) le 11 décembre 1781.

tille L a une distance focale r qui est le tiers de la distance focale de la seconde L′ ; les diamètres sont à peu près dans le même rapport de 1 à 3; la distance CC′ des deux lentilles est égale à $\frac{3}{2}r$.



FIG. 117.

Quand l'oculaire est mis au point, la première lentille L (fig. 117) donne de l'objet AB une image virtuelle A′B′, et cette image fonctionne comme objet réel par rapport à la lentille L′, placée près de l'œil, qui est une loupe destinée à la regarder. L'image A′B′ fournie par la première lentille doit donc tomber à peu près dans le plan focal de la seconde lentille, exactement si l'œil est disposé pour voir à l'infini.

Supposons qu'il en soit ainsi; dans ce cas l'image A′B′, pour se trouver dans le plan focal de L′, doit tomber à une distance de L égale à $\frac{3}{2}r$; il faut donc placer l'objet AB à une distance p de L donnée par :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{3}{2}r} = \frac{1}{r} \qquad \text{d'où :} \qquad p = \frac{3}{5}r$$

Le rapport $\frac{A'B'}{AB}$ entre les dimensions linéaires de l'image et de

l'objet est donc : $\dfrac{\dfrac{3}{2}r}{\dfrac{3}{5}r} = \dfrac{5}{2}$; si AB est égal à l'unité, la grandeur de A'B' est $\dfrac{5}{2}$, et l'angle sous lequel l'œil accommodé pour la vision à l'infini voit cette image à travers la loupe L' de distance focale $3r$ est

$$\frac{5}{2}\frac{1}{3r} = \frac{5}{6}\frac{1}{r}$$

on a donc pour la puissance P du doublet (voir § 7) :

$$P = \frac{5}{6}\frac{1}{r}$$

Les deux lentilles du doublet de Wollaston sont portées, le plus souvent, par deux montures distinctes, dont l'une peut être vissée sur l'autre (fig. 118) (1); on peut ainsi faire varier légèrement la distance de ces deux lentilles, et chaque observateur peut la régler au mieux pour sa vue.

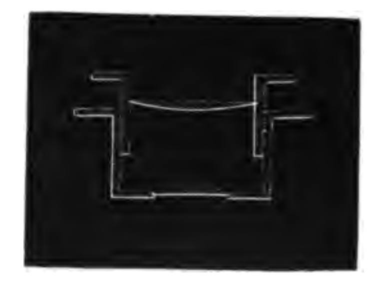


Fig. 118.

On désigne sous le nom de *loupe montée* une loupe ou mieux un doublet D (fig. 119) monté sur un pied, et destiné à regarder de petits objets placés sur le porte-objet P. La pièce qui porte le doublet peut recevoir à l'aide d'un pignon B et d'une crémaillère

(1) C'est par erreur que sur la figure 118 les deux lentilles tournent l'une vers l'autre leur convexité : la lentille supérieure devrait présenter sa convexité vers le haut.

un petit mouvement vertical, et, en agissant sur la tête A d'une vis, on peut donner un petit déplacement horizontal au doublet pour mettre l'objet dans le champ. Un miroir M sert à éclairer l'objet par-dessous.

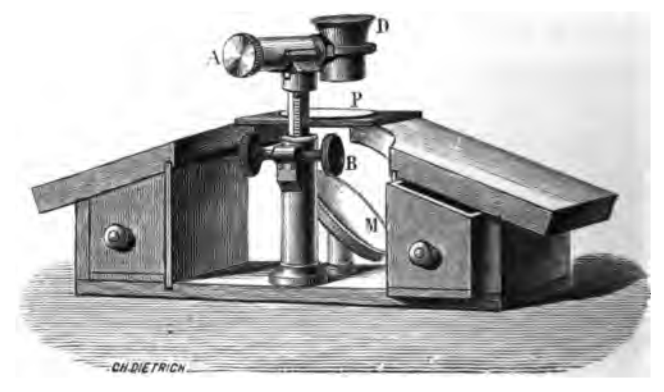


Fig. 119.

Cet instrument est surtout employé par les naturalistes, pour les dissections fines.

12. Oculaire de Ramsden. — Parmi les oculaires positifs, nous décrirons encore l'oculaire de Ramsden, le meilleur et le plus employé dansles instruments composés.



Fig. 120.

Cet oculaire est formé de deux lentilles plan-convexes centrées L et L' (fig. 120), de même distance focale r, placées à une dis-

tance CC' égale aux deux tiers de cette distance focale r, les faces bombées étant en regard.

De même que pour le doublet de Wollaston, la lentille L tournée vers l'objet AB en donne une image virtuelle A'B', qui fonctionne comme un objet réel par rapport à la lentille L' placée près de l'œil. En raisonnant comme dans le cas du doublet, on trouve immédiatement que, si l'œil est accommodé pour voir à l'infini,



Fig. 121.

l'objet AB doit être placé à une distance de L égale à $\frac{r}{4}$, afin que A'B' soit placé à une distance de L égale à $\frac{r}{3}$, c'est-à-dire dans le plan focal de L'; par conséquent, la puissance P de cet oculaire est donnée par :

$$P = \frac{\frac{r}{3}}{\frac{r}{4}} \frac{1}{r} = \frac{4}{3} \frac{1}{r} \quad (1)$$

Cet oculaire présente moins d'aberration de sphéricité et, par conséquent, donne des images plus nettes qu'un oculaire de

(1) Le système optique constitué par l'oculaire de Ramsden a chacun de ses foyers principaux F_1 et F_2 (fig. 121) à une distance $CF_1 = C'F_2 = \frac{r}{4}$ des lentilles L et L', puisque nous venons de voir que c'est à cette distance qu'il faut placer l'objet pour que l'image se forme à l'infini. Pour trouver la position des plans principaux du système, reportons-nous au paragraphe

Képler de même puissance. En outre, nous verrons qu'il donne, à puissance égale, un champ plus vaste que l'oculaire de Képler et surtout que le doublet de Wollaston quand il est employé,

23 du chapitre III ; la formule (6) donne pour la distance a du plan principal à la dernière surface réfringente ici la lentille L'

$$a = F\left(1 - \frac{\varphi}{\Psi}\right)$$

Or, on a dans ce cas :

$$F = CF \quad \frac{r}{4} \qquad \varphi = CR = r \qquad \Psi = C'R = \frac{r}{3}$$

d'où

$$a = \frac{r}{4}\left(1 - 3\right) = -\frac{r}{2}$$

Le plan principal P_2N_2 est donc en avant de la lentille L' à une distance égale à la moitié de sa distance focale. Le plan principal P_1N_1, pour la même raison, est en arrière de L et à la même distance $\frac{r}{2}$. Le premier plan principal P_1 est ici en arrière du second plan principal P_2.

La distance focale $N_1F_1 = N_2F_2 = f$ de co système est égale à

$$N_1C + CF_1 = \frac{r}{2} + \frac{r}{4} = \frac{3}{4}r$$

Ce qui donne bien pour la puissance $P = \frac{4}{3}\frac{1}{r}$, comme nous l'avons trouvé dans le texte.

Au lieu de faire application des formules du § 23, il est plus commode, en général, de procéder de la manière suivante, pour trouver les plans principaux d'un système oculaire quelconque : comme nous l'avons fait pour l'oculaire de Ramsden, on cherche directement d'après la position des lentilles et d'après leurs distances focales 1° — la position des deux foyers du système oculaire, 2° — sa puissance P pour un œil accommodé pour voir à l'infini. La formule $P = \frac{1}{f}$ fait connaître alors la distance focale f et, comme on connaît la position des deux foyers, on en déduit la position des deux plans principaux, puisqu'ils sont à une distance égale à f des foyers correspondants.

dans un instrument composé, à regarder l'image réelle fournie par un objectif. Comme il permet de voir un réticule, il est presque exclusivement employé dans les lunettes astronomiques servant à faire des visées.

13. OCULAIRE D'HUYGHENS. — L'oculaire négatif, imaginé par Huyghens, est peut être le plus parfait et le plus employé des oculaires. Il consiste en deux lentilles plan-convexes L et L' (fig. 122) tournant leurs faces planes du côté de l'œil. La première des lentilles L, celle qui est tournée du côté où arrive la lumière, a une distance focale φ un peu supérieure à la distance α des deux lentilles ; la deuxième L' a une distance focale r inférieure à α.



FIG. 122.

La disposition qui a paru la plus avantageuse à l'opticien anglais Dollond est la suivante : $\varphi = 3r$, $\alpha = 2r$; mais souvent, suivant les applications, on altère un peu ces proportions. C'est ainsi que pour l'oculaire négatif du microscope, on prend en général pour φ une valeur peu supérieure à $2r$ ou α. Dans les calculs sur l'oculaire d'Huyghens, nous adopterons les proportions de Dollond.

L'objet virtuel AB doit être placé de telle façon que la lentille L en donne une image réelle A'B', située vers le plan focal de la lentille L', qui sert de loupe pour regarder A'B'. Si l'œil est disposé pour voir à l'infini, A'B' doit être exactement dans le plan focal de L', à distance égale ($=r$) des deux lentilles. Dans ce cas, en appelant b la distance CA de l'objet à la lentille L on a :

$$-\frac{1}{b}+\frac{1}{r}=\frac{1}{3r}$$

d'où :

$$b = \frac{3}{2} r$$

l'objet virtuel doit être placé plus près de la seconde lentille au quart de la distance qui la sépare de la première.

Si AB est l'unité de longueur $\frac{A'B'}{C'A'}$ est la valeur de la puissance P de l'oculaire : or $CA' = r$ et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{r}{\frac{3}{2} r} = \frac{2}{3}$;

d'où :

$$P = \frac{2}{3} \frac{1}{r} \text{ (1)}$$

(1) Comme nous venons de le voir, le premier foyer F_1 (fig. 123) du système optique formé par l'oculaire d'Huyghens est à une distance $\frac{3}{2} r$ en arrière de la première lentille L, puisque c'est à cette distance que doit être placé l'objet virtuel pour que l'oculaire en donne une image à l'infini.

Fig. 123.

Quant au second foyer F_2, il est placé à une distance F derrière la deuxième lentille L' donnée, puisque c'est l'image du foyer R de la première lentille, par

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{F} = \frac{1}{r}$$

d'où :

$$F = \frac{r}{2}$$

Cet oculaire présente l'avantage, comme nous le verrons plus loin, de donner un champ considérable aux instruments d'optique composés où il est employé, et de corriger la courbure de l'image fournie par l'objectif au lieu de l'exagérer comme le fait l'oculaire de Képler.

Aussi se sert-on de l'oculaire d'Huyghens, de préférence même à l'oculaire de Ramsden, dans les microscopes et les lunettes quand celles-ci ne servent pas à viser. On ne peut pas, en effet, viser un réticule réel avec cet oculaire, puisqu'il ne permet de voir que des objets virtuels (1).

14. MICROSCOPE COMPOSÉ. — 1° PRINCIPE ET DESCRIPTION. — Le *microscope composé*, ou simplement *microscope*, est un oculaire positif très puissant; il se compose : 1° — d'un objectif, sembable à celui du microscope solaire, destiné à donner d'un petit objet une image réelle renversée et très grande; 2° — d'un oculaire destiné

La distance focale f du système est donnée par $f = \frac{1}{P} = \frac{3}{2}r$; par conséquent, le premier plan principal P est situé à la distance $\frac{3}{2}r$ du premier foyer F_1, c'est-à-dire à une distance r derrière la seconde lentille L' ; il passe donc par le foyer R commun aux deux lentilles. Le second plan principal, étant situé à une distance $\frac{3}{2}r$ du second foyer F_2, tombe au milieu de la distance qui sépare les deux lentilles. On voit que non seulement le deuxième plan principal est en avant du premier, mais qu'en outre les deux foyers sont placés entre les deux plans principaux.

(1) On place bien parfois un réticule ou une division sur verre entre les deux lentilles de l'oculaire négatif, à l'endroit où doit se former l'image réelle de l'objet donnée par la première lentille pour être vue nettement par un œil normal. Un pareil œil voit alors nettement à travers la seconde lentille, fonctionnant comme loupe, le réticule et l'image réelle. Mais un œil myope, dans ce cas, voit confusément, et si, en déplaçant l'oculaire, il peut voir nettement l'image réelle qui se forme alors plus près de la seconde lentille, il ne saurait voir nettement le réticule qui est fixe.

Cet inconvénient ne se présente pas avec les oculaires positifs : l'orsqu'on a amené l'image réelle fournie par un objectif à se former dans le plan du réticule, quelle que soit la vue de l'observateur, quand il aura disposé l'oculaire de façon à voir nettement l'image, il verra en même temps nettement le réticule.

à regarder cette image. Ces pièces optiques sont placées aux deux extrémités d'un tube T (fig. 121) sur l'axe duquel elles sont centrées. Ce tube est noirci intérieurement pour éviter la

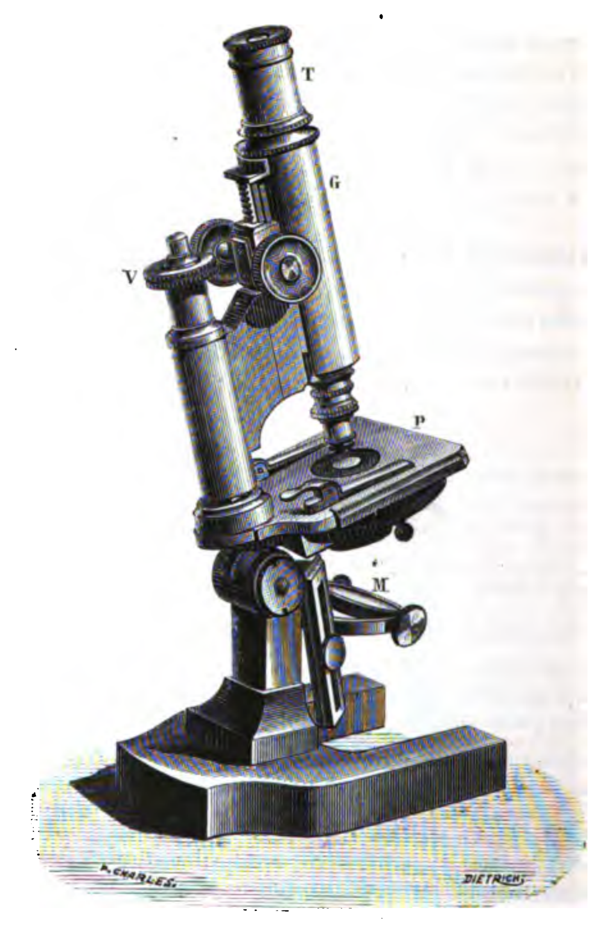


FIG. 121.

réflexion des rayons sur les parois. Il est porté par une glissière G qui permet de l'approcher plus ou moins de l'objet.

Les verres plans entre lesquels cet objet est placé reposent

sur un *porte-objet* P, percé d'un trou pour permettre d'éclairer l'objet par-dessous. Comme dans le microscope composé les rayons lumineux sont reçus directement dans l'œil, on n'a pas besoin d'employer une lumière aussi vive que pour le microscope solaire ; la lumière diffusée par le ciel ou par un mur suffit parfaitement. Elle est renvoyée par un miroir concave M, qui fait converger sur l'objet le faisceau lumineux qu'il reçoit. Quand cet objet est opaque, il est éclairé par-dessus, à l'aide d'une lentille convergente.

Ainsi que dans le microscope solaire, la mise au point se fait en approchant plus ou moins l'objet de l'objectif, ou, ce qui revient au même et est plus commode, en approchant plus ou moins tout le microscope de l'objet, grâce à la glissière G qui porte le tube T. Un très petit déplacement relatif de l'objectif par rapport à l'objet amène, comme nous l'avons vu, un déplacement considérable dans la position de l'image réelle ; or, celle-ci doit être comprise entre deux plans très rapprochés pour être vue nettement à travers l'oculaire ; on comprend, par conséquent, qu'une vis de rappel soit indispensable pour parfaire la mise au point. Cette vis V permet de faire varier graduellement la position de la glissière G qui porte le tube T, par rapport au porte-objet P qui est invariablement fixé au pied de l'appareil.

L'objectif, comme celui du microscope solaire, est composé par deux, trois ou même quatre lentilles assez rapprochées. Ces lentilles sont plan-convexes et tournent leur face plane du côté de l'objet. Il vaut mieux qu'elles soient achromatiques ; pourtant, nous verrons plus loin que l'oculaire permet de corriger en partie le défaut d'achromatisme de l'objectif.

Plus les objectifs sont convergents, plus ils donnent de forts grossissements, plus aussi leur première lentille doit être placée près de l'objet. La nécessité de recouvrir les petits objets transparents placés dans un liquide, par une lamelle de verre, limite le grossissement puisque la distance de l'objectif à l'objet doit être supérieure à l'épaisseur de la lamelle. En introduisant entre l'objectif et cette lamelle une goutte d'eau qui adhère à l'un et à l'autre par capillarité, on ne change pas le grossissement, mais on doit un peu soulever le microscope pour la nouvelle mise au point : les *objectifs à immersion* peuvent donc être plus con-

vergents. En déplaçant convenablement la première lentille de l'objectif (*objectif à correction*), on arrive à mieux corriger los aberrations que dans un objectif non immergé de même convergence.

L'invention des objectifs à immersion et à correction a permis de reculer très notablement la limite de la puissance du microscope.

Quant à l'oculaire, c'est toujours l'oculaire négatif d'Huyghens qui est employé, car c'est celui qui donne, à puissance égale, le champ le plus vaste, ainsi que nous l'établirons plus loin. L'oculaire d'Huyghens donnant une image droite de l'image renversée fournie par l'objectif, le microscope donne une image renversée des objets.



FIG. 125.

La figure 125 représente la construction de l'image dans le cas simplifié où l'objectif et l'oculaire sont formés chacun d'une seule lentille infiniment mince. La figure 126 représente la construction dans le cas où l'oculaire est celui d'Huyghens et où l'objectif est formé de deux lentilles; P_1 et P_2 représentent les plans principaux du système objectif F_1 et F_2 ses foyers. P'_1 et P'_2 représentent les plans principaux de l'oculaire d'Huyghens, et F'_2 son second foyer (1).

(1) Dans ces figures et dans les suivantes nous représentons par des traits pleins les rayons, par une succession de traits les prolongements des rayons, et par une alternative de points et de traits des rayons qui existeraient si l'objectif ou les pièces optiques déjà traversées par la lumière étaient plus larges, la considération de pareils rayons étant souvent utile pour faire la construction de l'image.

2° **Puissance et grossissement.** — La puissance etl e grossissement du microscope composé sont définis comme pour tous les autres oculaires (voir § 7).

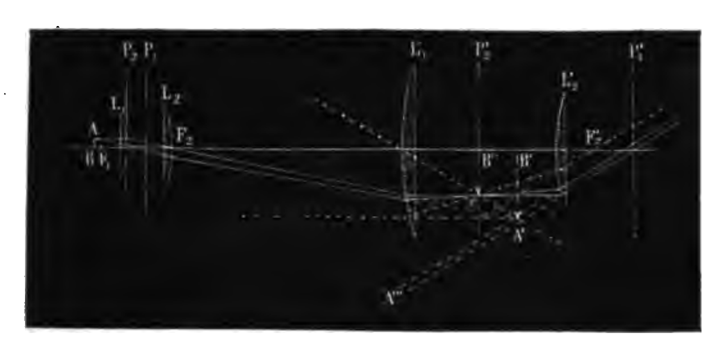


Fig. 126.

L'objectif donne d'une dimension linéaire A de l'objet égale à l'unité de longueur une image réelle de longueur g, en désignant par g le grossissement de l'objectif. Si p représente la puissance de l'oculaire, l'angle sous lequel on voit l'image de A à travers le microscope est gp ; telle est donc la puissance P du microscope :

$$P = pg \tag{1}$$

La puissance du microscope composé est le produit du grossissement de l'objectif par la puissance de l'oculaire.

En désignant par D la distance minima de vision distincte de l'œil de l'observateur, $\frac{1}{D}$ est la puissance maxima de l'œil, et le grossissement G du microscope, étant le rapport de sa puissance à la puissance maxima de l'œil, est donné par

$$G = PD = gpD \tag{2}$$

Le grossissemnet du microscope est le produit du grossissement de l'objectif (g) *par le grossissement* (pD) *de l'oculaire.*

Nous avons vu, du reste, (§ 5) qu'en appelant l la distance de l'image réelle au point nodal postérieur de l'objectif et f la distance focale de celui-ci, on a :

$$(3) \qquad g = \frac{l}{f} - 1$$

d'où :

$$(4) \qquad P = p\left(\frac{l}{f} - 1\right) \qquad G = p\left(\frac{l}{f} - 1\right)D$$

On voit qu'on a intérêt au point de vue du grossissement : 1° — à rendre l grand, c'est-à-dire à avoir un long tube [1] ; 2° — à avoir un objectif très convergent ; 3° — à avoir un oculaire d'une grande puissance.

Les microscopes possèdent généralement plusieurs objectifs de rechange, plus ou moins convergents, et plusieurs oculaires, plus ou moins puissants. C'est en changeant d'oculaires et surtout d'objectifs qu'on fait varier la puissance de l'instrument.

3° Disque oculaire. — Dans un microscope composé l'oculaire est toujours un système optique convergent (au moins pour le côté par où pénètre la lumière quand l'oculaire fait partie du microscope). Or, la lentille qui constitue l'objectif, ou, si celui-ci est formé de plusieurs lentilles, la dernière de ces lentilles (celle qui est le plus près de l'oculaire) peut être considérée comme un objet ; cet objet étant placé bien au delà du premier foyer de l'oculaire, celui-ci en donne une image réelle située un peu au delà de son second foyer, et qui est de très petite dimension, puisqu'elle est notablement plus petite que l'objet,

(1) Comme un tube long serait gênant pour ranger l'instrument dans une boîte, le tube des microscopes se compose, en général, de deux parties rentrant l'une dans l'autre. On peut ainsi, à volonté, augmenter ou diminuer la distance de l'objectif à l'oculaire, ce qui est parfois commode pour obtenir un grossissement d'une valeur déterminée.

c'est-à-dire que la lentille objective. Cette image est du reste très brillante comme l'objectif lui-même; on l'appelle le *disque oculaire*.

Tous les rayons qui traversent l'objectif peuvent être considérés comme émanant d'un point de la dernière lentille de cet objectif; parmi eux tous ceux qui traversent aussi l'oculaire traverseront nécessairement le disque oculaire, au point même qui est l'image de celui où ils ont traversé la dernière lentille objective. Tous les rayons qui ont traversé l'instrument passant par le disque oculaire, pour voir à travers le microscope, il faut disposer l'œil de façon que ce petit disque tombe dans l'ouverture de la pupille, ce qui est facile, vu que celle-ci a un diamètre supérieur à celui du disque oculaire [1]; alors, les rayons qui ont traversé l'instrument frappent tous la rétine.

4° Champ. — On appelle *champ* la région dont tous les points peuvent être vus à la fois à travers le microscope. Nous allons démontrer que, quelle que soit la mise au point, cette région est contenue à l'intérieur d'un cône de révolution ayant pour axe, l'axe de l'instrument et pour sommet le premier point nodal de l'objectif; l'angle générateur de ce cône est ce qu'on appelle la *valeur* du champ.

Considérons les rayons lumineux issus d'un même point A de l'objet; après avoir traversé l'objectif ils forment un cône ayant pour base celui-ci et pour sommet l'image réelle A′ du point A fournie par l'objectif. Ce cône est d'angle très petit à cause du faible diamètre de l'objectif, vis-à-vis de sa distance à l'image A′. Aussi les rayons issus de A qui ont traversé l'objectif et qui tombent sur l'oculaire sont-ils tous très voisins de l'axe secondaire correspondant au point A. Par conséquent, si cet axe rencontre la première lentille de l'oculaire, un certain nombre de rayons issus de A traversent tout l'instrument (voir § 6): le

(1) Quand l'œil est placé convenablement pour voir, la cornée transparente donne du disque oculaire, qui fonctionne par rapport à elle comme objet virtuel, une image réelle; c'est cette image, un peu plus petite encore que le disque oculaire lui-même, qui doit tomber dans l'ouverture de la pupille.

point A est dans le champ. Si, au contraire, cet axe secondaire ne rencontre pas la première lentille de l'oculaire, les autres rayons issus de A et qui ont traversé l'objectif ne rencontrent pas, en général, l'oculaire ; aussi admettrons-nous qu'un pareil point n'est pas vu à travers l'instrument, ce qui ne peut être inexact que pour quelques points formant une zone très étroite sur les bords du champ (1).

D'après cela, nous obtiendrons le champ de l'instrument par la construction suivante. Menons le cône $A_2N_2B_2$ (fig. 127) qui a



Fig. 127.

pour sommet le second point nodal N_2 du système objectif et qui s'appuie sur le contour A_2B_2 de la première lentille L de l'oculaire; menons un second cône $A_1N_1B_1$ ayant pour sommet le premier point nodal N_1 du système objectif, parallèle au cône $A_2N_2B_2$ et de sens inverse (2) : ce second cône contient le champ. En effet, tout point pris à l'intérieur de ce cône $A_1N_1B_1$ est sur un axe secondaire qui rencontre la première lentille de l'oculaire, tout point pris au dehors est dans le cas contraire.

(1) On pourrait répéter exactement, au sujet du microscope, ce que nous exposons plus loin, au sujet de la lunette astronomique (§ 17 4°), sur le *champ des points vus en pleine lumière* et sur le *champ extrême*. Mais, dans le cas du microscope, ces deux champs ont des valeurs si voisines, qu'il est inutile, au point de vue pratique, de les distinguer du *champ moyen* dont nous indiquons ici la construction.

(2) Ces deux demi-cônes forment les deux nappes d'un même cône dans le cas où l'objectif, étant formé par une seule lentille infiniment mince, a ses deux points nodaux N_1 et N_2 confondus avec le centre optique.

En désignant par L la distance CN_2 du second point nodal N_2 à la première lentille de l'oculaire (fig. 128), par R le rayon



Fig. 128.

CA de celle-ci et par c la valeur du champ AN_2C, on a la relation :

$$(1) \qquad \text{tang } c = \frac{CA}{CN_2} = \frac{R}{L}$$

En désignant par p la distance de l'objet au premier point nodal, la surface s de cet objet qui est dans le champ est donnée par :

$$(2) \qquad s = \pi\,(p \text{ tang } c)^2 = \pi\, p^2 \frac{R^2}{L^2}$$

et, comme p diffère très peu de la distance focale f de l'objectif,

$$(2\ bis) \qquad s = \frac{\pi f^2 R^2}{L^2}$$

Si l'on ne change que l'objectif, R et L conservent les mêmes valeurs, et l'on voit que la surface s varie sensiblement en raison inverse du carré de la convergence $\left(\frac{1}{f}\right)$ de l'objectif employé (2 *bis*), exactement en raison inverse du carré du grossissement qu'il fournit (2).

Pour trouver comment varie le champ avec l'oculaire employé, il faut savoir que les opticiens adoptent un rapport constant entre le rayon d'une lentille oculaire et sa distance focale : le rayon est pris environ égal au sixième de la distance focale ; il

y aurait, en effet, des aberrations de sphéricité trop grandes si le rayon excédait cette fraction. Désignons par k ce rapport constant, sensiblement égal à $\frac{1}{6}$; le rayon R d'une lentille de distance focale F étant égal à kF, la formule (2) devient :

$$(3) \qquad s = \frac{\pi f^2 k^2 F^2}{L^2}$$

Comme un oculaire d'*un même type* a une puissance qui varie en raison inverse de la distance focale F de sa première lentille, on voit que, pour un même objectif, et pour des oculaires de même type, l'étendue de la surface vue varie en raison inverse du carré de la puissance de l'oculaire.

Il est très intéressant de comparer, au point de vue du champ, les oculaires de types différents et de *même puissance*.

Dans ce qui suit, pour plus de simplicité, nous supposerons toujours l'œil accommodé pour voir à l'infini.

1° — Dans le cas de l'oculaire de Képler, c'est-à-dire d'une simple loupe, on a, en appelant P la puissance :

$$P = \frac{1}{F}$$

et l'on a en outre :

$$L = l + F = l + \frac{1}{P}$$

donc la surface vue s_1 est donnée par :

$$s_1 = \frac{\pi k^2 f^2}{(Pl + 1)^2}$$

2° — Dans le cas de l'oculaire de Ramsden on a :

$$P = \frac{4}{3}\frac{1}{F}$$

et
$$L = l + \frac{1}{4}F = l + \frac{1}{3P}$$

d'où, pour la surface vue s_2 :

$$s_2 = \frac{16\pi k^2 f^2}{(3Pl + 1)^2}$$

On voit qu'à puissance égale, l'oculaire de Ramsden donne un champ plus vaste que celui de Képler : le rapport $\frac{s_2}{s_1}$ est un peu plus grand que $\frac{16}{9}$.

3° — Dans le cas de l'oculaire négatif d'Huyghens, on a :

$$P = \frac{2}{F}$$

et

$$L = l - \frac{F}{2} = l - \frac{1}{P}$$

d'où, pour la surface vue s_3 :

$$s_3 = \frac{4\pi k^2 f^2}{(Pl - 1)^2}$$

Ainsi, la surface vue s_3 dans le cas de l'oculaire d'Huyghens est plus de quatre fois la surface s_1 vue avec un oculaire de Képler de même puissance. On comprend, dès lors, pourquoi l'oculaire d'Huyghens est toujours l'oculaire employé pour les microscopes [1].

(1) C'est pour cela que la première lentille d'un oculaire d'Huyghens a reçu des opticiens le nom de *lentille de champ*, car, en l'enlevant, le microscope ne possède plus qu'un oculaire simple ; il est alors un peu plus puissant, il est vrai, mais la surface vue se trouve réduite à moins du quart de ce qu'elle était.

Dans tout ce qui précède nous avons supposé que l'œil était disposé de façon à recevoir sur la rétine tous les rayons qui ont traversé l'instrument, c'est-à-dire que le disque oculaire tombait sur la pupille. En rapprochant trop l'œil de l'oculaire ou en l'écartant trop, on diminue l'étendue de la partie vue de l'objet.

On place un *diaphragme*, c'est-à-dire un écran percé d'une ouverture circulaire, centrée sur l'axe de l'instrument, dans le plan où se forme l'image réelle de l'objet. Dans l'oculaire d'Huyghens, le diaphragme PQ (fig. 128) est donc placé entre les deux lentilles, à la moitié de la distance qui les sépare puisque, quand on a fait la mise au point, c'est dans ce plan que se trouve l'image réelle de l'objet fournie par l'ensemble de l'objectif et de la première lentille de l'oculaire.

En donnant à l'ouverture du diaphragme une surface égale à l'image réelle de la surface vue s_3 de l'objet, cette image est limitée juste à l'ouverture et l'on ne perd rien du champ (1). En donnant à l'ouverture une surface un peu inférieure à celle de l'image de s_3, on a l'avantage de cacher une zone de points qui sont moins éclairés que les autres, une portion seulement et non la totalité du cône que forment les rayons émis par ces points après avoir traversé l'objectif, tombant sur la première lentille de l'oculaire, le reste tombant au delà des bords de cette lentille. La portion de l'objet vue en pleine lumière est ainsi nettement délimitée, grâce aux bords du diaphragme, ce qui est d'un effet plus agréable que de la voir entourée par l'espèce de pénombre que forme la zone des points moins éclairés.

Le diaphragme arrête aussi des rayons qui ne concourent pas à la formation de l'image, tels que les rayons réfléchis ou diffusés par les parois du tube, et qui nuiraient à la netteté de l'image (2).

(1) Pour cela, il suffit de chercher la marche des rayons issus du second point nodal N_2 et s'appuyant sur le pourtour de la lentille L ; après réfraction à travers cette lentille, ces rayons passent par le point N_2' image de N_2 donnée par L (fig. 128). En joignant N'_2 aux bords de la lentille L on détermine le cône qui limite dans le plan PQ où se forme l'image réelle, l'image de la surface vue s_3 de l'objet.

(2) On place, dans le même but, un autre diaphragme derrière la dernière lentille de l'objectif.

5° ACHROMATISME FOURNI PAR L'OCULAIRE. — Si l'objectif n'est pas absolument achromatique, il donne d'un même objet plusieurs images réelles distinctes, teintées des diverses couleurs du spectre. Ces images sont assez voisines, en général, pour que l'image qui occupe la position moyenne étant mise au point avec l'oculaire, les autres le soient suffisamment.



FIG. 129.

L'image réelle de l'objet dans la couleur bleue $A'_1B'_1$ (fig. 129), étant plus près de l'objectif qui la fournit que l'image jaune $A'_2B'_2$, est placée plus loin de l'oculaire, et, par conséquent, plus près de son premier foyer F_1 ; l'oculaire en donne donc une image virtuelle $A''_1B''_1$ plus éloignée et plus grande que l'image $A''_2B''_2$ qu'il donne de $A'_2B'_2$. Si l'œil contemple de très loin ces images virtuelles il verra l'image bleue $A''_1B''_1$ sous un angle plus grand que l'image jaune $A''_2B''_2$: un objet blanc sur fond noir paraîtra bordé de bleu. Au contraire, si l'œil est placé très près de l'oculaire, assez pour qu'on puisse confondre son point nodal avec le second point nodal N_2 de l'oculaire, l'image jaune $A''_2B''_2$ sera vue sous un angle $A''_2N_2B''_2$ plus grand que l'image bleue $A''_1B''_1$, vue sous l'angle $A''_1N_2B''_1$, car les angles $A''_1N_2B''_1$ et $A''_2N_2B''_2$ sont respectivement égaux à $A'_1N_1B'_1$ et $A'_2N_1B'_2$: un objet blanc sur fond noir est vu bordé de jaune. On conçoit qu'entre ces deux positions extrêmes, il y ait une place de l'œil pour laquelle il verra les deux images jaune et bleue exactement sous le même angle, ce qui donnera la superposition exacte des images rétiniennes dans ces deux couleurs : pour cette position il y a achromatisme.

Il est du reste facile de trouver la position du point nodal de l'œil qui satisfait à cette condition. Supposons d'abord, pour

simplifier, que le système des deux points nodaux n_1 et n_2 de l'objectif occupe la même position pour toutes les couleurs, ce qui n'est rigoureusement exact que pour une lentille infiniment mince. Supposons aussi que l'oculaire soit parfaitement achromatique. Un point B de l'objet donne ses images dans les diverses couleurs B'_1, B'_2 sur une même droite, l'axe secondaire $n_2 B'_2$ correspondant au point B. Un rayon lumineux qui suit cette direction prend, après réfraction à travers l'oculaire, une direction MO passant par un point fixe O situé sur l'axe optique et qui est l'image réelle du second point nodal n_2 donné par l'oculaire convergent, puisque le rayon considéré passe par n_2. Ce point O est ce qu'on appelle le *point oculaire* : si l'objectif se compose d'une seule lentille infiniment mince, ce point O se trouve évidemment à l'endroit où le disque oculaire est rencontré par l'axe principal ; et dans le cas d'un objectif composé de plusieurs lentilles, le point oculaire est toujours très voisin du disque oculaire. Les images virtuelles B''_1, B''_2 données par l'oculaire de B'_1 et de B'_2 sont situées sur le prolongement du rayon OM. Si donc on place le point nodal de l'œil au point oculaire O l'image bleue $A''_1B''_1$ et l'image jaune $A''_2B''_2$ seront vues sous le même angle.

Or, précisément quand l'œil occupe cette position, le disque oculaire tombe à l'intérieur de la pupille, très voisine du point nodal de l'œil: celui-ci est donc bien placé à la fois pour ne rien perdre du champ et pour voir sans irisation les images.

Du reste, comme les images $A''_1B''_1$ et $A''_2B''_2$ sont en général très loin de l'œil, un petit déplacement de celui-ci à partir de la position que nous venons d'indiquer ne modifie pas beaucoup l'angle sous lequel on voit les deux images, par conséquent, l'achromatisme subsiste.

On comprend d'après cela que le fait que le système des deux points nodaux n_1 et n_2 n'occupe pas exactement la même position pour les diverses couleurs, et que l'oculaire n'est pas achromatique, ne peut qu'influer très peu sur la position qu'il convient de donner à l'œil pour obtenir le maximum d'achromatisme [1].

(1) Ces considérations s'appliquent à tous les oculaires positifs, et, en

Remarquons enfin que, quand l'œil est bien placé, son point nodal, étant très près du point oculaire, est très près aussi du second foyer de l'oculaire; nous avons vu § 7 qu'il en résulte que la puissance de l'oculaire et, par conséquent, celle du microscope est à peu près indépendante de la vue de l'observateur.

6° Correction de la courbure des images par l'oculaire d'Huyghens. — L'étendue de la surface vue à travers le microscope est assez grande, les bords de cette surface sont assez loin de l'axe principal, pour que l'image réelle A'B', fournie par l'objectif d'une surface plane soit légèrement concave du côté de l'objectif (fig. 130).

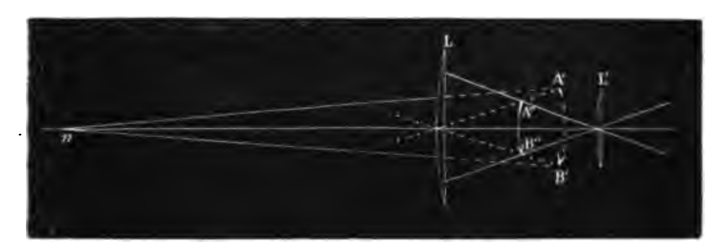


Fig. 130.

Si l'on regarde cette image, avec un oculaire de Képler, l'image virtuelle qui en résulte est fortement convexe du côté

effet, même l'oculaire de Képler donne un bon achromatisme quand on place l'œil convenablement.

L'explication donnée habituellement de la correction par l'oculaire d'Huyghens du défaut d'achromatisme de l'objectif, dans laquelle on suppose le point nodal de l'œil confondu avec le centre optique de la dernière lentille de l'oculaire, ne nous paraît pas suffisante. D'après les considérations exposées dans le texte, on voit que si, par impossible, on pouvait réaliser la coïncidence de ces deux points, l'œil verrait bordés de jaune les objets blancs sur fond noir; l'irisation serait certainement plus forte qu'avec un oculaire de Képler, quand on fait coïncider le point oculaire et le point nodal de l'œil, ce qui est très facile et se fait en quelque sorte instinctivement pour ne rien perdre du champ.

Le léger avantage que présente au point de vue de l'achromatisme l'oculaire d'Huyghens tient à son aplanétisme plus parfait.

de l'œil, puisqu'il faut, au contraire, qu'un objet ait une légère courbure, et tourne sa concavité vers la loupe, pour que l'image virtuelle donnée par celle-ci soit plane (voir Chap. IV § 6).

Mais si l'on emploie l'oculaire d'Huyghens, la première lentille L de cet oculaire donne de l'image AB fournie par l'objectif une image réelle A″B″ dont la courbure est renversée et qui tourne, par conséquent, sa concavité vers la deuxième lentille L′ ; celle-ci, fonctionnant comme loupe, en donne une image virtuelle sensiblement plane.

On met aisément en évidence la grande supériorité que possède à ce point de vue l'oculaire d'Huyghens, en regardant à travers un microscope un objet successivement, après avoir enlevé, et après avoir remis en place la première lentille de cet oculaire.

7° Qualités d'un microscope. — On dit qu'un microscope a un grand *pouvoir définissant* quand les contours de l'objet regardé sont très nets et apparaissent comme des lignes fines. Un grand pouvoir définissant est dû à une bonne correction des aberrations.

Certains microscopes permettent d'apercevoir des détails, tels que des stries ou des ponctuations, de la préparation microscopique qui ne sont pas visibles avec d'autres microscopes de même puissance et de même pouvoir définissant : on dit que les premiers ont un *pouvoir analysant* plus grand que les seconds. Comme ce sont les rayons qui traversent obliquement une préparation microscopique qui permettent de voir les petits reliefs, un microscope a un grand pouvoir analysant quand, outre les rayons normaux, il tombe sur l'objectif des rayons faisant un grand angle avec l'axe principal, autrement dit, quand l'*angle d'ouverture* est considérable (voir § 5, note 1). Par conséquent, le pouvoir analysant, pour une même puissance, augmente avec le diamètre de la première lentille objective.

Enfin, à puissance égale, certains microscopes permettent de voir net simultanément une couche de la préparation et les couches qui sont un peu plus près ou un peu plus loin de l'objectif, tandis que d'autres ne laissent voir, en quelque sorte, qu'une seule couche : les premiers sont dits avoir un *pouvoir pénétrant* plus grand que les seconds.

Nous avons vu (§ 8) que, par suite de l'accommodation de l'œil, un microscope doit laisser voir successivement nets les objets compris entre deux plans, très rapprochés du reste; mais nous avons vu aussi qu'à puissance égale la distance de ces deux plans est la même, pour un même observateur; il faut donc chercher ailleurs la cause du pouvoir pénétrant. On la trouve dans la valeur plus ou moins faible de l'angle du cône que forment les rayons provenant d'un même point de l'objet après qu'ils ont traversé l'objectif. En effet, si ce cône est d'angle très petit, près de son sommet, c'est-à-dire près de l'endroit où se forme nettement l'image réelle donnée par l'objectif, la section du cône par un plan sera très petite et se confondra encore avec un point. Il en résulte qu'on a alors une certaine latitude pour la mise au point, et que, pour une même position de l'oculaire, des plans inégalement distants de l'objectif peuvent être vus à peu près nets.

Le pouvoir pénétrant est donc d'autant plus grand que les lentilles objectives sont de plus faible diamètre : il varie en sens inverse du pouvoir analysant. Les micrographes n'hésitent pas, en général, à préférer un grand pouvoir analysant à un grand pouvoir pénétrant.

15. HISTORIQUE DU MICROSCOPE. — Les anciens connaissaient le pouvoir grossissant des lentilles. Senèque dit qu'à travers une boule de verre pleine d'eau les lettres sont vues plus grandes et plus distinctes. Ficoroni a trouvé dans un très ancien tombeau romain une lentille de verre; une lentille en cristal de roche a été trouvée vers 1852 dans les fouilles faites à Khorsabad, sur l'emplacement de l'ancienne Ninive. Mais ce n'est qu'au XVIIe siècle qu'on a commencé à se servir de la loupe dans l'étude des sciences naturelles (Stellutin, Fontana, Leuwenhœck, Hartsœker).

On attribue l'invention du microscope composé à Zacharie Jansen, qui vivait à Middelbourg vers 1590.

En 1610, Divini forma des oculaires avec deux lentilles plan-convexes, ayant leurs faces bombées en regard. Mais c'est Hooke qui, en 1665, appliqua au microscope composé l'oculaire négatif imaginé par Huygens dès 1656 pour les télescopes.

Les premiers objectifs composés de plusieurs lentilles ont été construits par Grindl von Ach.

On doit à Léonard Euler l'idée de corriger l'aberration de réfrangibilité des microscopes et d'avoir donné, vers 1753, la théorie de l'achromatisme. Pourtant, ce n'est qu'en 1824 que Charles Chevalier parvint à construire les premiers objectifs achromatiques (1).

16. **TÉLESCOPES.** — On désigne sous le nom général de *télescopes* (2), les instruments qui servent à voir les objets lointains sous un angle plus grand qu'à l'œil nu.

Ils se composent d'un objectif donnant une image réelle de l'objet éloigné et d'un oculaire, plus ou moins compliqué, qui sert à regarder cette image réelle.

Quand l'objectif est une lentille convergente, l'instrument porte le nom de télescope *dioptrique* ou de *lunette*, quand l'objectif est un miroir concave, il porte le nom de télescope *catoptrique* ou simplement de *télescope*.

Le *grossissement* d'un télescope quelconque est le rapport de l'angle sous lequel on voit une dimension linéaire de l'objet à travers l'instrument à l'angle sous lequel on verrait à l'œil nu la même dimension linéaire, cette dimension linéaire étant choisie assez petite pour que la valeur de ces angles puisse être confondue avec la valeur de la tangente ou du sinus.

D'après cette définition, il est aisé de trouver l'expression générale du grossissement d'un télescope. Supposons que l'objet qu'on regarde soit à l'infini, c'est-à-dire à une distance assez grande pour que l'image réelle qu'en donne l'objectif se forme sensiblement dans son plan focal. Alors, si α est l'angle sous lequel l'objet est vu à l'œil nu, et si F est la distance focale du miroir concave ou de la lentille convergente qui sert d'objectif, nous avons vu (Chap. II, § 9), que la dimension de l'image réelle qui se forme dans son plan focal est αF. Si cette image est regardée avec un oculaire de puissance P, à travers cet

(1) Dès 1816, Fraüenhofer avait bien construit des microscopes achromatiques, mais d'une puissance si faible, qu'ils ne furent pas employés.

(2) De τῆλε de loin et σκοπέω je regarde.

oculaire, elle est vue sous l'angle αFP. Tel est donc l'angle sous lequel on voit la dimension linéaire choisie à travers l'instrument; par conséquent, le grossissement G est donné par

$$G = \frac{\alpha FP}{\alpha} = FP$$

Le grossissement d'un télescope est égal au produit de la distance focale de l'objectif par la puissance de l'oculaire.

Il est indispensable que les images fournies par les télescopes soient suffisamment éclairées pour être vues. Or, ici, on n'est plus maître, comme pour les microscopes, de l'éclairement de l'objet; l'éclairement de l'image dépend de la bonne disposition de l'instrument. On peut prendre pour définition de la *clarté* d'un télescope le rapport entre les quantités de lumière qui tombent sur une même portion de la rétine, quand on regarde un objet à travers le télescope et quand on regarde le même objet à l'œil nu; bien entendu, cette portion de la rétine doit être, dans les deux cas, éclairée par les mêmes parties de l'objet, et assez petite pour que son éclairement soit uniforme. On conçoit qu'une grande clarté soit une des propriétés les plus précieuses d'un télescope. Certaines étoiles invisibles à l'œil nu deviendront visibles si, à l'aide d'un télescope, l'image rétinienne a plus d'éclat.

Le *champ* d'un télescope se définit comme celui du microscope: c'est la portion de l'espace dont les points peuvent être vus à la fois à travers l'instrument. Le champ est compris à l'intérieur d'un cône de révolution ayant pour axe l'axe du télescope; l'angle générateur de ce cône est ce qu'on appelle la *valeur* du champ.

L'expression de la clarté et du champ au moyen des données du télescope est différente suivant que l'oculaire employé est convergent ou divergent. Aussi traiterons-nous ces deux questions à propos de la lunette astronomique et de la lunette de Galilée.

17. LUNETTE ASTRONOMIQUE. — 1° Principe et description. — La lunette astronomique se compose d'un objectif formé par une lentille achromatique de grand diamètre et de longue distance focale et d'un oculaire convergent, le plus souvent l'oculaire de Ramsden, dont l'axe se confond avec celui de l'objectif.

L'objectif L (fig. 131) donne d'un objet lointain une image

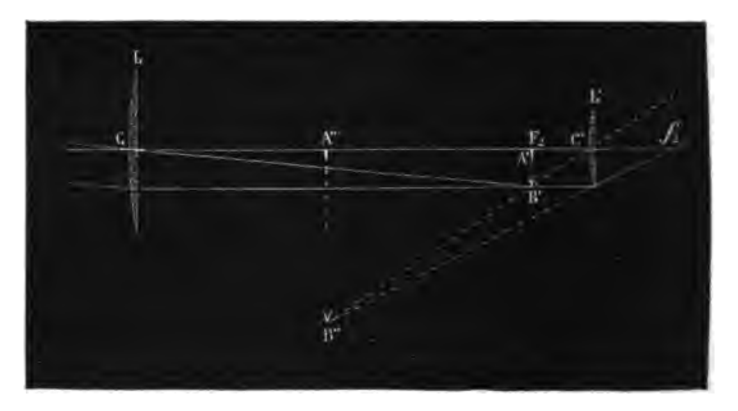


Fig. 131.

réelle et renversée A'B' ; cette image fonctionne comme objet, par rapport à l'oculaire L', qui en fournit une image virtuelle et droite A''B''. Par conséquent, cette dernière image, que l'œil regarde, est renversée par rapport à l'objet.

L'objectif O (fig. 132), est porté à l'extrémité d'un tube T ; à l'autre extrémité de ce tube se trouve l'oculaire A, porté par un tube S, de diamètre plus petit que le précédent et qui peut glisser à frottement dans celui-ci. Ces deux tubes sont noircis intérieurement.

L'image réelle donnée par l'objectif se forme à une distance de celui-ci, qui est à peine supérieure à sa distance focale, dès que l'objet est un peu éloigné. Cette image occupant une position invariable dans le tube de l'instrument, pour mettre au point, on déplace l'oculaire en enfonçant ou retirant le tube S qui le porte, jusqu'à ce que la vision soit nette.

Si l'œil est disposé pour voir à l'infini, il faudra disposer l'oculaire de façon que son plan focal coïncide avec la position de l'image réelle, car, alors, l'oculaire donnera de celle-ci une image située à l'infini. Si l'œil est accommodé pour voir à distance finie, il faudra un peu enfoncer l'oculaire, par rapport à la position précédente, pour que, l'image réelle tombant entre



Fig. 132.

le premier plan focal de l'oculaire et le plan principal correspondant, l'image virtuelle que l'œil regarde soit à distance finie.

La figure 131 donne la construction de l'image A″B″ dans le cas d'un oculaire simple infiniment mince L′, l'objectif L étant aussi supposé infiniment mince. L'objet placé à l'infini donne son image renversée A′B′ dans le plan focal F_2 de l'objectif, pour que l'image virtuelle se forme à distance finie, on a placé A′B′ un peu en arrière du premier foyer de l'oculaire.

La figure 133 donne la même construction, dans le cas d'un oculaire de Ramsden : P_1 et P_2 représentent les plans principaux très rapprochés de l'objectif, p_1 et p_2 ceux de l'oculaire, et F_1 et F_2 ses deux foyers. Dans cette figure l'image virtuelle se forme à l'infini.



FIG. 133.

2° GROSSISSEMENT. — D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, le grossissement est égal à FP. En appelant f la distance focale de l'oculaire, sa puissance P est $\frac{1}{f}$, si l'œil est disposé pour voir à l'infini, et conserve encore la même valeur si, l'œil étant disposé pour voir à distance finie, le point nodal est voisin du foyer postérieur de l'oculaire (§ 7), ce qui a toujours lieu. Le grossissement de la lunette astronomique est donc indépendant, à très peu près, de la vue de l'observateur et est donné par

$$G = \frac{F}{f}$$

On est arrêté dans la voie du grossissement au moyen de l'oculaire par les aberrations qui se produisent dans les oculaires trop convergents. Aussi obtient-on les lunettes puissantes en donnant une grande distance focale à l'objectif, ce qui entraîne malheureusement une grande longueur pour tout l'instrument.

3° Disque oculaire. — Comme pour le microscope, l'oculaire convergent donne une image réelle de l'objectif située derrière son second foyer mais très près de lui; cette image est le *disque oculaire*. Tous les rayons qui traversent l'instrument traversent le disque oculaire.

Quand la mise au point est faite pour un œil disposé pour voir à l'infini, le rapport, qui existe entre le diamètre de l'objectif et le diamètre du disque oculaire est égal au grossissement de la lunette. Cette relation remarquable, qui subsiste quel que soit l'oculaire convergent, s'établit de la façon suivante.

Soit p la distance de l'objectif au premier plan principal de l'oculaire; soit p' la distance de son image (disque oculaire) au second plan principal, on a:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

d'où:

$$\frac{p}{p'}=\frac{p}{f}-1$$

Mais, si la mise au point est faite pour un œil disposé pour voir à l'infini, l'objet regardé étant lui-même à l'infini, le second foyer de l'objectif coïncide avec le premier foyer de l'oculaire; on a donc:

$$p=F+f$$

d'où:

$$\frac{p}{p'}=\frac{F+f}{f}-1=\frac{F}{f}$$

Or, $\frac{F}{f}$ est l'expression du grossissement et $\frac{p}{p'}$ est le rapport

entre la grandeur de l'objectif et la grandeur de son image [1]. Nous verrons (Chap. VIII § 20) l'emploi de cette propriété pour la mesure du grossissement.

(1) Si l'objet regardé à travers la lunette est à distance finie, l'angle sous lequel on le voit à l'œil nu dépend de la distance de l'œil à l'objet. Dans ce cas, en désignant par α l'angle sous lequel on verrait à l'œil nu l'objet, si le point nodal de l'œil occupait la position du premier point nodal de l'objectif et par β l'angle sous lequel on voit le même objet à travers l'instrument, ces angles étant supposés très petits, le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est bien défini, et l'on peut prendre ce rapport pour la valeur du *grossissement* de la lunette. Cette définition plus générale, mais moins utile, comprend évidemment comme cas particulier celle que nous avons donnée dans te texte.

D'autre part, comme dans le microscope et pour les mêmes raisons, la meilleure position à donner à l'œil est de faire coïncider son point nodal avec le point oculaire O (fig. 134). Dans ce cas, quelle que soit la distance de

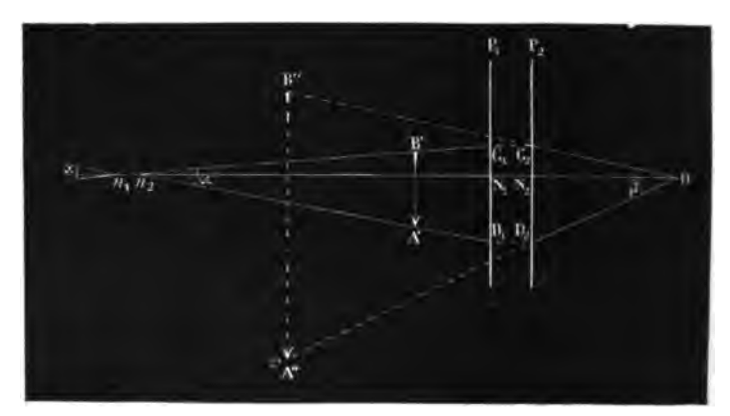


Fig. 134.

l'objet à l'instrument et quelle que soit l'accommodation de l'œil qui regarde au travers, quand la mise au point est faite, le rapport du diamètre de l'objectif au diamètre du disque oculaire représente encore exactement le grossissement.

Soient en effet n_2A' et n_2B' les axes secondaires correspondant aux extrémités d'un objet de petite dimension dont l'objectif donne une image réelle en A'B' ; l'angle A'n_2B' est ce que nous avons appelé l'angle α. Soient C_1 et D_1 les points où les rayons n_2A' et n_2B' rencontrent le premier plan

Pour ne rien perdre de la surface de l'objectif, on doit prendre un oculaire assez convergent pour que le diamètre du disque oculaire soit inférieur à celui de la pupille ; et l'on doit placer l'œil de façon que le disque oculaire tombe à l'intérieur de celle-ci ; tous les rayons qui ont traversé l'instrument frappent alors la rétine.

4° CHAMP. — Les rayons émis par un même point A de l'espace, après avoir traversé l'objectif, sont compris à l'intérieur d'un cône dont le sommet est l'image A′ de A donnée par l'objectif ; au delà de A′, les rayons sont compris à l'intérieur de la seconde nappe du même cône. Si aucun de ces rayons ne tombe sur la première lentille de l'oculaire, il est clair que le point A est en dehors du champ (A'_1 fig. 135). Si tous les rayons ou une portion seulement des rayons du cône tombent sur la première lentille oculaire, ils traverseront aussi les autres lentilles de l'oculaire (voir § 6) : le point est dans le champ. Mais il est évident que si une portion seulement des rayons tombe sur la première lentille oculaire (A'_3 fig. 135), le point sera vu avec

principal P_1 de l'oculaire, et C_2 et D_2 les points où les rayons émergents correspondants C_2O et D_2O, coupent le second plan principal P_2 ; ces rayons font entre eux l'angle β sous lequel l'œil voit l'image A″B″ donnée par la lunette ; or on a :

$$(1) \qquad C_1D_1 = C_2D_2$$

D'ailleurs, en désignant, comme ci-dessus, par p la distance n_2N_1 et par p' la distance N_2O, on a, puisque l'on suppose les angles α et β très petits :

$$(2) \qquad C_1D_1 = \alpha p \qquad C_2D_2 = \beta p'$$

d'où, d'après (1) :

$$(3) \qquad \alpha p = \beta p' \qquad \text{ou} \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{p}{p'}$$

Or, $\frac{\beta}{\alpha}$, est le grossissement, et $\frac{p}{p'}$ le rapport entre la dimension de l'o jectif et la dimension de son image, le disque oculaire placé en O.

une clarté moins grande que si tous les rayons du cône tombent sur cette lentille (comme pour A'_2). Nous avons donc à considérer un *champ extrême* en dehors duquel les points ne sont plus vus, et un champ de *pleine lumière*, moins vaste, à l'extérieur duquel les points sont vus avec moins de lumière ou non vus.

Il convient de distinguer, pour construire ces deux champs, le cas où l'oculaire est positif et celui où il est négatif.

1er Cas. — Oculaire positif. — Le sommet du cône des rayons qui ont traversé l'objectif, image réelle du point-objet, se trouve alors en avant de la première lentille de l'oculaire.

Considérons un point-objet A et supposons que ce point soit mobile et s'abaisse au-dessous de l'axe principal dans le plan de la figure 135. Tant que le rayon issu de ce point A et qui passe par le bord inférieur D de l'objectif rencontre la première lentille oculaire L, tous les autres rayons issus de A et qui ont traversé l'objectif rencontrent l'oculaire : le point est dans le champ de pleine lumière. Dès que la position de A est telle que le rayon qui passe par D passe ensuite au-dessus du bord supérieur de la lentille L, le point A n'est plus dans le champ de pleine lumière; et il cesse d'être dans le champ extrême, dès que la position de A est telle que le rayon issu de ce point, et qui passe par le bord supérieur C de l'objectif, passe aussi au-dessus du bord supérieur de la lentille oculaire, car, alors, aucun des rayons issus de A ne rencontre cette lentille.

D'après cela, pour avoir le champ des points vus en pleine lumière, on mène le cône qui s'appuie sur le pourtour CD de l'objectif (fig. 136) ainsi que sur le pourtour *cd* de la première lentille oculaire, et qui a son sommet S entre les deux lentilles. Ce cône découpe dans le plan focal F de l'objectif, où se forme l'image réelle qu'il fournit, un disque LM, sur lequel se trouve l'image des points vus en pleine lumière. Par conséquent, en joignant le contour de ce disque LM au second point nodal O de l'objectif, on forme le cône LOM dont la seconde nappe renferme tous les points vus en pleine lumière. Plus rigoureusement, c'est un cône parallèle à celui-ci, mais ayant pour sommet le *premier* point nodal qui renferme le champ de pleine lumière.

Désignons par R, r et ρ les rayons OC de l'objectif, *oc* de la première lentille de l'oculaire et FL du disque LM ; appelons x

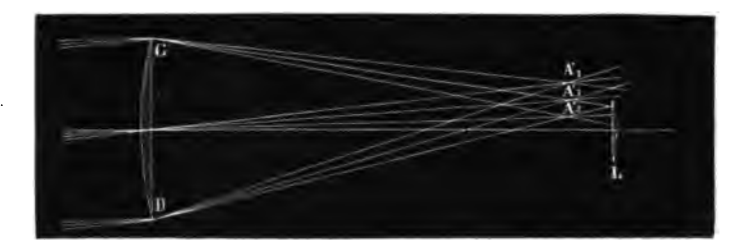


Fig. 135.

la distance SF du sommet S du premier cône que nous avons mené au plan du disque LM, c'est-à-dire au plan focal de l'ob-

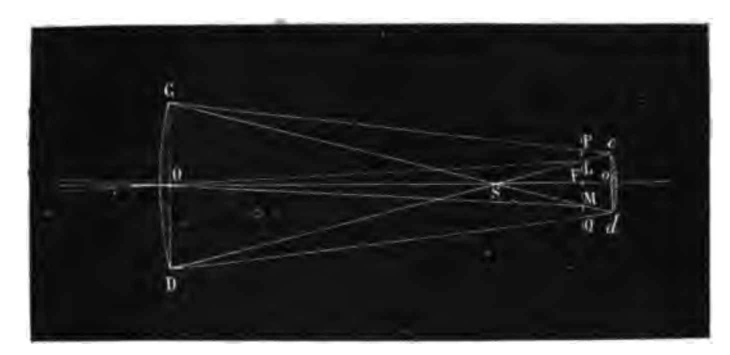


Fig. 136.

jectif, F la distance focale de celui-ci et d la distance Fo du disque LM à la première lentille de l'oculaire ; on a :

$$\text{(1)} \qquad \frac{\rho}{x} = \frac{R}{F - x} = \frac{r}{d + x}$$

d'où, en éliminant x :

$$\text{(2)} \qquad \rho = \frac{rF - Rd}{F + d}$$

On a donc pour l'angle c qui représente la valeur du champ :

$$(3) \qquad \operatorname{tang} c = \frac{\rho}{F} = \frac{r - \frac{R}{F}d}{F + d}$$

On voit qu'il faut avoir $\frac{r}{d} > \frac{R}{F}$ pour que c ne soit pas nul.

On met, en général, un diaphragme dans le plan focal de l'objectif, l'ouverture de ce diaphragme étant égale au disque LM. Ce diaphragme ne diminue donc en rien le champ des points vus en pleine lumière, mais il masque complètement le bord du champ extrême qui formerait une sorte de pénombre d'un effet peu agréable à l'œil (1).

Quant au champ extrême, qui est moins intéressant, puisqu'il est peu utile et d'un effet désagréable à l'œil d'en conserver la partie qui entoure le champ de pleine lumière, on l'obtiendra, d'après ce que nous avons vu plus haut, en menant le cône qui s'appuie sur le pourtour de l'objectif et de l'oculaire mais dont le sommet est en dehors de l'espace compris entre ces deux lentilles (fig. 136). Ce cône CcDd découpe dans le plan focal le disque PQ qui contient les images de tout les points vus; en joignant les bords de PQ au point nodal O de l'objectif, on détermine le cône qui représente le champ extrême.

2me Cas. — Oculaire négatif. — Dans ce cas, le cône des rayons qui ont traversé l'objectif rencontre la première lentille de l'oculaire avant d'atteindre son sommet, puisque celui-ci doit fonctionner comme point-objet virtuel par rapport à l'oculaire.

En répétant le raisonnement fait ci-dessus, on voit (fig. 137) que, contrairement au cas précédent, des deux cônes qui s'ap-

(1) Il est évident que, si l'ouverture du diaphragme est plus petite que celle que nous venons d'indiquer, le champ est diminué. Sa valeur est alors l'angle générateur du cône ayant pour sommet le point nodal postérieur de l'objectif et pour base l'ouverture du diaphragme.

puient sur le contour de l'objectif CD et de la première lentille oculaire *cd* c'est celui qui a son sommet S entre les deux lentilles qui découpe dans le plan focal de l'objectif le disque PQ contenant l'image de tous les points vus, et l'autre cône qui découpe le disque LM, plus petit que PQ, contenant les images des points vus en pleine lumière. En joignant les bords de ces



Fig. 137.

deux disques au point nodal postérieur de l'objectif on obtient les champs correspondants. La valeur *c* du champ de pleine lumière est donnée dans ce cas par la formule :

$$(4) \qquad \operatorname{tang} c = \frac{\rho}{F} = \frac{r - \frac{R}{F} d'}{F - d'}$$

d étant la distance de la première lentille oculaire au plan focal de l'objectif.

Comparons le champ fourni par les oculaires positifs de Képler et de Ramsden et par l'oculaire négatif d'Huyghens pour un même grossissement $G = \frac{F}{f}$ de la lunette, en désignant par f la distance focale de l'oculaire.

Rappelons pour cela que le rapport du rayon d'une lentille oculaire à sa distance focale est un nombre constant, que nous

réprésenterons par K, environ égal à $\frac{1}{6}$. D'autre part, le rapport du rayon d'une lentille objective à sa distance focale est aussi une quantité à peu près constante égale à $\frac{1}{30}$ ou $\frac{1}{35}$ et que nous représenterons par k. On trouve alors, en supposant la mise au point faite pour un œil accommodé pour voir à l'infini, d'après les formules (3) et (4) et d'après ce qui a été exposé aux §§ 7, 12 et 13 :

(5) *oculaire de Képler* $\tang c = \frac{K - k}{G + 1}$

(6) *oculaire de Ramsden* $\tang c = \frac{\frac{4}{3}K - \frac{1}{3}k}{G + \frac{1}{3}}$

(7) *oculaire d'Huyghens* $\tang c = \frac{2K - k}{G - 1}$

On voit que l'oculaire de Ramsden donne un champ dont la valeur est un peu plus des $\frac{4}{3}$ de la valeur du champ donné par l'oculaire de Képler, et que l'oculaire d'Huyghens donne un champ dont la valeur est un peu plus du double de la valeur du champ donné par l'oculaire de Képler. Aussi l'oculaire d'Huyghens est-il employé en général, quand la lunette n'est pas pourvue d'un réticule.

Remarquons que, pour un oculaire de même type, le champ diminue quand le grossissement augmente, à peu près en raison inverse.

5° Clarté. — Pour calculer la valeur de la clarté, nous allons négliger l'absorption, extrêmement faible du reste, qu'éprouve la lumière en traversant les lentilles, ainsi que la perte de lumière due aux réflexions sur les faces des lentilles, qui s'élève environ à 0,04 de la lumière incidente pour chaque réflexion.

Supposons d'abord que le disque oculaire soit inférieur à l'ouverture de la pupille et qu'il tombe à l'intérieur de celle-ci, et distinguons deux cas :

1° *L'objet lumineux est une étoile, qui n'a pas de diamètre apparent sensible.* — Quand un pareil objet est régardé à l'œil nu ou à travers l'instrument, il donne naissance à une image rétinienne qui serait infiniment petite, si les instruments et l'œil étaient dépourvus d'aberrations ; mais en réalité cette image possède une certaine étendue très petite, sensiblement la même dans les deux cas (1). Lorsqu'on regarde à travers la lunette, tous les rayons qui frappent l'objectif concourent à la formation de l'image ; tandis que si l'on regarde à l'œil nu, il n'y a que ceux qui tombent sur la surface de la pupille. La clarté est donc égale, dans ce cas, au rapport de la surface de l'objectif à la surface de la pupille. En désignant par R le rayon de l'objectif et par ρ celui de la pupille, la clarté a pour expression $\frac{R^2}{\rho^2}$

En désignant par r le rayon du disque oculaire, l'expression de la clarté peut s'écrire $\frac{R^2}{r^2}\frac{r^2}{\rho^2}$. Or $\frac{R}{r}$ est égal au grossissement G de la lunette, comme nous l'avons vu plus haut : la clarté a donc pour expression $G^2\frac{r^2}{\rho^2}$.

2° *L'objet lumineux a un diamètre apparent sensible.* —— Considérons d'abord le cas d'une lunette dont le grossissement serait égal à l'unité ; les images rétiniennes ayant la même étendue quand on regarde à l'œil nu ou dans la lunette, la clarté aurait la même expression que dans le cas précédent : soit $\frac{R^2}{\rho^2}$. Mais si, en conservant le même rayon R pour l'objectif, la lunette a un grossissement G, les dimensions linéaires de l'image rétinienne sont G fois plus grandes que pour un grossissement unité, et la même quantité de lumière se trouvant répartie sur une surface

(1) En supposant même que l'œil et la lunette soient exempts d'aberrations de sphéricité et de réfrangibilité, par suite du phénomène dit de *diffraction*, l'image rétinienne d'une étoile serait un petit disque brillant entouré d'anneaux irisés d'une intensité beaucoup plus faible.

G^2 fois pus grande, par unité de surface il n'y a que la fraction $\frac{1}{G^2}$ de la quantité précédente; la clarté a donc pour expression $\frac{R^2}{\rho^2}\frac{1}{G^2} = \frac{r^2}{\rho^2}$

Supposons maintenant que le diamètre de la pupille soit inférieur à celui du disque oculaire; il est évident que la clarté sera celle calculée précédemment, réduite dans le rapport de la surface de la pupille à celle du disque oculaire, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{\rho^2}{r^2}$. On a donc pour l'expression de la clarté :

1° *Dans le cas d'une étoile :* $G^2\frac{r^2}{\rho^2}\cdot\frac{\rho^2}{r^2} = G^2$.

2° *Dans le cas d'un objet de diamètre apparent sensible :* $\frac{r^2}{\rho^2}\cdot\frac{\rho^2}{r^2} = 1$.

On voit ainsi que, dans le cas d'une étoile, la clarté peut être accrue indéfiniment puisqu'elle peut atteindre le carré du grossissement : plus une lunette est puissante, plus est grand le nombre des étoiles qu'on découvre dans le ciel (1).

Mais pour les objets de diamètre apparent fini, la clarté ne peut dépasser l'unité. Elle atteint cette valeur quand le disque oculaire atteint la dimension de la pupille, et reste au-dessous si le disque oculaire est plus petit.

S'il est désavantageux, au point de vue de la clarté, d'avoir un disque oculaire trop inférieur à la pupille, une lunette dans laquelle le disque oculaire serait notablement supérieur à la pu-

(1) Des étoiles qui ne sont pas vues à l'œil nu en plein jour, parce que l'éclat de l'atmosphère couvre l'éclat de l'étoile, peuvent être vues dans une lunette puissante. Celle-ci, en effet, n'augmente pas l'éclat de la partie du ciel qu'on regarde, puisque la clarté pour un objet de dimension finie ne peut dépasser l'unité, tandis qu'elle augmente dans un rapport considérable (G^2) l'éclat de l'étoile.

pille serait une lunette mal construite ; on perdrait le bénéfice de la largeur de l'objectif, puisqu'un objectif de même distance focale et d'un diamètre juste suffisant pour donner un disque oculaire égal à la pupille donnerait exactement même clarté, même grossissement et à peu près le même champ.

On doit donc s'arranger de façon que le disque oculaire soit à peu près égal à la pupille. Or, dans le cas de l'égalité ou de l'infériorité, la clarté est donnée, pour un objet de dimension finie, par $\frac{R^2}{\rho^2 G^2}$; si l'on pose $\frac{R^2}{\rho^2 G^2} = 1$, on en tire $R = \rho G$; ρ étant une constante, on voit que *le rayon de l'objectif doit être proportionnel au grossissement.*

Comme on a $G = \frac{F}{f}$, il vient $\frac{R}{F} = \frac{\rho}{f}$. En prenant pour la distance focale f de l'oculaire de Ramsden ou d'Huyghens la valeur de $3^c,5$ et en prenant pour le rayon ρ de la pupille vivement éclairée le nombre $0^c,15$ on a $\frac{R}{F} = \frac{0,16}{3,5} = \frac{1}{25}$. Telle est à peu près la valeur qu'ont adoptée les opticiens pour le rapport du rayon à la distance focale dans une lentille objective (1).

Si l'on vient à couvrir une portion de la surface de l'objectif d'une lunette astronomique, on diminue la clarté dans le rapport de la surface découverte à la surface totale, *mais on ne diminue pas le champ,* puisqu'il tombe sur la partie conservée de l'objectif des rayons venant des diverses parties de l'espace, et que tout ces rayons arrivent à la rétine. Cette remarque s'applique à tous les télescopes à oculaires convergents, et qui donnent, par conséquent, un disque oculaire réel; mais nous verrons qu'il en est tout autrement pour la lunette de Galilée qui possède un oculaire divergent.

6° Achromatisme. — Il est nécessaire que la lentille objective soit achromatique; sans cela, à cause de sa grande distance fo-

(1) Le prix extrêmement élevé des objectifs achromatiques de grand diamètre est la principale cause qui limite la puissance des lunettes.

cale, les images d'un objet dans les différentes couleurs seraient trop distantes pour être mises au point à la fois, et, dans ce cas, il y a toujours irisation et manque de netteté. Mais un léger défaut dans l'achromatisme de l'objectif est corrigé par l'oculaire, comme nous l'avons expliqué à propos du microscope.

7° Réticule. — Axe optique. — Pour pouvoir faire une visée avec une lunette astronomique, on dispose un *réticule* dans le plan du diaphragme, là où se forme l'image réelle donnée par l'objectif et, bien entendu, on se sert dans ce cas d'un oculaire positif pour voir à la fois l'image réelle et le réticule qui lui est superposé.

Le réticule est le plus souvent formé par deux fils très fins (fils d'araignée ou fils de platine) disposés en croix.

Menons la droite qui joint le point de croisée des fils au second point nodal de l'objectif, et, par le premier point nodal, menons une droite parallèle à la précédente : cette droite est ce qu'on appelle *l'axe optique* de la lunette (1).

C'est une droite qui occupe une position invariable par rapport au tube de l'instrument, quelle que soit la mise au point. Tout point lumineux qui donne son image sur la croisée des fils du réticule se trouve sur l'axe optique (axe secondaire pour ce point) ; ce point est donc dans une direction bien déterminée par rapport à l'instrument. Aussi appelle-t-on *viser un point* avec une lunette, disposer celle-ci de façon que le point soit vu en coïncidence avec la croisée des fils du réticule.

On adjoint aux lunettes puissantes et, par conséquent, de faible champ, une deuxième lunette C (fig. 132) de faible grossissement, mais de champ plus vaste, dont l'axe optique est parallèle à celui de la grande lunette. Cette petite lunette, appelée *chercheur*, sert à trouver l'astre qu'on veut observer. En disposant les lunettes de façon à le viser avec le chercheur, cet astre se trouve dans le champ de la grande lunette.

(1) Quand l'objectif peut être considéré comme une lentille infiniment mince, les deux points nodaux sont confondus avec le centre optique : alors l'*axe optique* est la droite qui joint la croisée des fils du réticule au centre optique de l'objectif.

On se sert souvent, dans les sciences physiques, de lunettes astronomiques à réticule, mais destinées à regarder des objets assez rapprochés. L'image réelle donnée par l'objectif se formant alors au delà de son plan focal, et à une distance qui dépend de celle de l'objet à l'instrument, il faut faire porter le réticule par un tube à tirage, de façon à pouvoir le placer dans le plan même où vient se former l'image réelle. Il faut aussi que l'oculaire positif ait un tirage par rapport au tube précédent pour que chaque observateur puisse mettre à son point. On commence par mettre nettement au point le réticule, puis on agit sur le tube qui porte le réticule, et entraîne dans son mouvement l'oculaire, jusqu'à ce que l'objet soit vu très nettement aussi. On s'assure que l'image réelle donnée par l'objectif est bien en coïncidence avec le plan du réticule en déplaçant légèrement l'œil devant l'oculaire : les fils du réticule doivent toujours coïncider avec les mêmes points de l'objet.

On voit, en définitive, qu'entre la lunette astronomique et le microscope composé, il y a tous les intermédiaires possibles.

18. LUNETTE TERRESTRE. — La lunette astronomique employée pour regarder des objets terrestres présente l'inconvénient de les faire voir renversés. On corrige ce défaut en ajoutant, en avant de l'oculaire, un système formé de deux lentilles convergentes L et L' (fig. 138). Supposons que la première L ait son premier plan focal confondu avec le second plan focal de l'objectif. Les rayons qui ont formé dans ce plan l'image réelle A' d'un point A de l'espace divergent à partir du point A', et tombent sur la lentille L, qui les rend parallèles entre eux; la lentille L' les fait converger dans son plan focal en un point A''. On voit ainsi que le système des deux lentilles L et L' donne de l'image réelle A'B' une seconde image réelle A''B'' renversée par rapport à A'B' et droite, par conséquent, par rapport à l'objet AB. C'est cette image A''B'' qui est regardée par l'oculaire. Celui-ci est toujours l'oculaire négatif d'Huyghens, puisque la lunette terrestre ne sert pas à faire de visées. C'est pour plus de clarté, dans le dessin, que la figure 138 représente un oculaire de Képler; la figure 139 représente la disposition véritable avec l'ocu-

laire d'Huyghens MM′. Les quatre lentilles L, L′, M et M′ sont fixées à des distances invariables à l'intérieur d'un même tube.



FIG. 138.

On appelle *oculaire terrestre* le système optique formé par ces quatre lentilles.



FIG. 139.

On donne, en général, à la distance des deux lentilles intermédiaires L′ et M une valeur plus grande que celle qui résulterait de la supposition que nous venons de faire, pour simplifier l'exposé, et dans laquelle le second plan focal de L′ coïnciderait à peu près avec le premier plan focal de l'oculaire formé par les deux dernières lentilles M et M′. Il en résulte que, pour faire tomber l'image réelle A″B″ dans le plan focal de l'oculaire formé par MM′, il faut que A′B′ soit placé entre la lentille L et

son plan focal. Par cette disposition on gagne en grossissement, car l'image A''B'' devient plus grande [1].

(1) En désignant par f et f' la valeur des distances focales de chacune des lentilles L et L', par e leur distance, par d la distance à laquelle l'image A''B'' doit se former de la lentille L', on trouve aisément que la distance a de A'B' à la lentille L est donnée par :

$$(1) \qquad a = \frac{ff'e - fd(e - f')}{d(f + f' - e) + f'(e - f)}$$

et que le rapport g de la grandeur de A''B'' à A'B' est donné par :

$$(2) \qquad g = \frac{d(f + f' - e) + f'(e - f)}{ff'}.$$

Si l'on a : $d = f'$, comme dans notre première supposition, il vient $g = \frac{f}{f}$; si d augmente à partir de cette valeur comme le facteur $(f + f' - e)$ est positif, le grossissement g augmente avec d.

On prend, du reste, souvent $f' = f$, $\quad e = \frac{4}{3}f$, $\quad d = \frac{5}{2}f$, on a dans ce cas :

$$a = \frac{1}{4}f \qquad g = 2$$

Puisque c'est à une distance égale à $\frac{1}{4}f$ en avant de la lentille L qu'il faut placer un objet pour que l'image donnée par les deux premières lentilles L et L' tombe dans le plan focal de l'oculaire d'Huyghens MM', c'est à cette distance $\left(\frac{1}{4}f \text{ en avant de L}\right)$ que se trouve le premier plan focal de l'oculaire terrestre. Il est aisé de voir que son second plan focal est un peu au delà du second plan focal de l'oculaire d'Huyghens MM'.

Comme l'oculaire terrestre renverse les objets, son premier plan principal est *en avant* du premier plan focal, et son deuxième plan principal *en arrière* de son deuxième plan focal d'une quantité qui, comme toujours, est égale à l'inverse de la puissance de l'oculaire terrestre, c'est-à-dire à $\frac{1}{gp}$, en désignant par p la puissance de l'oculaire d'Huyghens. La distance focale de cet oculaire est donc négative, sa puissance étant aussi négative. C'est une propriété que l'oculaire terrestre partage avec l'oculaire divergent de la lunette de Galilée ; aussi ces deux oculaires sont ils employés dans le même but, celui de redresser l'image fournie par l'objectif. L'oculaire terrestre est pourtant un oculaire convergent puisque ses foyers sont réels.

En désignant par g le rapport des grandeurs des images A"B' et A'B', et par p la puissance de l'oculaire d'Huyghens MM', la puissance P de l'oculaire terrestre est donnée par :

$$P = gp$$

et le grossissement G de la lunette terrestre, en appelant F la distance focale de l'objectif par :

$$G = PF = gpF$$

En général on rend g voisin de 2.

Du reste l'oculaire terrestre jouit des propriétés générales établies pour les oculaires convergents. En particulier, la mise au point pour un œil qui s'accommode pour voir de plus en plus près se fait en enfonçant de plus en plus le tube qui porte l'oculaire terrestre dans celui qui porte l'objectif, et le point nodal de l'œil étant voisin du foyer postérieur de l'oculaire, il n'en résulte pas de variation bien sensible dans le grossissement.

Quand l'objet se rapproche de l'instrument, l'image réelle A'B' qu'en fournit l'objectif s'éloigne, et il faut retirer l'oculaire pour le voir nettement.

La première lentille L de l'oculaire terrestre donne une image réelle I de l'objectif située un peu au delà du second plan focal de L. Tous les rayons qui ont traversé l'objectif et la première lentille L passant par cette image très petite I, on en profite pour placer en I un diaphragme E, percé d'une ouverture égale à l'image I, pour arrêter les rayons réfléchis sur les parois du tube. C'est à une petite distance au delà de ce diaphragme qu'est placée la seconde lentille L'. On prend, en général, les lentilles L et L' de même distance focale f et la distance qui les sépare est égale environ à $\frac{4}{3}f$.

On peut considérer un oculaire terrestre comme un microscope composé dont l'objectif est le système des lentilles L et L'. Cette considération est commode pour trouver le champ de la lunette terrestre. On cherche, comme pour le mi-

croscope composé, quelle est la plus grande surface de l'image réelle A'B' qui est vue à travers l'oculaire terrestre et, en prenant le rayon R de cette surface, la valeur du champ c est évidemment donnée par $\operatorname{tang} c = \frac{R}{F}$ quand l'objet regardé est à l'infini.

On trouve ainsi, avec les dimensions adoptées plus haut :

$$(1) \qquad \operatorname{tang} c = \frac{2\,K}{G\left(1 - \frac{2}{9}\frac{1}{pf}\right)}$$

K représentant le rapport $\left(\text{voisin de } \frac{1}{6}\right)$ qui existe entre le rayon et la distance focale de la lentille M de l'oculaire d'Huyghens ; et, comme le produit pf de la puissance de l'oculaire d'Huyghens par la distance focale f de la lentille L est à peu près égal à l'unité, il vient :

$$(2) \qquad \operatorname{tang} c = \frac{18}{7}\frac{K}{G} \qquad \text{ou environ : } \operatorname{tang} c = \frac{3}{7}\frac{1}{G}$$ [1]

En comparant cette formule (2) aux formules (5), (6) et (7) (§ 17, 4°) on voit qu'à puissance égale l'oculaire terrestre est celui qui donne le champ le plus vaste [2].

La lunette terrestre n'est pas employée par les astronomes

(1) Cette valeur du champ serait inexacte si le diamètre de la première lentille L était trop petit pour laisser passer les axes correspondant aux points extrêmes du champ que nous venons de calculer ; ce serait alors le rayon r de cette lentille qui réglerait le champ, et il aurait pour valeur $\frac{r}{F+a}$, en représentant par F la distance focale de l'objectif et par a la distance de l'image réelle qu'il fournit à la lentille L. Mais, même en étant plus petit que le rayon de la lentille M, le rayon r est toujours assez grand pour n'arrêter aucun des rayons qui peuvent tomber sur M ; c'est donc bien, en réalité, le rayon de cette lentille M qui règle la valeur du champ.

(2) Les formules (5), (6) et (7) (§ 17) donnent, il est vrai, la valeur du champ de pleine lumière, tandis que la formule (2) ci-dessus donne la valeur

pour regarder les astres : l'avantage presque insignifiant de voir ceux-ci dans leur position droite ne suffit pas à compenser l'inconvénient d'une légère diminution de lumière et d'une faible augmentation des aberrations qu'introduit l'addition de deux verres de plus dans l'oculaire de la lunette.

19. TÉLESCOPE DE NEWTON. — TÉLESCOPE DE FOUCAULT. — Le seul télescope catoptrique employé aujourd'hui est le télescope de Newton, ou plutôt sa modification par Foucault. Aussi ne décrirons-nous ici que ces instruments; dans la partie historique, nous dirons quelques mots des autres télescopes et des raisons qui les ont fait abandonner.

En principe, le télescope de Newton ne diffère d'une lunette astronomique que par la substitution d'un miroir concave à la lentille convergente qui sert d'objectif dans la lunette. Ce miroir concave est placé au fond d'un tube à parois noircies et c'est vers le bord supérieur de celui-ci que se trouve l'oculaire qui sert à regarder l'image réelle donnée par réflexion.

Il y a un avantage évident au point de vue de l'achromatisme à employer un miroir comme objectif puisque l'image qu'il fournit est absolument exempte d'irisation. Mais une difficulté se présente : dans un télescope réduit à ses organes essentiels (objectif et oculaire), la tête de l'observateur doit être placée sur le trajet des rayons incidents pour pouvoir regarder à travers l'oculaire l'image réelle donnée par réflexion : un certain nombre des rayons incidents se trouvent ainsi arrêtés. Cet inconvénient, peu grave si l'on emploie des miroirs de très grande surface dont une portion relativement faible se trouve masquée, devient intolérable si le miroir est de petite ouverture. Voici comment Newton a su éviter ce défaut.

Un petit miroir M (fig. 140), est fixé dans l'axe de l'instrument et son plan fait un angle de 45° avec cet axe. Du reste, ce miroir M est placé un peu en avant du plan focal de l'objectif,

d'un champ intermédiaire entre celui de pleine lumière et le champ extrême; mais, pour la lunette terrestre, ces deux champs sont très voisins, comme on peut s'en rendre compte sur la figure 139, par la petitesse de l'angle du cône qui a pour sommet A''.

de façon que l'image A'B' que donnerait celui-ci, fonctionne par rapport au miroir M comme un objet virtuel, dont M donne une image réelle symétrique A''B''. Les rayons lumineux sont ainsi

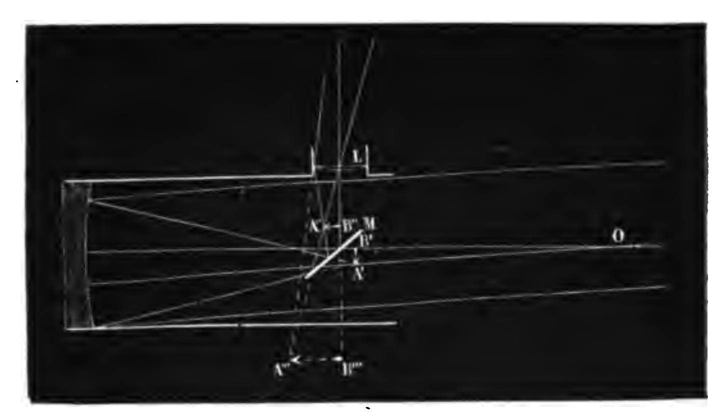


Fig. 140.

renvoyés dans une direction perpendiculaire à l'axe du tube et reçus sur l'oculaire L qui donne de A''B'' une image virtuelle A'''B'''.

La tête de l'observateur ne se trouve plus ainsi sur le trajet des rayons incidents. Comme l'image réelle A'B' de la portion de l'espace qui est dans le champ de l'instrument est toujours très petite, et que le miroir M est placé assez près du plan focal où se formerait cette image, on n'a besoin que d'un miroir plan de petite dimension. Avec la tige qui le fixe au tube, ce miroir n'arrête qu'une très faible quantité de la lumière incidente, autant du reste pour chaque point de l'espace, ce qui ne fait que diminuer dans un même rapport la clarté de tous les points du champ.

Comme miroir plan M, on emploie la face hypoténuse d'un prisme rectangle isocèle sur laquelle les rayons subissent la réflexion totale. La quantité de lumière réfléchie est plus grande que sur un miroir métallique, qui présenterait, en outre, l'inconvénient de s'altérer.

Il est facile de voir que le télescope de Newton, comme la lunette astronomique, donne des images renversées ; supposons,

en effet, que le plan de la figure (plan perpendiculaire au miroir M) soit horizontal, et que l'on regarde avec le télescope un objet vertical; l'image réelle donnée par le miroir concave et le miroir plan sera renversée et, par conséquent, il en sera de même de l'image qu'en donne l'oculaire, si celui-ci est un oculaire de Képler, de Ramsden ou d'Huyghens.

Dans le télescope de Newton, la mise au point se fait par le tirage de l'oculaire, comme dans une lunette.

Le grossissement a évidemment la même valeur $\frac{F}{f}$ que pour la lunette astronomique, F étant la distance focale du miroir et f celle de l'oculaire quel qu'il soit.

Le disque oculaire est l'image du miroir concave objectif donné par l'oculaire convergent [1] et jouit des mêmes propriétés que dans les lunettes.

Le champ des points vus en pleine lumière, ou le champ extrême s'obtient exactement par la même construction que pour la lunette astronomique. Il faut seulement remplacer dans cette construction la première lentille de l'oculaire par son symétrique par rapport au miroir plan M, qu'il faut supposer enlevé, et, pour avoir le cône qui contient les points vus, on joint les bords du disque, qui dans le plan focal contient les images réelles des points vus, au centre de courbure du miroir concave. Ce centre de courbure joue ainsi le même rôle que le centre optique d'une lentille objective infiniment mince. Il est clair que les formules établies pour la lunette astronomique conviennent encore ici, pourvu que R y désigne le demi-diamètre du miroir.

Quant à la clarté, les formules établies pour la lunette astronomique conviennent encore ici évidemment, à condition de multiplier l'expression par le pouvoir réflecteur [2] de la substance qui compose le miroir [3].

(1) Plus exactement, le disque oculaire est l'image réelle donnée par l'oculaire de l'image virtuelle de l'objectif fournie par le miroir plan M.

(2) Le pouvoir réflecteur est le rapport de la quantité de lumière réfléchie à la quantité de lumière reçue.

(3) Faisons remarquer pourtant, que tous les rayons incidents, qui pénè-

La clarté de la lunette astronomique ne pouvant dépasser l'unité pour les objets de diamètre apparent fini, la clarté du télescope de Newton ne peut dépasser la valeur du pouvoir réflecteur : elle est toujours inférieure à l'unité.

Pour les étoiles, la clarté est la même que celle d'une lunette astronomique dont la lentille objective aurait une surface égale à celle du miroir objectif multipliée par le pouvoir réflecteur du métal employé à sa construction. On peut donc accroître indéfiniment la clarté en augmentant la surface du miroir.

Le miroir concave du télescope de Newton était un miroir sphérique fait avec un bronze, dit *bronze des miroirs*, blanc, susceptible d'un beau poli, mais ayant un pouvoir réflecteur égal au plus à 0,6; en outre, le mé al se ternissant à l'air, son pouvoir réflecteur diminuait encore, et l'on était obligé de le repolir de temps en temps.

Le poids considérable de ces miroirs métalliques, qui devaient être de grandes dimensions, quand on voulait une grande clarté dans l'observation des étoiles, qui nécessitaient des tubes et des supports massifs et encombrants, rendait le télescope de Newton inférieur aux lunettes malgré son achromatisme plus parfait.

Foucault a remplacé le miroir de métal du télescope de Newton par un miroir en verre argenté à sa surface. Outre l'avantage d'être plus légers, ces miroirs donnent au télescope une clarté égale à celle de la lunette astronomique car le pouvoir réflecteur de l'argent est voisin de l'unité.

Mais le principal avantage du miroir de Foucault est d'être parabolique au lieu d'être sphérique (voir Chap. IV, § 5.) Etant à peu près exempt d'aberrations de sphéricité, les miroirs de Foucault donnent une image réelle d'une netteté par-

trent par l'ouverture du tube suivant l'axe A de celui-ci, tombent sur le miroir; tandis que les rayons parallèles à un axe B différent de A, qui pénètrent par l'ouverture, ne tombent qu'en partie sur le miroir concave; la fraction qui tombe en dehors de celui-ci est d'autant plus grande que l'angle de l'axe B avec A est plus considérable. Il doit résulter de là, que les points placés sur l'axe du télescope doivent être vus avec un maximum de clarté, et que celle-ci doit aller en diminuant à mesure qu'on approche des bords du champ. Mais ajoutons que cette diminution de clarté est trop faible pour être bien sensible.

faite. Cette image, bien plus nette et bien plus lumineuse que celle fournie par le miroir du télescope de Newton, peut supporter un grossissement oculaire beaucoup plus considérable.



Fig. 141.

Les oculaires formés de deux verres comme ceux d'Huyghens ou de Ramsden présenteraient trop d'aberrations pour la puissance qui est nécessaire ici. Aussi emploie-t-on un oculaire O (fig. 141) formé de quatre lentilles, qu'on peut considérer soit

comme un microscope composé de faible puissance, soit, plutôt, comme un oculaire terrestre de grande puissance, car il présente un diaphragme entre ses deux premières lentilles.

D'après l'expression FP du grossissement des télescopes, on voit que la puissance P de l'oculaire étant plus grande dans le télescope de Foucault que dans celui de Newton, pour avoir un même grossissement, il faut employer un miroir de moindre distance focale F, et, par conséquent, de moindre diamètre. Comme la longueur des tubes est environ égale à F, à puissance égale le télescope de Foucault est moins long et moins gros que celui de Newton; c'est encore là une supériorité.

Enfin, l'oculaire employé redressant l'image donnée par le miroir objectif, le télescope de Foucault présente, en outre, l'avantage de faire voir droits les objets: aussi est-ce le meilleur des télescopes terrestres, comme le meilleur des télescopes astronomiques.

20. EMPLOI DU TÉLESCOPE POUR LA PHOTOGRAPHIE SIDÉRALE. — En retirant un peu l'oculaire convergent d'un télescope, de façon que le plan focal de l'objectif se trouve en avant de celui de l'oculaire, on obtient derrière celui-ci une image réelle des astres qui se trouvent dans le champ de l'instrument. La grandeur de cette image peut varier depuis l'infini jusqu'à des dimensions très petites par un léger déplacement de l'oculaire. On a mis à profit cette propriété pour la photographie sidérale.

21. LUNETTE DE GALILÉE. — 1° Principe et description. — La lunette dite de Galilée se compose d'une lentille objective, convergente par conséquent, et d'une lentille oculaire divergente; ces deux lentilles ont leurs axes principaux confondus. La lentille oculaire est portée à l'extrémité d'un tube qui peut glisser à l'intérieur du tube qui porte l'objectif à son extrémité.

Quand la lunette est mise au point pour un œil accommodé à distance finie, non seulement la lentille oculaire L (fig. 142) mais encore son foyer postérieur f_1 se trouvent en avant du plan focal F de la lentille objective. L'image réelle et renversée A'B' d'un objet lointain AB, qui se formerait dans ce plan focal, si l'oculaire était enlevé, fonctionne comme un objet virtuel par

rapport à celui-ci quand il est en place. Or, nous avons vu (Chap. III, § 20, p. 349) qu'un objet virtuel placé au delà du premier plan focal f_1 d'une lentille divergente donne naissance à une image virtuelle A″B″ renversée par rapport à l'objet A′B′.

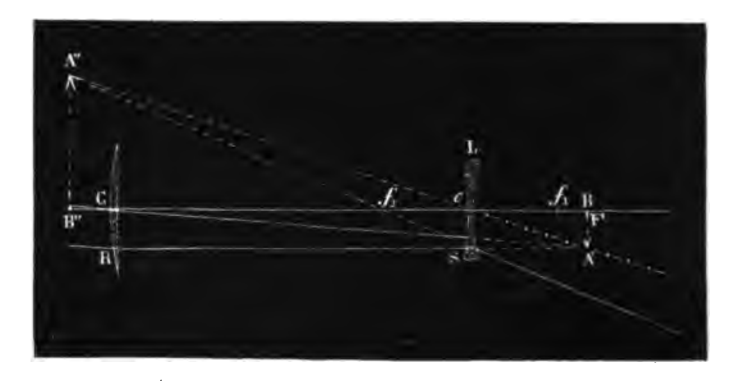


Fig. 142.

C'est cette image A″B″ que l'œil voit quand il regarde à travers l'instrument [1] : la lunette de Galilée fait voir droits les objets.

2° Mise au point. — Quand le foyer f_1 de l'oculaire coïncide avec le foyer F de l'objectif, l'image A″B″ est située à l'infini : l'instrument est alors mis au point pour un œil normal. Mais, si l'œil est disposé pour voir à distance finie, il faut un peu enfoncer l'oculaire, par rapport à la position précédente, pour que son foyer f_1 tombe en avant du foyer F de l'objectif, ce qui ramène l'image virtuelle A″B″ à distance finie. Si, au contraire, à partir de la première position on retirait un peu l'oculaire, de façon que son foyer f_1 tombât en arrière de F, l'image donnée par l'instrument serait réelle et fonctionnerait par rapport

(1) Rappelons la construction de cette image. On mène le rayon RS parallèle à l'axe principal et dont le prolongement passe par un point A′ de A′B′ ; ce rayon est réfracté à travers la lentille divergente L, de façon que le prolongement du rayon réfracté passe par le foyer f_1 de la lentille. On mène ensuite l'axe secondaire cA′. Puisque SA′ est plus grand que f_1c et, par conséquent, que son égal f_2c, les droites A′c et Sf_1 se rencontrent du côté de f_1c en un point A″ qui est l'image virtuelle de A′.

à l'œil comme un objet virtuel : cette mise au point peut être convenable pour un œil hypermétrope.

Ainsi, comme pour la lunette astronomique, le premier foyer f_1 de l'oculaire doit tomber dans le voisinage du foyer de l'objectif pour la mise au point, et, plus l'oculaire est divergent, plus est faible le déplacement qu'on peut lui donner sans cesser de voir net, malgré l'accommodation de l'œil aux diverses distances.

3° Grossissement. — Désignons par F la distance focale de l'objectif et par α le diamètre apparent de l'objet regardé AB, supposé à l'infini. Son image réelle A'B' a une longueur égale à αF.

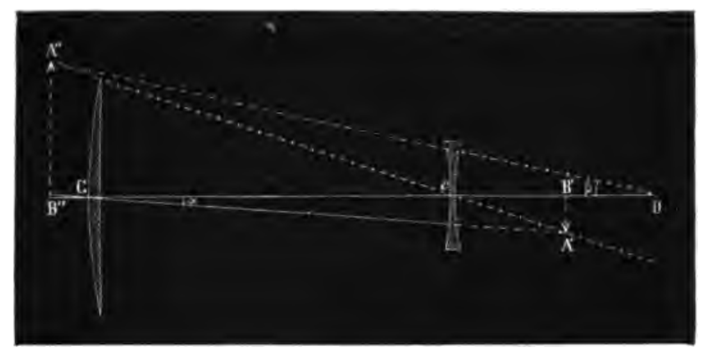


Fig. 143.

Appelons e la distance à l'oculaire du point nodal O de l'œil ($e = Oc$) et d la distance OB'' de l'image A''B'' à l'œil (fig. 143).

L'angle sous lequel l'œil voit A''B'' est, en confondant l'angle avec sa tangente :

$$\frac{A''B''}{OB''} = \frac{A''B''}{A'B'}\,\frac{A'B'}{OB''} = \frac{B''c}{B'c}\,\frac{A'B'}{OB''} = \frac{d-e}{p}\,\frac{\alpha F}{d}$$

en désignant par p la distance B'c. Le grossissement G qui est le rapport de cet angle à l'angle α est donc donné par :

$$G = \frac{d-e}{p}\,\frac{F}{d}$$

D'ailleurs, en appelant f la valeur absolue de la distance focale de l'oculaire, on a :

$$-\frac{1}{p}-\frac{1}{d-e}=-\frac{1}{f} \text{ d'où : } \frac{d-e}{p}=\frac{d-e}{f}-1$$

Ce qui donne :

$$G=\left(\frac{d-e}{f}-1\right)\frac{F}{d}=\left(1-\frac{e+f}{d}\right)\frac{F}{f}$$

Pour $d=\infty$, c'est à dire quand la mise au point est faite pour un œil accommodé pour voir à l'infini, le grossissement est égal à $\frac{F}{f}$; il est le même que celui d'une lunette astronomique qui aurait même objectif et dont l'oculaire aurait même distance focale en valeur absolue.

Mais si d est positif et fini, le grossissement est moindre : la lunette de Galilée est moins avantageuse que la lunette astronomique pour les myopes (1).

Si, au contraire, d est négatif, ce qui correspond à une image réelle donnée par l'instrument, et à une mise au point qui peut être convenable pour un œil hypermétrope, le grossissement est plus grand que celui de la lunette astronomique toujours égal à $\frac{F}{f}$ quand l'œil est disposé pour ne rien perdre du champ; la lunette de Galilée est avantageuse pour les hypermétropes.

4° DISQUE OCULAIRE. — L'oculaire, étant divergent, donne une image virtuelle de l'objectif : il y a un *disque oculaire virtuel.* Tous les rayons qui traversent l'instrument ont des prolongements qui passent par ce disque oculaire : aussi les rayons semblent-ils traverser ce disque et l'espace regardé à travers la

(1) Il y a des myopes dont le *punctum remotum* est à 10 cent. de l'œil $(d=10)$; si nous prenons en outre $e=1,5$ et $f=3,5$, on voit que le grossissement est pour cet œil $\left(1-\frac{1,5+3,5}{10}\right)\frac{F}{f}=\frac{1}{2}\frac{F}{f}$ la moitié seulement de ce qu'il serait pour un œil normal.

lunette de Galilée paraît-il vu à travers un trou, le disque oculaire. Comme ce disque est placé en avant de l'oculaire à une distance inférieure à sa distance focale, il est trop près de l'œil pour être vu nettement, et ses bords paraissent diffus, comme les bords d'un trou placé très près de l'œil.

Du reste, le rapport $\frac{D}{d}$ du diamètre D de l'objectif au diamètre du disque oculaire d est égal encore ici au grossissement pour la mise au point d'un œil accommodé pour l'infini $\left(G = \frac{F}{f}\right)$. En effet, en appelant p' la distance à laquelle le disque oculaire se trouve de la lentille divergente, la distance de l'objectif à l'oculaire étant $F - f$, on a :

$$\frac{D}{d} = \frac{F - f}{p'}$$

d'autre part on a :

$$\frac{1}{F - f} - \frac{1}{p'} = - \frac{1}{f}$$

d'où :

$$\frac{D}{d} = \frac{F - f}{p'} = \frac{F - f}{f} + 1 = \frac{F}{f} = G$$

5° CHAMP. — Supposons, pour plus de simplicité, que la mise au point soit faite pour un œil accommodé pour voir à l'infini ; les rayons provenant d'un même point A, en pénètrant dans l'œil, forment alors un cylindre PLP'L' (fig. 144) dont la pupille PP' est la base. Ce cylindre découpe dans le plan du disque oculaire un cercle MM', de même rayon ρ que la pupille, qui est l'image virtuelle d'un cercle NN', de rayon H, situé sur l'objectif : tous les rayons issus de A qui traversent la pupille passent par ce cercle NN'. On a du reste $H = \rho G$ en désignant par G le grossissement ; or, le rayon ρ de la pupille étant égal environ à $0^c,15$ quand l'œil est vivement éclairé, on voit que le rayon H du cercle NN' n'est pas très grand. Aussi, parmi les rayons issus d'un même point A, ceux qui sont efficaces, c'est-à-dire ceux qui

pénètrent jusqu'à la rétine, forment un cylindre SNS'N' d'une section assez petite, et ne tombant que sur une faible portion NN' de l'objectif. Par conséquent, si l'on couvre cette portion

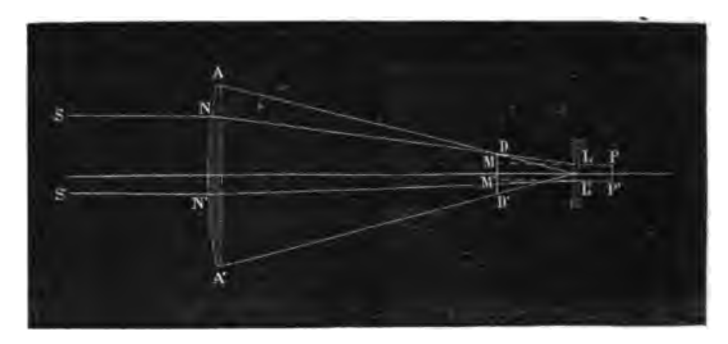


Fig. 144.

NN' de l'objectif, on masquera complètement le point A, et l'on diminuera la clarté des points voisins, sans diminuer la clarté de la plupart des autres points du champ, contrairement à ce qui a lieu pour la lunette astronomique (voir § 17 5°).

Il résulte de là que, si tout le faisceau cylindrique de rayons, tel que SNS'N', tombe sur l'objectif, le point A est dans le champ de pleine lumière. Si le faisceau des rayons incidents tombe en dehors de la surface de l'objectif, le point n'est pas vu : il est en dehors du champ extrême. Enfin, si une portion seulement du faisceau cylindrique tombe sur l'objectif, le point est en dehors du champ de pleine lumière mais en dedans du champ extrême. Du reste, suivant que le faisceau SNS'N' tombe en totalité ou en partie sur l'objectif, le cylindre correspondant MPM'P' passe en totalité ou en partie par le disque oculaire DD'.

Ces remarques conduisent à la règle suivante, pour avoir le champ des points vus en pleine lumière. On mène le cône DPUP'D' (fig. 145) dont le contour s'appuie sur les pourtours du disque oculaire DD' et de la pupille PP', et dont le sommet U est en dehors de l'espace compris entre ces deux bases. Par le centre optique *o* de l'oculaire on mène des droites parallèles aux génératrices du cône précédent : tous les points dont les images ont des axes oculaires contenus à l'intérieur de ce dernier cône

CoC′ sont vus en pleine lumière, puisque le cylindre des rayons tombant sur la pupille et parallèles à l'un de ces axes rencontre le disque oculaire DD′. Ce cône CoC′, découpe dans le plan focal de l'objectif un cercle CC′ qui renferme les images réelles données

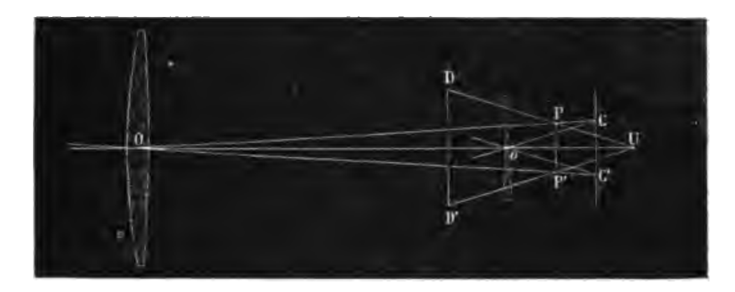


FIG. 145.

par l'objectif de tous les points de l'espace vus en pleine lumière. Le champ de pleine lumière est donc contenu à l'intérieur du cône COC′ ayant pour sommet le centre optique O de l'objectif (que nous supposons confondu avec les points nodaux) et ayant pour base CC′.

Il est aisé d'après cela de calculer la valeur de ce champ, en supposant la pupille centrée sur l'axe de l'instrument. Désignons par r le rayon du disque oculaire, par ρ celui de la pupille, par e la distance de la pupille à l'oculaire et par p' la distance de l'oculaire au disque oculaire; on a pour l'angle générateur ω du cône DUD′ :

$$\text{tang}\ \omega = \frac{r-\rho}{e+p'}$$

Le rayon m du cercle CC′ est donné par :

$$m = f\ \text{tang}\ \omega = f\,\frac{r-\rho}{e+p'}$$

et, enfin, la valeur c de l'angle générateur COo du cône qui représente le champ est donnée par :

$$\text{tang } c = \frac{m}{F} = \frac{f}{F}\,\frac{r - \rho}{e + p'} = \frac{1}{G}\,\frac{r - \rho}{e + p'}$$

On a d'ailleurs $r = \frac{R}{G}$, en désignant par R le rayon de l'objectif et

$$\frac{1}{F - f} - \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f} \quad \text{d'où :} \quad p' = \frac{f(F - f)}{F} = f\left(1 - \frac{1}{G}\right)$$

il vient alors :

$$\text{tang } c = \frac{R - \rho G}{G\,(Ge + fG - f)}$$

Pour un même grossissement le champ de pleine lumière augmente quand e diminue : il faut placer l'œil aussi près que possible de l'oculaire. Le champ augmente quand f diminue : il faut avoir un oculaire à courte distance focale ; f est en général compris entre 3 et 4 cent., les aberrations empêchent de descendre au-dessous de 3 cent. Le champ augmente avec le rayon R de l'objectif, et il faut avoir $R > \rho G$ pour que le champ c ne soit pas nul, c'est-à-dire $\frac{R}{F} > \frac{\rho}{f}$. Comme $\frac{\rho}{f}$ est de même ordre de grandeur que pour une lunette astronomique ou terrestre, pour laquelle on a $\frac{R}{F} = \frac{\rho}{f}$ (voir § 17 5°), on voit que le rapport entre le rayon de l'objectif et sa distance focale doit être notablement plus grand que pour une lunette astronomique ou terrestre, si l'on veut avoir un champ suffisant. On a adopté le nombre $\frac{1}{5}$ environ pour $\frac{R}{F}$; les aberrations empêchent d'aller au-delà.

Avec les nombres indiqués plus haut :

$$\frac{R}{F} = \frac{1}{5} \qquad f = 3 \qquad \rho = 0{,}15 \qquad e = 1$$

on a :

$$\tang c = \frac{2,25}{20\left(G - \frac{3}{4}\right)} \qquad \text{ou environ :} \qquad \tang c = \frac{1}{9G}$$

or, pour une lunette terrestre (§ 18), on a :

$$\tang c = \frac{3}{7G}$$

Ainsi le champ d'une lunette de Galilée a une valeur qui n'est guère que le quart de celle d'une lunette terrestre, pour le même grossissement.

En déplaçant un peu l'œil devant l'oculaire d'une lunette de Galilée, on fait varier la portion de l'espace qui est vue à travers l'instrument, comme on le ferait en déplaçant l'œil devant un trou situé très près de l'œil. Cette propriété compense en partie la faiblesse du champ.

On voit, enfin, que le champ diminue, comme pour tous les téléscopes, quand le grossissement augmente.

On obtient le champ extrême par une construction analogue à la précédente. Il faut seulement remplacer le cône DPUP'D' par le cône ayant pour bases encore DD' et PP', mais dont le sommet est entre ces deux bases.

6° CLARTÉ. — En négligeant l'absorption de la lumière due à son passage à travers les lentilles, et son affaiblissement par réflexion sur les faces de celles-ci, la quantité de lumière envoyée par un point A et contenue dans le faisceau des rayons efficaces SN S'N' (fig. 144) pénètre complètement dans l'œil, puisqu'elle est en arrivant sur la pupille PP' contenue dans le cylindre LPL'P' du diamètre de celle-ci.

Par conséquent, dans le cas d'une étoile dont l'image rétinienne a la même grandeur quand on regarde à l'œil nu ou quand on regarde à travers la lunette, la clarté de celle-ci a pour valeur le rapport de la section πH^2 du cylindre SN S'N' à la

surface $\pi\rho^2$ de la pupille, c'est-à-dire $\left(\frac{H}{\rho}\right)^2 = G^2$: la clarté égale le carré du grossissement.

Dans le cas où l'objet a un diamètre apparent fini, la quantité de lumière qui provient d'une surface déterminée de l'objet et qui pénètre par la pupille est, pour la même raison, multipliée par G^2, quand on se sert de la lunette ; mais comme elle est alors répartie sur une surface G^2 fois plus grande, la quantité de lumière par unité de surface de l'image rétinienne est la même, soit qu'on regarde à travers l'instrument, soit qu'on regarde à l'œil nu : la clarté de la lunette de Galilée est égale à l'unité.

Ainsi, on trouve le même résultat que pour une lunette astronomique ou terrestre dont le disque oculaire est égal ou supérieur à la pupille.

7° ACHROMATISME. — L'oculaire divergent ne corrige pas un léger défaut d'achromatisme de l'objectif comme un oculaire convergent. Aussi, l'objectif et l'oculaire doivent-ils être achromatisés avec beaucoup de soin. La faible distance focale de l'oculaire et le diamètre de l'objectif relativement grand pour sa distance focale nécessitent un travail très soigné des lentilles pour que les aberrations de sphéricité et de réfrangibilité soient suffisamment réduites.

En général, l'objectif et l'oculaire sont chacun composés de trois lentilles de verres différents pour avoir un bon achromatisme (1).

En résumé, la lunette de Galilée présenterait la même clarté que la lunette terrestre, si les réflexions sur les faces des lentilles n'affaiblissaient pas la lumière ; en réalité, elle a une clarté plus grande, car elle n'a que deux lentilles au lieu de cinq. Elle est beaucoup plus courte que la lunette terrestre pour un même grossissement et, par conséquent, plus légère et plus facile à diriger ; c'est pourquoi elle est préférée pour la confec-

(1) Ce qui donne six verres pour les deux lentilles d'une lunette de Galilée. Comme dans les jumelles de spectacle il y a deux lunettes de Galilée, cela fait en tout douze verres, comme l'indiquent les opticiens.

tion des jumelles de spectacle. Mais elle est inférieure à la lunette terrestre sous le rapport du champ. En outre, pour avoir le même achromatisme et la même netteté, il faut employer des lentilles plus compliquées et travaillées avec plus de soin.

22. Historique des télescopes. — La découverte de la lunette d'approche paraît due au hasard. On raconte que, vers 1590, les enfants d'un opticien de Middelbourg, Zacharie Jansen, ayant placé l'une devant l'autre une lentille convergente et une lentille divergente, virent le coq du clocher voisin rapproché et grossi : le télescope appelé aujourd'hui *lunette de Galilée* était inventé ; il porta pendant quelque temps le nom plus juste de *lunette batave*. Il est remarquable que les deux principaux instruments d'optique, qui ont fait faire à l'homme tant de découvertes, le télescope et le microscope composé, soient dus à un même homme, l'opticien hollandais Zacharie Jansen.

La découverte de la lunette d'approche ne fut divulguée qu'en 1606 par un autre opticien de Middelbourg Jean Lippershey qui, sur quelques indices, avait retrouvé de son côté le moyen de construire ce télescope. Il demanda pour sa lunette un brevet d'invention aux États généraux, qui le lui refusèrent, parce que plusieurs personnes sollicitaient la même faveur.

Si cet instrument porte aujourd'hui le nom de *lunette de Galilée*, c'est que le grand savant italien est le premier qui ait eu l'idée de s'en servir pour étudier le ciel, ce qui lui a permis d'y faire de nombreuses découvertes. Du reste, en 1609, Galilée connaissant seulement l'existence de la lunette batave sut deviner la manière dont elle était faite, et construisit lui-même celle qui devait lui servir.

La théorie des lentilles a conduit Képler, en 1611, à l'invention de la lunette astronomique et de la lunette terrestre ; mais c'est P. Scheiner qui a construit pour la première fois ces instruments. Dans la lunette terrestre de Képler l'image réelle fournie par l'objectif était redressée par une seule lentille, ce qui donnait des images déformées par suite des aberrations. Vers 1645, P. Rheita imagina d'employer deux lentilles au lieu d'une, ce qui donna un système convergent plus aplanétique, pour le même champ.

C'est Campani qui a imaginé les oculaires composés de deux verres; ils ont moins d'aberrations que l'oculaire simple de Képler. Huyghens inventa, en 1656, l'oculaire négatif, qui porte son nom et dont nous avons vu les avantages. L'oculaire positif de Ramsden a été imaginé par lui en 1782, pour être appliqué aux lunettes servant dans les appareils de mesures.

L'invention du télescope à miroir est due au père Zucchi, jésuite italien. Dans un ouvrage publié à Lyon, en 1652, ce physicien assure que dès 1616, il a eu l'idée de remplacer l'objectif des lunettes par un miroir concave.

Mais le premier télescope catoptrique fut construit, ou au moins décrit, en 1663 par Gregory [1]. Dans cet instrument l'image

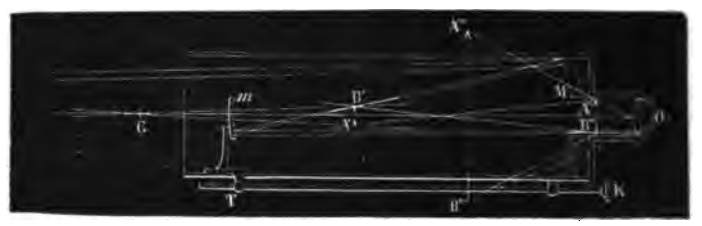


Fig. 146.

réelle A'B' (fig. 146) donnée par le miroir objectif M vient se former en avant d'un second miroir concave *m* de petite dimension situé dans l'axe de l'instrument. La distance des deux miroirs est supérieure à la somme de leurs distances focales, de façon que le miroir *m* donne de A'B' une image réelle A''B'' agrandie, renversée par rapport à A'B', droite par rapport à l'objet. C'est cette image droite qui est regardée à travers l'oculaire O, le miroir objectif M étant percé en son milieu d'une ouverture convenable pour laisser passer la lumière; ainsi, les objets sont vus droits. L'oculaire du télescope de Gregory est fixe; c'est en faisant varier la position du miroir *m*, au moyen de la tige T et du bouton K, que se fait la mise au point [2].

(1) Jacques Gregory, né en 1638 à New-Aberdeen (Ecosse), mort en 1675.

(2) On remarquera l'analogie du télescope de Gregory et de la lunette terrestre de Képler : dans le télescope, les deux premières lentilles de la

Le télescope de Gregory présentait sur les lunettes l'avantage de ne pas avoir d'aberration de réfrangibilité; mais les deux réflexions faisaient perdre beaucoup de lumière et les aberrations de sphéricité s'ajoutant, les images étaient déformées; c'est pourquoi ce télescope fut peu employé.

En 1672, Cassegrain, professeur au collège de Chartres, imagina un télescope composé d'un miroir concave M (fig. 147)

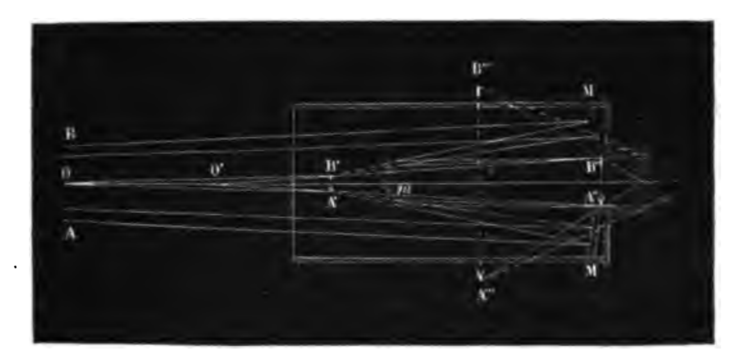


FIG. 147.

comme objectif et d'un miroir convexe *m* placé en avant du plan focal de M. L'image réelle A'B' qui serait donnée par l'objectif si le miroir *m* était enlevé, fonctionne comme un objet virtuel par rapport à ce miroir. Or, celui-ci est placé de façon que A'B' tombe entre sa surface et son plan focal; par conséquent, le miroir *m* donne de l'objet virtuel A'B' une image réelle agrandie A''B'' droite par rapport à A'B' et renversée, par conséquent, par rapport à l'objet (voir Chap II, § 18). Cette image

lunette sont remplacées par deux miroirs concaves qui produisent le même effet.

Il est clair que dans l'un et l'autre de ces instruments le grossissement est donné par l'expression $\frac{F}{f}\frac{p'}{p}=\frac{F}{f}\left(\frac{p'}{\varphi}-1\right)$, dans laquelle F représente la distance focale de l'objectif, f celle de l'oculaire, φ celle du miroir m, p' et p les distances des images A''B'' et A'B' au miroir m, ou à la lentille équivalente.

est regardée par un oculaire disposé comme celui du télescope de Gregory (1).

Le télescope de Cassegrain présentait sur le précédent l'avantage d'être plus court ; mais il avait le même inconvénient de donner des images peu claires et peu nettes ; et, comme il renversait les objets, il fut encore moins employé que le télescope de Gregory.

Newton, frappé de l'inconvénient du chromatisme des lentilles servant comme objectif dans les lunettes, et ne croyant pas à la possibilité de corriger ce défaut, imagina en 1672 le télescope qui porte son nom (voir § 19). Cet instrument, par la netteté des images qu'il donnait, constituait un progrès notable sur les lunettes employées jusqu'alors.

Les lentilles objectives achromatiques, qui furent construites pour la première fois par Dollond en 1757, remirent en faveur les lunettes : une plus grande clarté, un poids moindre et une plus grande facilité pour installer l'instrument et s'en servir, étaient des raisons suffisantes.

Cependant les progrès de l'astronomie nécessitaient des instruments de plus en plus puissants. La difficulté d'obtenir des lentilles pures de grande surface fit revenir Herschel (2), vers 1780, à l'emploi des miroirs. Le grand astronome, d'abord simple amateur, polissait lui-même ses miroirs ; en enlevant par le polissage un peu de matière sur les bords du miroir, il les rendait paraboliques, ce qui lui permit de leur donner des dimensions considérables. Le plus grand, qu'il construisit de 1785 à 1789, avait 12 mètres de distance focale et $1^m,47$ de diamètre ; le

(1) Pour la construction de l'image fournie par m nous renvoyons au § 19 Chap. II.

Le grossissement est donné par l'expression $\frac{F}{f}\frac{p'}{p} = \frac{F}{f}\left(1 + \frac{p'}{\varphi}\right)$, en désignant par F, φ et f les distances focales de M, de m et de l'oculaire, et par p et p' les valeurs absolues des distances des images A'B' et A''B'' au miroir m.

(2) William Herschel, né à Hanovre en 1738, mort en 1822. Il construisit ses télescopes, et fit ses observations astronomiques d'abord à Bath, puis à Windsor en Angleterre.

grossissement de ce télescope était de plus de 6000 en diamètre. Du reste, dès 1786, Herschel renonça à l'emploi du prisme à réflexion totale du télescope de Newton, qui faisait perdre un peu de lumière et se contenta d'incliner légèrement le miroir, de façon que l'image réelle de la partie du ciel qui se trouvait dans l'axe du tube vint se former près du bord supérieur de celui-ci ; cette image était regardée directement avec un oculaire. La figure 148 représente la disposition qui était employée pour

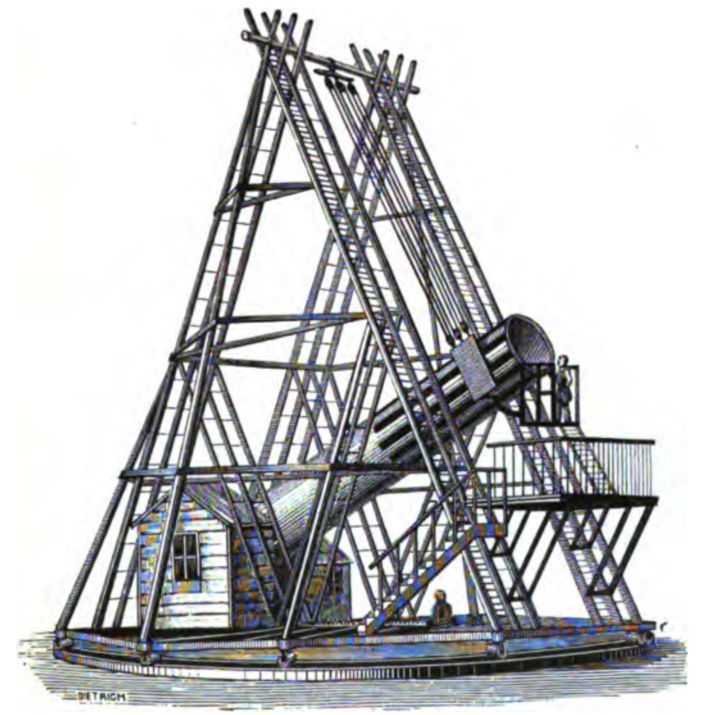


Fig. 148.

soutenir et manœuvrer ces gigantesques télescopes, avec lesquels Herschel a fait les plus belles découvertes, malgré le ciel brumeux de la Grande-Bretagne.

En 1842, Lord Ross a construit, à Birr, en Irlande, sur le

modèle de ceux d'Herschel, un télescope encore plus grand ayant $1^m,83$ de diamètre et $16^m,76$ de distance focale.

Aujourd'hui les grands perfectionnements apportés au télescope par le physicien français Foucault ont permis de réduire les dimensions de ces instruments, tout en leur donnant une puissance encore plus considérable.

CHAPITRE VIII

MESURES OPTIQUES

Nous avons réuni dans un dernier chapitre toutes les mesures qui concernent l'optique géométrique, plusieurs de ces mesures nécessitant, pour être effectuées avec précision, l'emploi des instruments décrits dans le chapitre précédent.

1. MESURE DES INDICES DE RÉFRACTION.—MÉTHODE DE DESCARTES. — Descartes, qui a établi les lois de la réfraction, a indiqué la première méthode employée pour mesurer les indices.

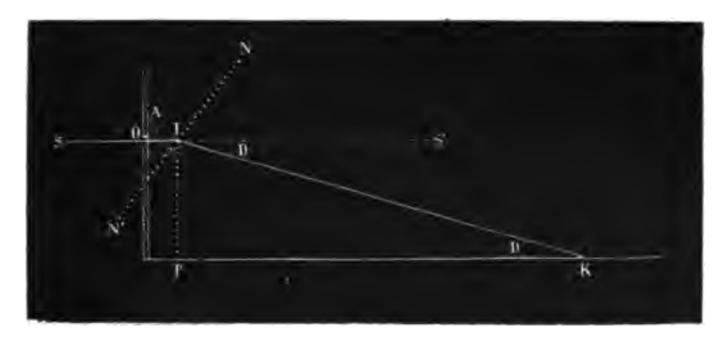


Fig. 149.

Un prisme A formé de la substance étudiée est placé contre une petite ouverture O (fig. 149) pratiquée dans le volet d'une chambre noire; l'arête du prisme, tournée vers le haut, est ren-

due horizontale, et la face placée du côté du volet est rendue verticale. L'ouverture livre passage à un faisceau de rayons solaires SOI renvoyés dans une direction horizontale à l'aide d'un porte-lumière. Ce faisceau tombe sur le prisme, dont la section principale est verticale; il passe sans déviation à travers la première face à laquelle il est normal, est dévié en I vers la base du prisme par la seconde face et vient peindre une tache lumineuse en K sur le plancher horizontal de la pièce où l'on opère.

En désignant par A l'angle du prisme, par D l'angle de déviation S'IK, par i' l'angle d'émergence NIK, par r' le second angle d'incidence SIN', on a, puisque les premiers angles d'incidence i et de réfraction r sont nuls :

$$(1) \qquad D = i' - r' \quad \text{et} \quad A = r'$$

relations évidentes, du reste, à l'inspection de la figure.

D'ailleurs, en désignant par n l'indice de réfraction par rapport à l'air de la substance qui forme le prisme, on a :

$$(2) \qquad n = \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\sin(A+D)}{\sin A}$$

On mesure l'angle A du prisme avec un goniomètre quelconque. Pour avoir l'angle D, on abaisse du point d'émergence I la verticale IP sur le plancher horizontal, et l'on mesure les distances IP et PK; l'angle IKP étant égal comme alterne-interne à la déviation S'IK, on a :

$$\operatorname{tang} D = \frac{IP}{PK}$$

A et D étant connus, la formule (2) donne la valeur de l'indice.

Comme le faisceau lumineux est dispersé par le prisme, on obtient en K un spectre. En mesurant les distances PK du point P aux centres K des taches lumineuses dans les principales couleurs, on a les indices pour ces diverses couleurs.

Cette méthode est évidemment grossière, car les taches en

K ont une certaine étendue dans chaque couleur et ne sont pas des points géométriques : la longueur PK est mal déterminée.

Faisons remarquer que l'angle du prisme A, étant égal au second angle d'incidence r', doit être inférieur à l'angle limite pour qu'il y ait émergence; ainsi un angle de 45° est déjà trop considérable pour le verre.

2. MÉTHODE DU MINIMUM DE DÉVIATION. — Nous avons établi (Chap. III § 8, form. 7) la relation :

$$n = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

entre l'indice n, l'angle A du prisme et la déviation minima D. C'est sur cette relation qu'est basée la méthode la plus précise qu'on emploie aujourd'hui pour mesurer les indices de réfraction.

Pour effectuer avec précision la mesure de l'angle du prisme et de la déviation minima, on se sert du *goniomètre de Babinet*. Cet instrument se compose d'un cercle gradué K (fig. 150), portant en son centre une plate-forme sur laquelle on pose le prisme P. Cette plate-forme peut tourner autour d'un axe passant par le centre du cercle gradué, et l'angle de rotation est donné par une alidade pourvue d'un vernier V. La plate-forme est constituée par un miroir plan exactement perpendiculaire à l'axe de rotation [1]. La lumière arrive sur le prisme au moyen d'un *collimateur* FA; on désigne ainsi une fente F à bords mobiles, comme celle qui sert à la production d'un spectre pur, placée dans le plan focal d'une lentille convergente A. Celle-ci donne de la fente lumineuse une image infiniment grande placée à l'infini. La fente F est portée par

(1) On s'assure que le miroir est perpendiculaire à l'axe de rotation en regardant l'image qu'il donne d'un objet pendant qu'on le fait tourner autour de l'axe fixe. S'il est exactement perpendiculaire à l'axe, le miroir tourne dans son plan, et les images conservent la même position ; s'il n'est pas perpendiculaire, les images se déplacent par la rotation.

un tube qui peut glisser à l'intérieur d'un second tube qui porte la lentille A à son extrémité ; ce tirage est utile pour mettre exactement la fente dans le plan focal. En tournant convenablement



Fig. 150.

le premier, tube, on rend la fente parallèle à l'axe de rotation de la plateforme. Le collimateur, dirigé suivant un rayon du cercle gradué, est fixé invariablement à celui-ci.

La lumière, après s'être réfractée à travers le prisme ou s'être réfléchie sur une de ses faces, est reçue dans une lunette astronomique BC, présentant un réticule formé de deux fils en croix. Cette lunette, dirigée suivant un des rayons du cercle gradué, peut tourner autour de l'axe qui passe par le centre du cercle, et ses déplacements angulaires sont mesurés par un vernier S. L'axe de la lunette et du collimateur sont dans un même plan.

Pour régler l'appareil, on commence par regarder à travers la

lunette un objet placé à l'infini et l'on donne le tirage convenable pour que l'objet soit vu parfaitement net; puis on fait tourner la lunette de manière à mettre son axe dans le prolongement de celui du collimateur. On voit ainsi la fente à travers la lunette et la lentille du collimateur, et l'on règle le tirage de celui-ci de façon que la fente soit vue parfaitement nette : celle-ci est alors dans le plan focal, la lentille collimatrice en donnant une image à l'infini, puisqu'elle est vue nettement à travers la lunette. Ce réglage effectué, tous les rayons issus d'un point O de la fente sont parallèles entre eux après avoir traversé le collimateur, et s'ils se réfléchissent sur une face du prisme ou s'ils sont réfractés par lui, ils restent encore parallèles entre eux ; de cette façon, si ces rayons pénètrent dans la lunette astronomique ils donnent dans le plan focal de son objectif une image nette de la fente qui est vue à travers l'oculaire.

On dispose ensuite le prisme sur la plate-forme, et on le fixe, avec un peu de cire molle, de manière que l'arête et son image dans le miroir soient dans le prolongement l'un de l'autre ; l'arête étant alors perpendiculaire au miroir plan est parallèle à l'axe de rotation.

Pour mesurer l'angle du prisme on peut employer l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes.

1re Méthode. — On dispose la lunette L (fig. 151) de façon à recevoir les rayons issus du collimateur K après réflexion sur une face AB du prisme, et, avec la vis de rappel, on déplace lentement la lunette jusqu'à amener l'image de la fente sur la croisée des fils du réticule (fig. 152) : les rayons réfléchis, situés dans une section principale, sont alors dirigés parallèlement à l'axe optique de la lunette. On tourne la plateforme, qui porte le prisme, jusqu'à amener de nouveau l'image de la fente à se former sur la croisée des fils du réticule, grâce à la réflexion des rayons sur la seconde face du prisme ; cet angle de rotation, qui est donné par les lectures sur le cercle gradué, est le supplément de l'angle du prisme. En effet, il a fallu pour viser de nouveau la fente par réflexion, amener la seconde face à prendre une position A'C' exactement parallèle à la position AB de la première face avant la rotation ; or, les sections droites du prisme étant perpendiculaires à l'axe de rota-

tion, toute droite, telle que AC, située dans une section droite, tourne d'un même angle; l'angle mesuré est, par conséquent, égal à l'angle CHC′ que forme une même face dans ses deux positions successives AC et A′C′, et la figure 151 fait voir immédiatement que l'angle CHC′ est le supplément de l'angle BAC du prisme.

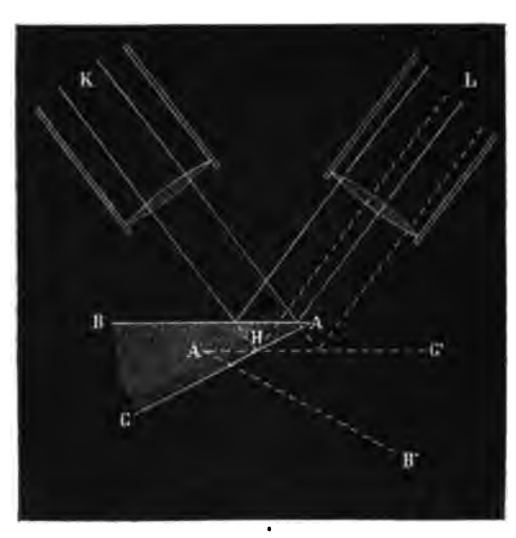
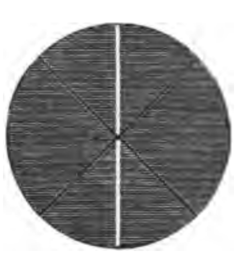


Fig. 151.

On comprend maintenant pourquoi il est nécessaire de rendre parallèles les rayons issus d'un point de la fente. S'il n'en était pas ainsi, l'image de la fente donnée par réflexion se formerait à distance finie, et, en amenant la seconde face du prisme à occuper une position A′C′ parallèle à la première position AB de la première face, la lunette ne viserait plus exactement la fente, la nouvelle image donnée par réflexion n'occupant pas exactement la position de la première, sauf dans le cas où la distance de AB à A′C′ est nulle. Aussi, pour éviter l'erreur que peut causer un léger défaut de réglage du collimateur, faut-il rendre la distance de AB à A′C′ très faible, ce qu'on obtient en mettant l'arête du prisme très près de l'axe de rotation, condition toujours facile à remplir: l'arête est exactement sur l'axe, quand en tournant la plateforme, elle ne se déplace pas.


Fig. 152.

2me Méthode. — En faisant tourner la plate-forme, on dispose le prisme de façon que son plan bissecteur soit dirigé à peu près suivant l'axe du collimateur. Les rayons qui sortent de celui-ci se réfléchissent, les uns sur la face AB (fig. 153), les autres sur la face AC. Considérons le rayon KA qui tombe sur l'arête; son prolongement AS divise une section principale BAC du prisme en deux angles BAS et SAC; or, un rayon infiniment voisin de KA qui tombe sur la face AB se réfléchit suivant AR en faisant avec la face un angle RAB égal à l'angle BAS, et un rayon infiniment voisin de KA qui tombe sur AC se réfléchit suivant AT en faisant avec AC un angle TAC égal à l'angle CAS. Par conséquent, l'angle TAR que forment entre eux les rayons réfléchis sur chacune des faces est égal au double de l'angle du prisme BAC.

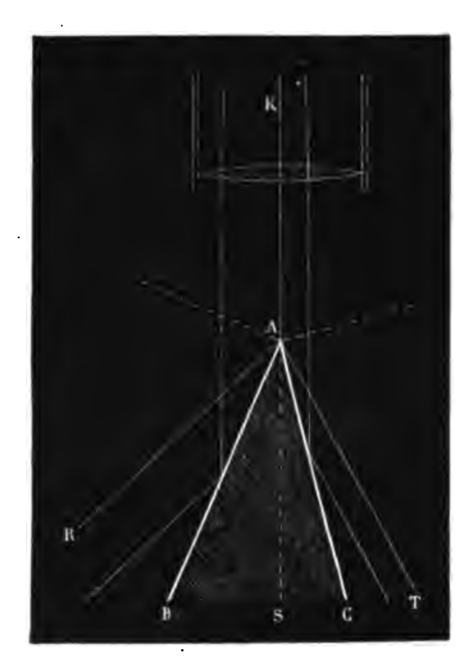


Fig. 153.

Il en résulte qu'en plaçant la lunette d'abord de façon à viser la fente par réflexion sur AB, puis de façon à viser la fente par réflexion sur AC, le déplacement angulaire de la lunette est le double de l'angle du prisme [1].

(1) Pour cette méthode, le vernier de la plate-forme est inutile; comme il est inutile aussi pour déterminer la déviation minima, cette partie de l'instrument n'est pas indispensable.

Passons maintenant à la mesure de la déviation minima. Pour cela, supposons d'abord qu'on ait éclairé la fente avec une lumière monochromatique, tèlle que celle qui est fournie par un brûleur de Bunsen, quand on met dans la flamme un morceau de chlorure de sodium fondu. On dispose la lunette de façon à recevoir les rayons sortis du collimateur après qu'ils ont été déviés par le prisme : il se forme encore dans le plan focal de l'objectif de la lunette une image nette de la fente, puisque les rayons issus d'un de ses points, et qui sont parallèles entre eux en tombant sur le prisme, émergent aussi parallèlement entre eux.

En tournant légèrement la plate-forme, la déviation varie et l'on voit l'image de la fente se mouvoir dans la lunette; on tourne alors la plate-forme dans le sens qui diminue la déviation, en déplaçant en même temps la lunette, si c'est nécessaire. A partir d'une certaine position, en continuant le mouvement dans le même sens, on voit l'image de la fente rester stationnaire puis rétrograder : cette position correspond au minimum de déviation. En déplaçant la lunette à l'aide de la vis de rappel, on amène la croisée des fils du réticule à occuper la position extrême que peut prendre la fente : l'axe optique de la lunette est parallèle alors aux rayons déviés par le prisme dans la position du minimum de déviation.

La lecture du vernier de la lunette étant faite, on déplace celle-ci de façon à la mettre en face du collimateur. Sans qu'il soit nécessaire d'enlever le prisme, si une portion seulement du faisceau des rayons sortis du collimateur tombe sur lui, on voit dans la lunette l'image de la fente due aux rayons qui n'ont pas rencontré le prisme. On déplace lentement la lunette de façon à viser de nouveau la fente : l'axe optique se trouve alors parallèle aux rayons qui sortent du collimateur. La différence des lectures dans les deux positions de la lunette, donnant l'angle dont a tourné son axe optique, donne par là-même la déviation minima.

Au lieu de mesurer simplement la déviation, il est préférable de mesurer le double de la déviation minima, en opérant de la manière suivante.

Après avoir noté la position de la lunette qui correspond au

minimum de déviation, on tourne la plate-forme de manière à faire tomber les rayons sur l'autre face du prisme et à obtenir la déviation dans une direction symétrique de la précédente par rapport aux rayons incidents. On dispose la lunette de façon à viser la fente à son minimum de déviation de ce côté, l'angle dont il a fallu la faire tourner pour passer de la première position à la seconde est évidemment le double de la déviation minima cherchée.

Si l'on vient maintenant à éclairer la fente avec une source émettant plusieurs lumières simples, comme celle qu'on obtient en mettant un sel métallique dans la flamme d'un brûleur de Bunsen, il se forme dans le plan focal de la lunette qui reçoit le faisceau dévié et dispersé par le prisme une image nette de la fente dans chacune des couleurs, c'est-à-dire un spectre de la source; en pointant chacune de ces raies brillantes au minimum de déviation, on pourra déterminer l'indice de la substance qui forme le prisme pour chacune de ces couleurs.

Enfin, si l'on éclaire la fente avec la lumière solaire, il se forme dans le plan focal de l'objectif de la lunette un spectre net dans lequel on distingue les principales raies obscures qui caractérisent ce spectre; ce sont les images de la fente dans les couleurs d'intensité plus faible. En pointant ces raies à leur minimum de déviation, on obtient de même les indices de la substance pour ces diverses couleurs.

La méthode précédente, aussi bien que celle de Descartes, est applicable aux liquides. On enferme ceux-ci dans des flacons prismatiques ayant deux côtes formés par des lames de verre à faces bien parallèles [1]. Dans ces conditions, la déviation est exactement la même que si le prisme de liquide existait seul, les lames de verre n'existant pas. On peut se rendre compte

(1) On s'assure que les faces sont bien parallèles, en plaçant le flacon plein d'air sur la plate-forme du goniomètre de Babinet, après avoir auparavant visé avec la lunette la fente du collimateur : l'interposition des deux lames de verre du flacon ne doit pas déplacer l'image de la fente quelle que soit la position donnée au flacon.

facilement qu'il doit en être ainsi, en remarquant que, si une lame d'air infiniment mince à faces parallèles existait entre la face interne des lames de verre et la surface du liquide, la présence de ces lames d'air ne modifierait en rien la marche des rayons lumineux, et, dans ce cas, bien évidemment, la déviation serait due uniquement au prisme liquide.

3. **Vérification des formules du prisme.** — Le goniomètre de Babinet permet de vérifier l'exactitude des formules du prisme établies plus haut (Chap. III § 7) et, par là, de vérifier avec précision les lois de la réfraction.

On commence par déterminer l'angle du prisme A et l'indice de réfraction n pour une couleur déterminée, la lumière jaune du sodium par exemple. Ceci fait, on donne au prisme une orientation quelconque, mais comprise parmi celles qui donnent un faisceau émergent. On mesure alors la déviation D donnée par le prisme, 1° — en visant la fente par réfraction (position 1, fig. 154), 2° — en la visant directement, grâce aux rayons qui ne rencontrent pas le prisme (position 2). On déplace ensuite la lunette de façon à viser l'image de la fente donnée par réflexion sur la face d'entrée des rayons (position 3). Il est clair que l'angle S'AR dont a tourné la lunette pour passer de la position 2 à la position 3, est le supplément de l'angle SAR que forme un rayon incident SA avec le rayon réfléchi AR; la moitié SAN de ce dernier angle étant l'angle d'incidence i, on en connaît ainsi la valeur.



Fig. 154.

Connaissant i, A et n, les formules du § 7 permettent de calculer successivement r, r', i' et D. On constate alors que la valeur calculée ainsi pour D est égale, aux erreurs d'expérience près,

qui peuvent être très faibles, à la valeur trouvée par la mesure directe, quelle que soit la position du prisme. C'est la meilleure vérification qu'on puisse faire de la parfaite exactitude des lois de la réfraction.

4. INDICE DE RÉFRACTION DES GAZ. —L'indice de réfraction d'un gaz se mesure aussi par la méthode du prisme. On remplit du gaz étudié un tube dont les extrémités, coupées obliquement, sont fermées par des lames de verre à faces aussi parallèles que possible. Comme l'indice de réfraction d'un gaz est très voisin de l'unité, il faut donner à ce prisme un angle très grand (130° à 160°), afin que la déviation soit assez notable pour être mesurée.

L'indice de réfraction varie avec la force élastique du gaz; aussi doit-on mettre l'intérieur du prisme en communication avec un appareil manométrique.

Les dimensions encombrantes du prisme à gaz empêchent de le placer sur la plate-forme du goniomètre; c'est pourquoi on a dû employer une disposition différente de celle adoptée pour la mesure des indices des corps solides et liquides.

L'étude de l'indice de réfraction de l'air aux diverses températures et aux diverses pressions intéresse particulièrement les astronomes, à cause de la réfraction astronomique. Nous allons indiquer les travaux les plus importants qui ont été faits sur ce sujet.

Les premiers auteurs qui ont mesuré l'indice de réfraction de l'air sont les physiciens anglais Lewthorp et Hauksbée, vers le commencement du XVIIIe siècle. Ces mesures ont été reprises en 1805 par Biot [1] et Arago et étendues à un grand nombre de gaz.

5. EXPÉRIENCES DE BIOT ET ARAGO. — Biot et Arago se sont servis dans leurs expériences d'un prisme à gaz que Borda avait fait construire dans le but de reprendre la mesure de l'indice de l'air, mais dont il ne s'était pas servi. La figure 155 repré-

(1) Jean-Baptiste Biot est né à Paris en 1774.

sente cet instrument ; on voit que le prisme communique avec une éprouvette renfermant un baromètre analogue à celui des machines pneumatiques. A l'aide d'un robinet R, on pouvait faire le vide et introduire le gaz étudié. Ce prisme était installé sur une plate-forme qui permettait de le faire tourner de 180° autour d'un axe parallèle à son arête.

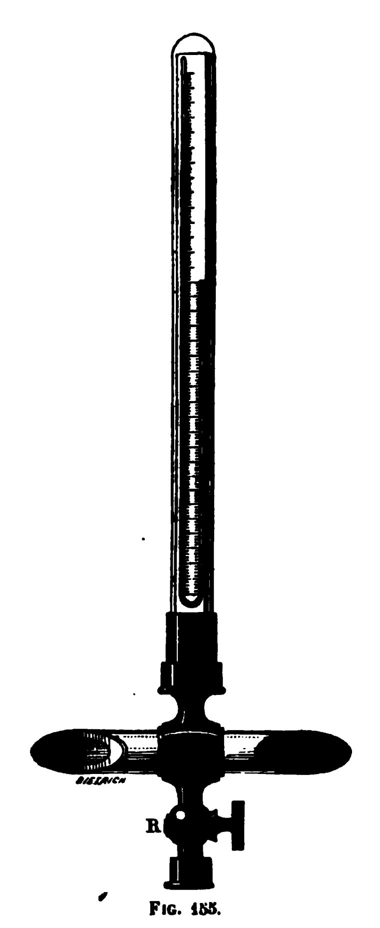


Fig. 155.

Les expériences étaient faites de la manière suivante : avec la lunette d'un cercle répétiteur, placé en O (fig. 156), on visait à travers le prisme RRSS une mire éloignée (l'un des paratonnerres de l'Observatoire de Paris, distant de 1308 mètres de l'appareil placé dans une salle du palais du Luxembourg). Les rayons qui traversaient l'intérieur du prisme étant dirigés suivant l'axe du tube, étaient à peu près perpendiculaires au plan bissecteur du dièdre formé par les faces du prisme, et la déviation ne différait pas sensiblement de la déviation minima, si l'indice du gaz contenu dans le prisme était supérieur à celui de l'air ambiant, de la déviation maxima dans le cas contraire (voir Chap. III, § 8). On faisait tourner ensuite le prisme de 180°, de façon à produire la même déviation de l'autre côté; on visait de nouveau la mire, et l'angle α dont il fallait déplacer la lunette mesurait le double de la déviation minima ou maxima. Du reste, on employait le procédé de répétition, en faisant tourner plusieurs fois le prisme autour de son axe,

pour avoir cet angle très petit α avec une plus grande précision.

Les glaces qui fermaient les deux extrémités du tube-prisme ne pouvant avoir leurs faces rigoureusement parallèles, il fallait tenir compte de la déviation causée par ces faces. Pour cela, on remplissait le prisme de l'air ambiant et l'on mesurait, par le procédé que nous venons d'indiquer, le double de la déviation, qui était due, dans ce cas, uniquement aux lames de verre. Cette quantité devait être retranchée des déviations obtenues dans les autres expériences, pour avoir la déviation D due au prisme de gaz.



Fig. 156.

En considérant la quantité D comme positive, si le rayon était dévié vers la base du prisme (déviation minima), et comme négative, si le rayon était dévié vers l'arête du prisme (déviation maxima), en appelant A l'angle du prisme, la formule ordinaire

$$(1) \qquad n = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

donnait l'indice de réfraction n du gaz contenu dans le prisme par rapport à l'air ambiant.

Pour mesurer l'angle du prisme, on employa le procédé suivant.

Un théodolite, dont la lunette était mobile dans un plan horizontal, perpendiculaire, par conséquent, à l'arête verticale du prisme, était placé successivement en A, B et C (fig. 157). On mesurait :

1° — l'angle IAM, fait par les rayons MA arrivant directement d'une mire M très éloignée avec les rayons IA issus de cette mire et réfléchis sur la face RR du prisme ; 2° — l'angle JBN fait par les rayons NB arrivant directement d'une autre mire très éloignée N avec les rayons issus de cette mire et réfléchis sur l'autre face SS du prisme; 3° — l'angle M″CN″ (plus grand que 180° sur la figure 157), formé par les rayons arrivant des deux mires M et N.

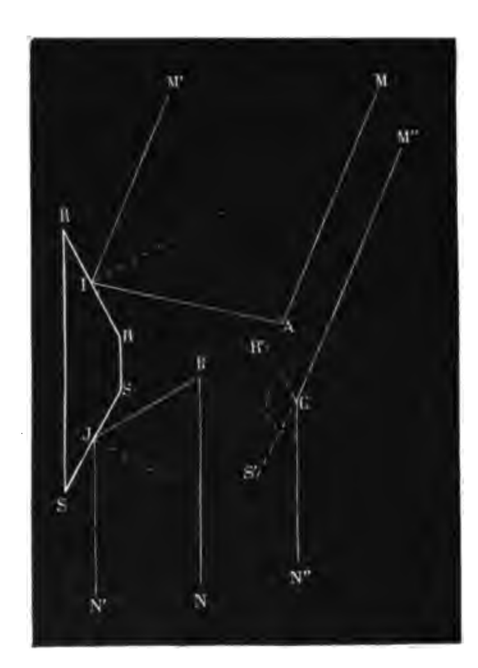


Fig. 157.

Ces données suffisent pour trouver l'angle des faces du prisme. Menons, en effet, par C des droites horizontales CR′ et CS′, respectivement parallèles aux faces RR et SS : l'angle R′CS′ est égal à l'angle A du prisme.

Or, on a :

$$(2) \qquad R'CS' = M''CN'' - (M''CR' + N''CS')$$

D'autre part, on a .

$$(3) \quad M''CR' = M'IR = 90° - \frac{M'IA}{2} = 90° - \frac{180° - MAI}{2} = \frac{MAI}{2}$$

et, de même :

$$(4) \qquad N''CS' = \frac{NBJ}{2}$$

D'où :

$$(5) \qquad R'CS' = M''CN'' - \frac{MAI + NBJ}{2}$$

Biot et Arago ont trouvé ainsi pour l'angle de leur prisme 143° 7′ 28″.

On commençait les expériences par faire le vide aussi complètement que possible à l'intérieur du prisme. La mesure de la quantité négative D faisait connaître l'indice de réfraction absolu de l'air ambiant M, inverse de la quantité n donnée par la formule (1). En mettant ensuite dans le prisme de l'air ou un autre gaz de force élastique déterminée, la mesure de n faisait connaître l'indice absolu N du gaz par la formule :

$$n = \frac{N}{M}$$

en négligeant les variations de propriétés de l'air extérieur pendant la durée des expériences.

Biot et Arago ont ainsi reconnu que la quantité $N^2 - 1$, (qu'on appelle la *puissance réfractive*), est proportionnelle à la densité absolue d (masse de l'unité de volume) pour un même gaz, de façon que le rapport $\frac{N^2 - 1}{d}$ est une constante pour le gaz : cette constante s'appelle le *pouvoir réfringent*.

Nous ferons remarquer qu'on peut mettre sous une forme plus simple la loi précédente : l'indice de réfraction absolu d'un gaz N étant très peu supérieur à l'unité, posons $N - 1 = \varepsilon$; le pouvoir réfringent peut s'écrire alors :

$$\frac{N^2 - 1}{d} = \frac{(1 + \varepsilon)^2 - 1}{d} = \frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{d}$$

Or, pour tous les gaz qui ne sont pas voisins de leur point de liquéfaction, c'est à dire pour ceux à qui la loi précédente est applicable, la quantité ε^2 est bien au-dessous de celle qu'on peut

apprécier par l'expérience ; ainsi pour l'air sous la pression de 76 cent. de mercure et à 0° cette quantité est égale à 0,000 000 086. On peut donc la supprimer et poser :

$$\frac{N^2 - 1}{d} = 2\frac{\varepsilon}{d} = 2\frac{N - 1}{d}$$

Par conséquent, si le pouvoir réfringent est constant, il en est de même de la quantité plus simple $\frac{N - 1}{d}$ (*énergie réfractive*), qui en est la moitié.

Du reste, en désignant par H la hauteur de mercure qui fait équilibre à la force élastique du gaz, par t la température de celui-ci, par δ sa densité par rapport à l'air, on a :

$$d = 0{,}001293 \frac{\delta H}{76\,(1 + \alpha t)}$$

par conséquent, pour un même gaz, d'après les expériences de Biot et Arago, on doit avoir :

$$(6) \qquad \frac{(N - 1)(1 + \alpha t)}{H} = \text{constante.}$$

Les expériences de ces deux savants n'ont été faites que pour des forces élastiques égales ou inférieures à celle de l'atmosphère, et pour des températures comprises entre — 1°,5 et + 25°. C'est donc seulement entre ces limites que nous pouvons admettre l'exactitude de cette loi, que nous devions signaler tout de suite pour faire comprendre la méthode de Dulong, mais sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Faisons remarquer que la formule (6) permet de calculer, d'après l'indice de réfraction N observé dans des conditions de température t et de force élastique H connues, la valeur qu'aurait cet indice à 0° et sous la pression de 76 cent. de mercure.

6. EXPÉRIENCES DE DULONG. (1) — La loi

$$\frac{(N-1)(1+\alpha t)}{H} = \text{constante}$$

suffisamment exacte à température à peu près constante pour des forces élastiques au plus égales à celle de l'atmosphère, a permis à Dulong d'employer une méthode très simple pour déduire du pouvoir réfringent de l'air, connu par les expériences de Biot et Arago, celui des autres gaz.

Sa méthode consistait à viser avec une lunette à réticule X (fig. 158) une mire éloignée, à travers un prisme AB plein d'air sous la pression atmosphérique ; puis à substituer à l'air un gaz plus réfringent, et à diminuer la force élastique de ce gaz jusqu'à obtenir la même déviation que dans le cas précédent, ce dont on jugeait quand l'image de la mire était revenue sur la croisée des fils du réticule laissé fixe. L'indice du gaz était alors le même évidemment que celui de l'air, et sa force élastique connue permettait de trouver, d'après la loi indiquée plus haut, quel était l'indice du gaz sous la pression atmosphérique.

S'il s'agissait d'un gaz moins réfringent que l'air, comme l'hydrogène, on procédait d'une façon inverse ; c'était l'air dont on diminuait la force élastique jusqu'à ce que son indice fût le même que celui du gaz sous la pression atmosphérique.

On voit que cette méthode est à l'abri de la cause d'erreur due au défaut de parallélisme des faces des lames qui ferment le prisme.

Les gaz étudiés étaient préparés et purifiés avec beaucoup de soin par Dulong lui-même.

Après avoir bien desséché le prisme et achevé la dessication par un courant d'hydrogène sec, on faisait le vide et on introduisait l'air ou le gaz étudié, contenu dans la cloche R (2) ; puis on

(1) Dulong. *Annales de Physique et Chimie* 2e série, T. XXXI, p. 154 (1826).

(2) Dans le cas d'une vapeur on plaçait le liquide qui devait la fournir dans un petit tube PO, pourvu de deux robinets P et O ; en ouvrant con-

refaisait le vide de nouveau sur le gaz. On laissait alors rentrer lentement celui-ci jusqu'à ce que l'image de la mire vînt se former sur le réticule de la lunette. Si l'on avait dépassé le

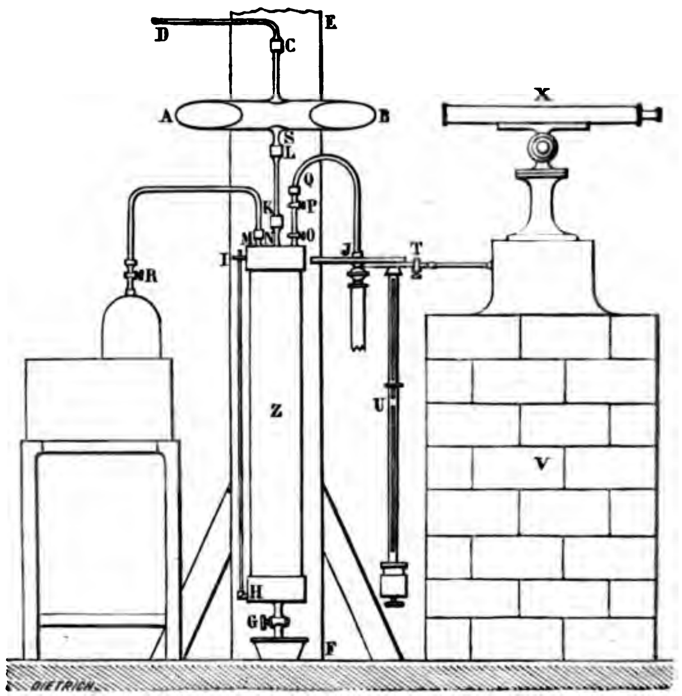


FIG. 158.

point voulu, on faisait écouler un peu de mercure du manomètre Z par le robinet G de façon à diminuer la force élastique au degré convenable. On procédait ensuite à la lecture de cette force élastique ; elle était donnée par le baromètre U de la machine pneumatique qui servait à faire le vide (1).

venablement le robinet inférieur, le vide étant fait dans l'appareil, on introduisait la quantité de vapeur que l'on désirait.

(1) Pour le chlore, qui aurait attaqué le mercure, le prisme fut séparé du

7. INDICE DE RÉFRACTION DES VAPEURS. — RECHERCHES DE M. LE ROUX. — M. Le Roux [1] a mesuré l'indice de réfraction de la vapeur de plusieurs substances, solides ou liquides à la température ordinaire. En principe, la méthode employée est la même que celle de Biot et Arago.

Le prisme était formé par un tube en fer forgé, fermé à ses extrémités, coupées obliquement, par des glaces planes choisies avec soin; l'arête du prisme était disposée verticalement. Il était contenu dans une boîte en fer forgé B (fig. 159), pouvant être fermée à l'aide d'un couvercle pressé par des vis. Le prisme était surmonté d'un tube dépassant la boîte, s'ouvrant en O dans l'atmosphère et livrant passage à l'excès de vapeur : un léger disque de métal posé sur l'ouverture formait soupape et permettait à la vapeur d'être en équilibre de force élastique avec l'air extérieur, sans qu'il y ait mélange.

La boîte de fer contenant le prisme était placée à l'intérieur d'un bain de plomb fondu P; celui-ci était chauffé par un foyer F en tôle, garni de briques, et entourant le bain de plomb.

Vis-à-vis des faces du prisme, la boîte de fer était percée de deux ouvertures opposées, d'où partaient deux tubes de fer T et T', qui sortaient du fourneau, et qui étaient fermés par des glaces planes perpendiculaires à leur axe; ces tubes servaient à l'entrée et à la sortie de la lumière.

Ainsi, le prisme et l'air qui baignait ses faces étant contenu dans le même bain, on obtenait l'indice de la vapeur par rapport à de l'air à la même température.

Un courant d'eau froide, passant dans les manchons M et M', maintenait à la température ambiante l'extrémité des tubes. A cause du faible diamètre de ces tubes, les tranches d'air per-

manomètre, puis rempli par un courant de chlore sous la pression atmosphérique. Après avoir visé la mire dans ces conditions, le prisme fut vidé, remis en communication avec le manomètre, puis rempli de cyanogène dont on diminua la force élastique jusqu'à ce que son indice devint égal à celui du chlore. Le pouvoir réfringent du cyanogène étant connu, on en déduisit celui du chlore.

(1) Le Roux. *Ann. de Phys. et Chim.* 3ᵉ série, T. LXI, p. 385 (1861).

pendiculaires à leur axe, avaient la même température dans toute leur étendue, et cette température diminuait à mesure que les tranches étaient plus éloignées de la boîte, jusqu'à devenir la température ambiante. De cette façon aucune déviation ne pouvait être produite par les variations d'indice de cet air à différentes températures.

Tout cet appareil pouvait tourner autour d'un axe en fer V, qui était vertical et parallèle, par conséquent, à l'arête, du prisme. Les déplacements angulaires étaient donnés par une alidade pourvue d'un vernier et par un cercle gradué horizontal H.

Au lieu d'employer une mire éloignée M. Le Roux s'est servi d'un collimateur C qui équivaut à une fente placée à l'infini. L'objectif de ce collimateur avait un mètre de distance focale.

Le cercle répétiteur employé par Biot et Arago fut remplacé ici par une lunette astronomique fixe LL', dont l'objectif avait deux mètres de distance focale environ. Un réticule composé de deux fils en croix, d'une direction oblique à la fente, pouvait se déplacer horizontalement à l'aide d'une vis micrométrique K, ainsi que l'oculaire qui servait à le regarder.

Après avoir pointé l'image de la fente, on tournait de 180° l'appareil qui contenait le prisme de façon à dévier les rayons de l'autre côté; on déplaçait alors le réticule avec la vis pour pointer de nouveau l'image de la fente. En divisant le déplacement connu du réticule par la distance de celui-ci au point nodal postérieur de l'objectif (distance focale), on avait l'angle formé par les rayons émergents du prisme dans les deux positions successives, c'est-à-dire le double de la déviation.

Nous verrons plus loin (§ 10) les résultats fort intéressants trouvés par M. Le Roux.

8. MÉTHODE DU DUC DE CHAULNES. — Outre la méthode du prisme, et les méthodes fondées sur les phénomènes d'interférence, dont nous ne pouvons parler ici, il existe, pour déterminer les indices de réfraction, quelques autres méthodes moins précises, mais qui présentent pourtant une certaine utilité, à cause de la petite quantité de matière qu'elles nécessitent pour faire une détermination. Nous allons décrire ici deux de ces

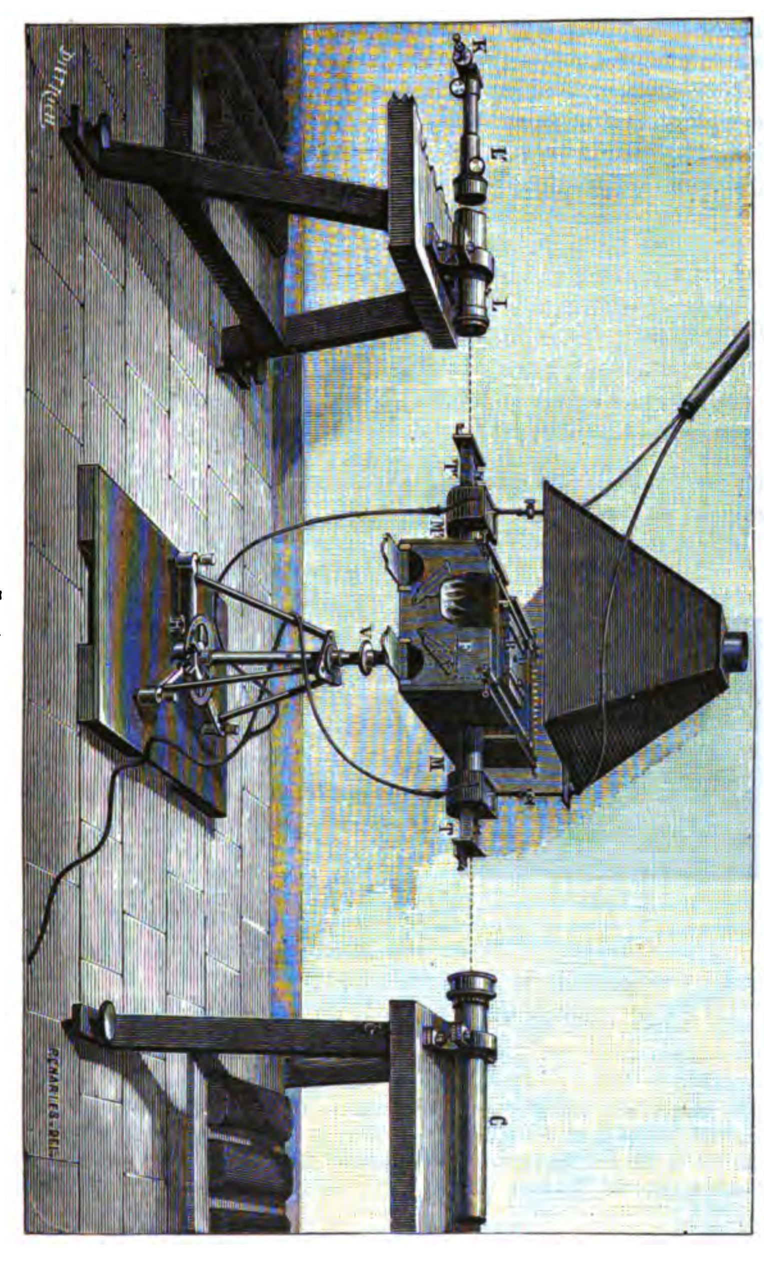


Fig. 159.

méthodes, celle du duc de Chaulnes (1) et celle qui est fondée sur le phénomène de la réflexion totale.

Une surface plane séparant deux milieux d'indices absolus n_1 et n_2 fournit d'un point situé à une distance p_1 de la surface une image virtuelle située à une distance p_2 donnée par la relation : (relation (7) § 10, Chap. III, dans laquelle on fait $R = \infty$),

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = 0$$

d'où :

$$n = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{1}$$

en désignant par n l'indice de réfraction du premier milieu par rapport au second.

Par conséquent, si l'on vient à recouvrir un point A, tracé sur une feuille de papier par exemple, avec une lame d'un corps transparent à faces planes et parallèles, et que l'on regarde normalement à la surface de la lame (fig. 160), celle-ci en donnera pour l'œil une image A′ plus rapprochée que le point de la quantité $AA' = p_1 - p_2$; si l'on mesure ce rapprochement $p_1 - p_2$ et l'épaisseur AI de la lame qui représente la quantité p_1, on en déduira par soustraction la quantité p_2, et la formule (1) fera connaitre l'indice n de la lame par rapport à l'air.



Fig. 160.

Tel est le principe de la méthode du duc de Chaulnes.

(1) Michel-Ferdinand d'Albert d'Ailly, duc de Chaulnes, général et savant français, est né le 31 décembre 1714 et mort le 23 septembre 1769. Son travail sur la mesure des indices a paru en 1767 dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences* (p. 431).

Pour faire ces mesures avec précision, on se sert d'un microscope puissant, muni d'une vis micrométrique qui permet d'écarter plus ou moins du porte-objet le tube du microscope, et de mesurer ses petits déplacements. Nous avons vu que la distance à laquelle il faut placer l'objectif d'un objet, pour le voir nettement, est sensiblement indépendante de la distance pour laquelle s'accommode l'œil de l'observateur.

D'après cela, on met au point avec soin un objet délié, par exemple, des écailles d'ailes de papillon placées sur une lame de verre; après avoir fait la lecture sur la tête de la vis micrométrique, on recouvre l'objet, avec la lame dont on veut déterminer l'indice; on soulève, au moyen de la vis, le tube jusqu'à ce que la mise au point soit de nouveau parfaite, et l'on fait la lecture : la différence des deux lectures donne la quantité $p_1 - p_2$. Pour avoir l'épaisseur p_1 de la lame, on agit sur la vis pour soulever davantage le tube, jusqu'à ce qu'on pointe les petites poussières qui recouvrent la face supérieure de la lame. La différence entre la lecture qu'on fait alors et la première lecture donne évidemment l'épaisseur de la lame (1).

9. MÉTHODE FONDÉE SUR LA RÉFLEXION TOTALE. — Supposons d'abord qu'il s'agisse de déterminer l'indice de réfraction d'un liquide moins réfringent que le verre.

On place un prisme de verre sur une règle plate, que nous supposerons horizontale, creusée d'une cavité L (fig. 161) contenant le liquide, de façon que celui-ci mouille la face inférieure AB du

(1) Les microscopes sont pourvus, le plus souvent, d'une vis de rappel, comme nous l'avons vu (Chap. VII § 14), qui permet d'écarter le tube du microscope de l'objet. La tête de cette vis, il est vrai, ne porte pas en général de graduation ; mais, pour l'exactitude que comporte cette méthode, une graduation assez grossière suffit, et l'on peut se contenter d'appliquer sur la tête de la vis un disque de carton divisé en 10mes de circonférence, par exemple ; une aiguille fixée au corps du microscope avec un peu de cire molle servira d'index. En pointant les poussières d'une lame de verre avant et après avoir élevé celle-ci d'une quantité connue, en la posant sur une plaque de verre dont on aura mesuré l'épaisseur au sphéromètre, on déterminera la valeur du pas de la vis. On peut même, par cette méthode, s'assurer de sa régularité, qui, en général, est plus que suffisante.

prisme. Soit SILJ la marche d'un rayon qui tombe, suivant une section principale du prisme, sur la surface de séparation AB du verre et du liquide moins réfringent juste sous l'angle limite l; la mesure de l'angle θ que fait le rayon émergent JO

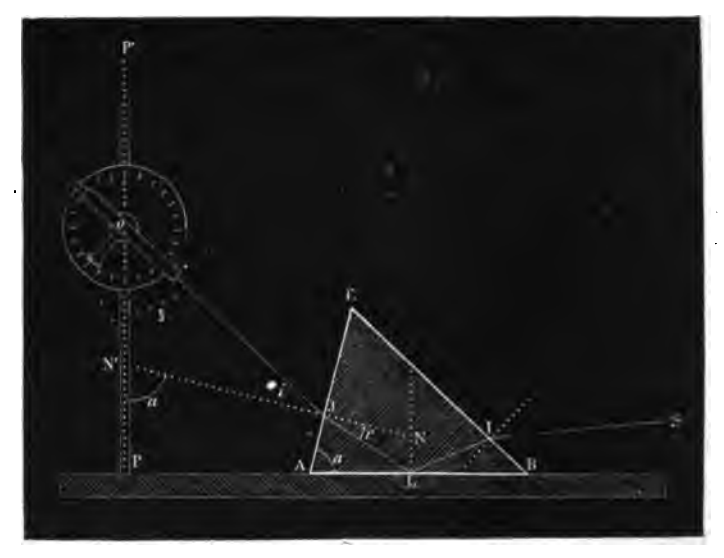


Fig. 161.

avec la verticale OP, jointe à la connaissance de la valeur a de l'angle A du prisme et de l'indice n par rapport à l'air du verre dont il est formé, fait connaître l'angle limite l. Menons, en effet, les normales LN et NJN' aux faces AB et AC, par les points L et J; désignons par r et i les angles de LJ et de JO avec la normale NJN'; on a les relations évidentes d'après la figure :

$$(1) \qquad \begin{aligned} l + r &= a \quad \text{d'où:} \quad r = a - l \\ \theta + i &= a \quad \text{d'où:} \quad i = a - \theta \end{aligned}$$

Et, comme on a $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, il vient :

$$(2) \qquad \frac{\sin (a - \theta)}{\sin (a - l)} = n$$

relation qui donne la valeur de l.

D'ailleurs, en appelant x l'indice du liquide par rapport à l'air, on a :

$$(3) \qquad \sin l = \frac{x}{n}$$

ce qui fait connaître la valeur de x.

La mesure de l'indice n et de l'angle a se fait, une fois pour toutes, par la méthode du goniomètre de Babinet (§ 2). Quant à l'angle θ, sa mesure s'obtient au moyen d'une lunette dont l'axe est mobile dans un plan vertical ; les déplacements angulaires sont mesurés par une alidade et un cercle gradué. Ce cercle et la lunette qu'il porte peuvent être fixés plus ou moins haut sur une tige verticale P'P. Après avoir tourné vers le jour la face CB du prisme, on regarde la face AC avec la lunette, en plaçant d'abord celle-ci très haut sur la tige P'P ; on voit alors le liquide à travers le prisme comme une tache sombre : il n'y a pas réflexion totale pour les rayons qui entrent dans la lunette. Mais, en abaissant celle-ci sans cesser de viser le liquide à travers le prisme, tout à coup ce liquide paraît très brillant : à ce moment, la réflexion totale se produit. En notant l'angle que forme dans cette position l'axe de la lunette avec la verticale, on a l'angle θ.

Cette méthode est applicable aussi aux corps solides moins réfringents que le verre. On place une lamelle du corps solide sous la face AB du prisme et l'on chasse l'air compris entre les deux par un liquide plus réfringent que le verre et que la substance solide étudiée. La réflexion totale ne peut pas se produire alors sur ce liquide, mais elle peut se produire sur la substance étudiée moins réfringente. Du reste, la couche de liquide interposée, d'épaisseur extrêmement faible, ne modifie pas la marche

des rayons d'une quantité appréciable : les formules indiquées ci-dessus sont applicables.

10. Résultats. — Voici quelques tableaux donnant les indices de réfraction des substances transparentes les plus communes.

Corps solides monoréfringents (1).

SUBSTANCES	INDICE MOYEN	EXPÉRIMENTATEURS
Spath-fluor	1,435	Des Cloizeaux.
Silice amorphe (quartz fondu) . . .	1,45	De Sénarmont.
Chlorure de sodium (Sel gemme) .	1,543	Grailich.
Chlorhydrate d'ammoniaque	1,642	Grailich,
Acide arsénieux	1,745	Des Cloizeaux.
Chlorure d'argent naturel	2,071	id.
Diamant incolore	2,42	»

Verres (flints divers) (d'après M. Baille).

NOM DU VERRE	Densité	TEMPÉRATURE	INDICE POUR SEPT RAIES DU SPECTRE						
			B	C	D	*b*	F	G	H
Feil lourd n° 2. .	5,00	22°5	1,7801	1,7831	1,7920	1,8062	1,8149	1,8368	1,8567
Rossette lourd n° 3	4,08	12, 4	1,6771	1,6795	1,6858	1,6959	1,7019	1,7171	1,7306
Feil F (1249). . .	3,68	24, 0	1,6237	1,6255	1,6304	1,6384	1,6429	1,6549	1,6647
Robichon	3,63	13, 7	1,6131	1,6149	1,6198	1,6275	1,6321	1,6435	1,6534
Feil B (1227). . .	3,54	23, 2	1,6045	1,6062	1,6109	1,6183	1,6225	1,6335	1,6428
Rossette n° 1 . .	3,44	19, 5	1,5966	1,5982	1,6027	1,6098	1,6141	1,6246	1,6338
Feil (1226)	3,24	22, 0	1,5766	1,5783	1,5822	1,5887	1,5924	1,6018	1,6098
Rossette (n° 2). .	3,22	18, 4	1,5659	1,5675	1,5715	1,5776	1,5813	1,5902	1,5979
Feil très léger (1232)	2,98	23, 2	1,5609	1,5624	1,5660	1,5715	1,5748	1,5828	1,5898

(1) Dans ce tableau (tiré de l'annuaire du Bureau des Longitudes pour 1883) ne figurent que des substances amorphes ou cristallisées dans le système cubique ; en effet, les corps cristallisés dans un autre système que celui du cube jouissent de la propriété de donner naissance à deux rayons réfractés, en général ; ils sont dits *biréfringents*. Pour l'un des deux rayons réfractés, au moins, l'indice dépend de la direction du rayon.

Verres (crowns divers) (d'après M. Baille).

NOM DU VERRE	Densité	TEMPÉRATURE	INDICE POUR SEPT RAIES DU SPECTRE						
			B	C	D	*b*	F	G	H
Feil lourd (1185).	3,00	21°,9	1,5554	1,5568	1,5604	1,5658	1,5690	1,5769	1,5836
Feil (1209). . . .	2,80	21,2	1,5157	1,5166	1,5192	1,5234	1,5256	1,5313	1,5360
Rossette n° 1 . .	2,55	18,4	1,5226	1,5237	1,5265	1,5307	1,5332	1,5392	1,5442
St-Gobain (glace brute)	2,50	17,8	1,5244	1,5254	1,5280	1,5320	1,5343	1,5397	1,5443
Feil léger (1228).	2,49	23,5	1,5126	1,5134	1,5160	1,5198	1,5222	1,5278	1,5323

On peut remarquer que, le plus souvent, à mesure que la densité du verre augmente, l'indice de réfraction augmente aussi.

Corps liquides.

SUBSTANCES	TEMPÉRATURE	INDICE POUR LA RAIE D	EXPÉRIMENTATEURS
Alcool méthylique	25°	1,3278	Dale et Gladstone.
Ether sulfurique.	16°	1,3569	Fouqué.
Alcool éthylique.	16°	1,3634	(*Moyenne*).
Acide acétique. .	35°	1,3680	Dale et Gladstone.
Chloroforme . . .	30°	1,4397	Id.
Térébenthène . .	20°	1,4689	Dufet.
Benzine	10°	1,5032	Fouqué.
Aniline	35°	1,5712	Dale et Gladstone.

Afin de montrer l'influence de la température sur la variation de l'indice, voici les résultats obtenus pour l'eau par M. Dufet (1).

Indice de l'eau pour la raie D.

Température.	10°	20°	30°	40°	50°
Indices . . .	1,3336	1,3329	1,3319	1,3305	1,3290

Pour donner un exemple de la dispersion, nous reproduisons

(1) Dufet. *Journal de Physique* 2e série T. IV, p. 484 (1885).

ci-dessous un tableau des indices de sulfure de carbone pour neuf raies du spectre, tiré d'un travail de M. Dufet [1].

Indice du sulfure de carbone à 22°

A	B	C	D	E	F	H_γ	h	H_1
1,6071	1,6132	1,6165	1,6259	1,6381	1,6506	1,6730	1,6878	1,6981

Voici enfin un tableau, tiré de l'optique de Brewster [2], qui donne le pouvoir dispersif et la différence des indices des rayons extrêmes pour quelques substances.

	POUVOIR DISPERSIF	DIFFÉRENCE DES INDICES DES RAYONS EXTRÊMES
Soufre (après fusion)	0,130	0,149
Phosphore	0,128	0,156
Sulfure de carbone	0,115	0,077
Flint-glass n° 1	0,052	0,026
— n° 2	0,040	0,029
Diamant	0,038	0,056
Beryl	0,037	0,022
Crown-glass n° 1 (vert) . .	0,036	0,020
Eau	0,035	0,012
Crown-glass n° 2	0,033	0,018
Spath fluor	0,022	0,010
Cryolithe	0,022	0,007

Les expériences de Biot et Arago ont donné pour l'indice de réfraction absolu de l'air à 0° et sous la pression de 76 cent. de mercure le nombre 1,000294. En adoptant ce nombre, les expériences comparatives de Dulong ont fourni les nombres inscrits dans la première colonne du tableau suivant ; les nombres de la seconde colonne sont dus à M. Mascart, qui les a obtenus par une méthode fondée sur les phénomènes d'interférence.

(1) *Loc. cit.* p. 487.
(2) *Optics by* David Breswter (London 1838), p. 372.

Indice de refraction absolu des gaz à 0° et sous la pression de 76 cent. de mercure

	D'APRÈS DULONG (1).	D'APRÈS M. MASCART (2).
Air	1,000 294 (Biot et Arago)	1,000 292 3
Oxygène	1,000 272	»
Hydrogène	1,000 138	1,000 138 8
Azote	1,000 300	1,000 297 2
Ammoniaque	1,000 385	»
Acide carbonique	1,000 449	1,000 449 4
Chlore	1,000 772	»
Acide chlorhydrique	1,000 449	»
Protoxyde d'azote	1,000 503	1,000 508 4
Bioxyde d'azote	1,000 303	1,000 296 7
Oxyde de carbone	1,000 340	1,000 333 6
Cyanogène	1,000 834	1,000 820 2
Ethylène	1,000 678	»
Formène	1,000 443	»
Ether chlorhydrique	1,001 095	»
Acide cyanhydrique	1,000 451	»
Acide chloroxycarbonique	1,001 159	»
Acide sulfureux	1,000 665	1,000 682 0
Acide sulfhydrique	1,000 644	»
Ether éthylique	1,001 53	»
Sulfure de carbone	1,001 50	»
Hydrogène phosphoré	1,000 789	»

Dans le cas des vapeurs, Dulong a fait l'expérience pour une force élastique qui n'était que la moitié ou le tiers de la force élastique maxima. Il est clair que pour les corps qui ne peuvent exister à l'état de gaz à 0° et sous la pression de 76 cent. de mercure, les nombres inscrits dans le tableau précédent n'ont d'autre signification que celle d'une constante n qui peut fournir l'indice N de la vapeur à une température t et sous la pression de H cent. de mercure par la relation :

$$\frac{(N - 1)(1 + \alpha t)}{H} = \frac{n - 1}{76}$$

(1) *Loc. cit.*

(2) MASCART, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* T. LXXVIII, p. 617 (1874).

La même remarque s'applique aux nombres du tableau suivant.

Indices des vapeurs d'après M. Le Roux.

	INDICES ABSOLUS n
Soufre	1,000 629
Phosphore . .	1,001 364
Arsenic. . . .	1,001 114
Mercure . . .	1,000 556

M. Le Roux fait remarquer que les pouvoirs réfringents du soufre et de l'oxygène sont les mêmes, ainsi que les pouvoirs réfringents de l'azote et du phosphore. On a, en effet, les nombres suivants

Oxygène . . .	0,4924
Soufre	0,4923
Azote	0,6187
Phosphore , .	0,6264

pour le pouvoir réfringent de ces corps (à un facteur constant près). C'est une ressemblance de plus entre l'oxygène et le soufre d'une part, et l'azote et le phosphore de l'autre. Nous ferons remarquer pourtant que le pouvoir réfringent de l'arsenic (0,211) n'est pas le même que celui du phosphore (0,6264) ou de l'azote, quoique ces corps soient rangés par les chimistes dans la même famille.

M. Le Roux a constaté que la vapeur de soufre et surtout celle du phosphore ont une très grande dispersion. Il a découvert en outre, un autre fait fort curieux : la vapeur d'iode réfracte plus fortement les rayons rouges que les rayons violets. Le phénomène de la dispersion *anomale* a été constaté depuis sur plusieurs substances solides ou liquides fortement colorées, la fuschine par exemple.

11. LOI DE GLADSTONE. — Newton avait cru pouvoir déduire de la théorie de l'émission que le pouvoir réfringent $\frac{N^2 - 1}{d}$ était

constant pour une même substance, quel que fût son état physique. Les expériences de Petit et Arago [1], faites sur une même substance à divers états, ont montré qu'il n'en était pas ainsi : par exemple, pour le sulfure de carbone, le pouvoir réfringent est un peu plus grand que 3 à l'état liquide et un peu plus petit que 2 à l'état de vapeur.

Des considérations théoriques ont porté quelques auteurs à admettre la constance du rapport $\frac{N-1}{d}$, désigné sous le nom d'*énergie réfractive*. Les recherches de MM. Dale et Gladstone ont paru justifier dans certains cas la loi $\frac{N-1}{d} =$ constante, qui est connue sous le nom de *loi de Gladstone*.

Nous avons vu déjà (§ 5) que la constance du pouvoir réfringent $\frac{N^2-1}{d}$ pour les gaz entraine la constance de l'énergie réfractive $\frac{N-1}{d}$; et, qu'en admettant cette constance, on en déduit pour un même gaz

$$(1) \qquad \frac{(N-1)(1+\alpha t)}{H} = \text{constante}$$

H représentant la force élastique. Dans le cas où la force élastique H varie, la température t restant constante, cette loi est justifiée par les expériences de Biot et Arago et par celles de M. Mascart [2], faites par une méthode fondée sur les phénomènes d'interférence. Mais, dans le cas où la température t varie, M. Mascart a montré que, pour que la formule (1) soit exacte, il faut remplacer le coefficient de dilatation α du gaz par

(1) Petit et Arago *Annales de Chimie et de Physique*, 2me série T. I, p. 1 (1816).

(2) M. Mascart a reconnu qu'a température constante l'excès de réfraction N — 1 est proportionnel à la densité d à un degré d'approximation qui permet même de tenir compte de l'inexactitude de la loi de Mariotte.

un coefficient β, en général notablement plus grand [1]. La loi de Gladstone n'est donc pas même rigoureusement applicable aux gaz quand le changement de densité est dû à une variation de température : le rapport $\frac{N-1}{d}$ diminue un peu quand la température s'élève.

Les expériences de M. Jamin sur l'eau et celles de M. Quincke sur l'eau et plusieurs autres substances liquides ont fait voir que la loi de Gladstone se vérifie pour les liquides dont on fait varier la densité par compression. Mais, d'après les expériences de MM. Wullner, Landolt, Damien, Dufet, si la variation de densité est due à un changement de température, l'énergie réfractive $\frac{N-1}{d}$, au lieu de rester constante, diminue un peu, comme pour les gaz, quand la température s'élève. Pour les solides c'est l'inverse : l'énergie réfractive augmente avec la température.

Les mêmes idées théoriques qui conduisent à admettre *a priori* la loi de Gladstone, conduisent aussi à admettre qu'une simple règle de proportion doit donner l'énergie réfractive d'un mélange de plusieurs corps transparents. C'est-à-dire, qu'en appelant N_1, N_2, N_3..., les indices, d_1, d_2, d_3..., les densités et p_1, p_2, p_3..., les proportions en masses des corps constituant

(1) Voici, d'après M. Mascart (*Loc. cit.*) les valeurs de β pour quelques gaz ; nous avons mis en regard les valeurs de α trouvées par Regnault :

	β	α
Hydrogène	0,003 81	0,003 66
Air	0,003 83	0,003 67
Azote	0,003 82	0,003 67
Protoxyde d'azote . .	0,003 88	0,003 72
Bioxyde d'azote . . .	0,003 67	»
Oxyde de carbone . .	0,003 67	0,003 67
Acide carbonique . .	0,004 06	0,003 71
Acide sulfureux . . .	0,004 71	0,003 90

le mélange ($p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$), l'indice N de celui-ci doit être lié à sa densité d par la formule :

$$(1) \quad \frac{N-1}{d} = p_1 \frac{N_1 - 1}{d_1} + p_2 \frac{N_2 - 1}{d_2} + p_3 \frac{N_3 - 1}{d_3} + \ldots$$

Les expériences de Dulong montrent que cette relation s'applique à un mélange de gaz. Ainsi, dans le cas de l'air, où $p_1 \frac{d}{d_1} = 0{,}208$ pour l'oxygène, dont nous représenterons l'indice par O, et où $p_2 \frac{d}{d_2} = 0{,}792$ pour l'azote, dont nous repésenterons l'indice par A, la relation (1) devient :

$$(2) \qquad N - 1 = 0{,}208\,(O - 1) + 0{,}792\,(A - 1)$$

les indices N, O et A étant pris pour les trois gaz à la même température et pour la même force élastique. Cette relation (2) est vérifiée; car pour 0° et pour la pression de 76 cent. de mercure O = 1, 000272, A = 1,000300, ce qui donne 1,000294 pour l'indice N de l'air, nombre identique à celui que fournit l'expérience.

Pour les dissolutions de deux liquides, ou d'un solide dans un liquide, les expériences de MM. Wullner, Landolt, Damien ont montré que la relation (1) est applicable, avec un assez grand degré d'approximation, dans le cas des dissolutions étendues, avec un degré d'approximation moindre, dans le cas des dissolutions concentrées. Enfin M. Dufet a constaté que, pour un cristal formé de deux sels isomorphes, en proportions quelconques, la formule (1) est applicable.

Mais la loi représentée par la formnle (1), cesse de donner des résultats exacts, même approximativement, quand il y a combinaison entre les corps composants. C'est pour cela probablement que, dans les dissolutions concentrées, l'écart est en général assez notable : il y a lieu de supposer qu'il se forme quelque combinaison entre le corps dissous et le dissolvant, un hydrate par exemple dans le cas d'une dissolution d'un sel dans l'eau.

12. DIASPORAMÈTRE. — Nous avons vu (Chap. V, §§ 12 et 13), que pour tailler convenablement les deux prismes, ou les deux lentilles, de verres différents, qu'on doit accoler pour former un système achromatique, il faut connaître le rapport $\frac{n'_2 - n'_1}{n_2 - n_1}$ des différences des indices de réfraction du bleu et du jaune pour les deux verres. Or, nous venons de voir (§ 2) comment on peut déterminer séparément les quatre indices n_1, n_2, n'_1, n'_2 qui entrent dans cette expression, ce qui permet d'obtenir ce rapport. Mais on peut plus directement déterminer celui-ci à l'aide d'un prisme à angle variable qu'on appelle un *diasporamètre* (1).

Sans nous préoccuper, pour l'instant, de la manière dont on peut réaliser un diasporamètre, voici comment on procède. On taille un prisme d'un petit angle dans chacun des deux verres qui doivent servir à former le système achromatique. On se sert alors du diasporamètre pour achromatiser l'un de ces prismes ; c'est-à-dire, qu'ayant placé parallèlement les arêtes du prisme et du diasporamètre, on fait varier l'angle de ce dernier prisme jusqu'à ce que les rayons lumineux sortent du système sans irisation sensible. Soient alors α l'angle du diasporamètre, et ν_2 et ν_1 les indices de réfraction du bleu et du jaune pour le verre dont il est formé ; en appelant A l'angle connu du prisme qui a été achromatisé par le diasporamètre, et n_2 et n_1 les indices de réfraction du verre dont il est formé pour le bleu et le jaune, on a (relation 5, § 12, Chap. V) :

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{A} = \frac{n_2 - n_1}{\nu_2 - \nu_1}$$

On cherche de même quel est l'angle α' qu'il faut donner au diasporamètre pour achromatiser le second prisme d'angle connu A'; on a alors, en désignant par n'_2 et n'_1 les indices du bleu et du jaune pour le verre, dont il est formé :

$$(2) \qquad \frac{\alpha'}{A'} = \frac{n'_2 - n'_1}{\nu_2 - \nu_1}$$

(1) De διασπορά dispersion et de μέτρον mesure.

en divisant membre à membre les relations (1) et (2), il vient :

$$\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{A}{A'} = \frac{n'_2 - n'_1}{n_2 - n_1} \tag{3}$$

Cette relation donne la valeur du rapport $\frac{n'_2 - n'_1}{n_2 - n_1}$, puisque son premier membre est connu par les mesures.

Il existe plusieurs manières de réaliser un diasporamètre. Celui qui a été imaginé par Boscowitch est le plus simple en principe. Il consiste (fig. 162) en un bloc de verre présentant une face AB parfaitement plane et une autre creusée d'une cavité hémi-cylindrique à génératrices parallèles à la face. Un demi-cylindre formé du même verre et de même rayon que la cavité peut la remplir ; la face CD de ce demi-cylindre est aussi parfaitement plane. Quand cette face CD est disposée parallèlement à AB, un rayon qui tombe sur elle traverse l'instrument sans déviation : l'angle du diasporamètre est nul. Mais si, à partir de cette position, on fait tourner le demi-cylindre d'un angle α autour de son axe, les faces AB et CD limitent un prisme d'angle égal à α. Cet angle de rotation α est mesuré par un limbe gradué.



IG. 162.

Rochon a imaginé un autre diasporamètre d'une construction plus simple que le précédent. L'appareil consiste en deux prismes de même verre et de même angle de faible valeur β. Ces prismes sont disposés de façon que les faces CD et C'D' (fig. 163 et 164) qui se regardent soient parallèles et très voisines l'une de l'autre. Ils peuvent tourner l'un par rapport à l'autre autour d'un axe perpendiculaire à ces faces CD C'D', et un cercle gradué mesure l'angle de rotation.

Quand les arêtes des deux pr smes sont parallèles et tournées

du même côté (fig. 163), le diasporamètre forme un prisme d'angle 2β. En faisant tourner maintenant de 180° l'un des prismes,

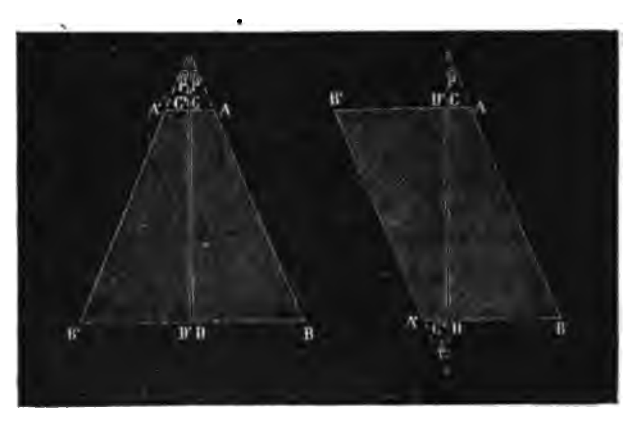


Fig. 163. Fig. 164.

les faces extrêmes AB et A'B' du diasporamètre deviennent parallèles (fig. 164), et celui-ci forme un prisme d'angle nul. Un rayon qui traverse le diasporamètre n'est pas dévié dans ce cas ; cette propriété permet de trouver la position relative des prismes pour laquelle les faces extrêmes sont parallèles. Si, à partir de cette position, on fait tourner l'un des prismes d'un angle quelconque φ, le diasporamètre forme un prisme d'un certain angle et dont la valeur, comprise entre 0 et 2β, peut être déterminée par la connaissance de l'angle φ donné par les lectures sur le cercle gradué.



Fig. 165.

Pour trouver la relation qui existe entre α et β, d'un point quelconque O, (fig. 165) abaissons les normales Oa, Oa' et OC

respectivement sur la face AB la face A'B' et les faces parallèles CD, C'D'. Le plan CO*a* est une section principale du prisme ABCD; de même le plan CO*a'* est une section principale du prisme A'B'C'D'; enfin *a*O*a'* est une section principale du prisme total que forme le diasporamètre. Par conséquent, l'angle dièdre *a*C*a'* du triangle sphérique est égal à l'angle φ. Du reste, les angles des normales aux faces mesurant les angles dièdres, on a CO*a* $= \beta$, CO*a'* $= \beta$, *a*O*a'* $= \alpha$. Or, le triangle sphérique *a*C*a'* fournit la relation :

$$\cos\alpha = \cos^2\beta + \sin^2\beta\cos\varphi \tag{4}$$

Cette relation peut être mise sous la forme :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\beta\sin\frac{\varphi}{2} \tag{4 bis}$$

ce qui permet de calculer α par logarithme.

Nous ferons remarquer que le triangle sphérique *a*C*a'* étant isocèle, la section principale *a*O*a'* du prisme formé par le diasporamètre est perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre *a*C*a'* que forment les sections principales *a*CO et *a'*CO des deux prismes ABCD el A'B'C'D'. Par conséquent, si, comme dans l'appareil primitif de Rochon, l'un des prismes ABCD est fixe et l'autre A'B'C'D' seul mobile, la section principale du prisme total tourne en même temps que A'B'C'D'; c'est un inconvénient pour l'expérience, puisqu'il faut faire tourner en même temps le prisme qu'on veut achromatiser avec le diasporamètre.

M. Jamin a remédié à cet inconvénient en rendant les deux prismes ABCD et A'B'C'D' mobiles, et en les faisant tourner de quantités égales et de sens contraires. De cette façon, le plan bissecteur des sections principales de ces deux prismes reste immobile, et il en est à peu près de même de la section principale du prisme que forme le diasporamètre, puisqu'elle lui est perpendiculaire.

Le plus simple des diasporamètres est dû à Brewster. Supposons qu'on regarde une fente étroite FF' à travers un prisme

de petit angle, dont les faces soient à peu près perpendiculaires à la droite OX qui joint l'œil à la fente. Si l'arête du prisme est parallèle à la fente, celle-ci donne un spectre virtuel dont les bords sont perpendiculaires à sa direction; désignons par l la largeur de la projection conique de ce spectre sur un plan fixe K perpendiculaire à OX, par exemple, sur le plan qui passe par la fente même.

Faisons tourner maintenant le prisme d'un angle φ autour de l'axe OX; chaque point de la fente donnant toujours un spectre de longueur l parallèle à la section principale du prisme, les bords du spectre RV, R'V' (fig. 166) sont obliques à la fente FF', et font l'angle φ avec la direction FP perpendiculaire à celle-ci. Il en résulte que la largeur du spectre, qui est comptée dans cette direction perpendiculaire, est $l \cos \varphi$. La largeur de ce spectre est ainsi la même que si l'arête du prisme était restée parallèle à la fente et que son angle, au lieu d'avoir la valeur α, eût pris la valeur $\alpha \cos \varphi$.

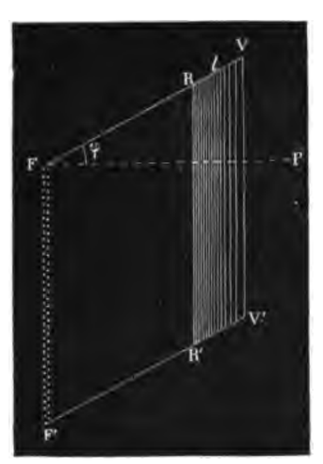


Fig. 166.

Pour se servir de ce diasporamètre on regarde la fente à travers ce prisme d'angle α superposé à un prisme de petit angle A formé du verre à étudier; on dispose d'abord les faces de ces prismes à peu près perpendiculairement à OX et leurs arêtes parallèlement à la fente, l'arête de l'un des prismes étant du côté de la base de l'autre. Si le spectre que donnerait A seul a une largeur l' inférieure à l, on peut toujours, en laissant A dans la position indiquée et en faisant tourner le prisme α, trouver une position de ce prisme pour laquelle la fente sera vue sans irisation : la dispersion donnée par l'un des prismes compense ainsi celle donnée par l'autre. Par conséquent, la largeur des spectres qui seraient fournis par l'un ou l'autre prisme seul est

la même et ces spectres sont de sens inverse. Si φ est alors l'angle connu que forme la section principale du prisme α avec une direction perpendiculaire à la fente, ce prisme étant équivalent à un prisme de même verre d'angle $\alpha \cos \varphi$ et qui aurait son arête parallèle à la fente, on a, d'après la condition d'achromatisme :

$$(5) \qquad \frac{\alpha \cos \varphi}{A} = \frac{n_2 - n_1}{\nu_2 - \nu_1}$$

n_2 et n_1 étant les indices pour le bleu et le jaune du prisme A, ν_2 et ν_1 ceux du prisme α.

En répétant la même expérience avec un prisme d'angle A' formé d'un autre verre d'indice n'_1 et n'_2, on a, si l'achromatisme est obtenu pour une direction φ' de la section principale du prisme α.

$$(6) \qquad \frac{\alpha \cos \varphi'}{A'} = \frac{n'_2 - n'_1}{\nu_2 - \nu_1}$$

d'où, en divisant membre à membre (5) et (6) :

$$(7) \qquad \frac{A \cos \varphi'}{A' \cos \varphi} = \frac{n'_2 - n'_1}{n_2 - n_1}$$

13. **SPECTROSCOPE.** — Le spectroscope est un instrument qui sert à étudier le spectre d'une source lumineuse, à mesurer la distance des diverses raies brillantes ou obscures qui le caractérisent et surtout à comparer la position des raies données par une source lumineuse à celle des raies données par une autre source.

Pour faire comprendre l'intérêt de cet instrument, rappelons qu'une vapeur incandescente émet une lumière qui, analysée par le prisme, fournit un spectre composé de raies ou de bandes brillantes se détachant sur un fond plus sombre, et absolument caractéristiques de la nature chimique de la vapeur incandescente (voir planche I, n°s 3 et 4).

Rappelons encore qu'une lumière donnant un spectre continu, comme celle qui est produite par les corps solides ou liquides

incandescents, éprouve en traversant une vapeur, une absorption élective qui se traduit par des raies ou des bandes sombres dans le spectre de la lumière analysée; ces raies ou ces bandes sombres occupent exactement la même position dans le spectre que les raies ou les bandes brillantes émises par cette même vapeur incandescente.

C'est sur ces propriétés de la lumière que MM. Kirchoff et Bunsen ont fondé *l'analyse spectrale.*

1° Spectroscope ordinaire. — Le spectroscope de Kirchoff et Bunsen, le plus employé encore aujourd'hui, ressemble beaucoup à un goniomètre de Babinet (§ 2) sur la plateforme duquel on aurait placé un prisme, et dont le cercle gradué serait supprimé. Il se compose, en effet: 1° — d'un collimateur à fente C (fig. 167), identique à celui du goniomètre; 2° — d'un ou de plusieurs prismes de 60° P,P′ en flint très dispersif, ayant leurs arêtes parallèles à la fente et disposés au minimum de déviation par rapport aux rayons qui sortent du collimateur, ou qui, sortant d'un prisme tombent sur le suivant (1); 3° — d'une lunette astronomique L qui reçoit les rayons déviés et dispersés par les prismes.

L'objectif de cette lunette donne un spectre réel de la lumière qui éclaire la fente, comme nous l'avons expliqué à propos du goniomètre de Babinet. Pour pouvoir mesurer la distance des raies il faut placer une graduation dans le plan focal de l'objectif, qui se superposera au spectre et sera regardée en même

(1) Il est préférable de placer les prismes dans la position du minimum de déviation pour deux raisons, d'importance secondaire du reste.

La première est qu'un prisme ne donne une image nette d'un objet placé à distance finie que dans la position du minimum de déviation. Or, si la fente du collimateur n'est pas exactement dans le plan focal de la lentille, l'image qu'elle en donne n'est pas à l'infini : quand les prismes sont dans la position du minimum de déviation, on peut obtenir encore un spectre net dans la lunette astronomique.

La seconde est, qu'un petit déplacement accidentel, soit du collimateur, soit du prisme, n'a que très peu d'influence sur la déviation et, par conséquent, sur la position des raies, quand cette déviation est voisine de sa valeur minima.

temps que lui à travers l'oculaire. Mais une graduation sur verre ne serait pas suffisamment éclairée pour être vue; aussi emploie-t-on l'artifice suivant. L'appareil est pourvu d'un second



Fig. 167.

collimateur M, qui dans le plan focal de son objectif porte une graduation G faite en traits transparents sur un fond opaque. On éclaire avec une bougie B cette graduation. Les rayons issus d'un de ses points, rendus parallèles entre eux par l'objectif de ce collimateur, tombent sur la face du prisme P qui est tournée vers la lunette astronomique, se réflechissent sur cette face et tombent, toujours parallèles entre eux, sur l'objectif de la lunette. Celui-ci les fait converger vers un point de son plan focal, et il se forme ainsi dans ce plan une image réelle

de la graduation G, qui sert d'échelle pour noter la position des raies.

Cette échelle graduée immatérielle permet l'emploi de l'oculaire négatif d'Huyghens pour la lunette, ce qui augmente le champ.

Ajoutons qu'on peut rabattre sur la fente du collimateur C un petit prisme à réflexion totale T (fig. 168), mobile à charnière, qui permet d'éclairer par réflexion la partie supérieure de la fente avec une autre source lumineuse que celle qui éclaire directement la partie inférieure. On voit alors dans la lunette astronomique les deux spectres l'un au-dessus de l'autre, et ainsi l'on peut constater facilement si quelques raies de l'un des spectres sont dans le prolongement exact de raies de l'autre spectre, c'est-à-dire si la lumière qui correspond à ces raies a le même indice de réfraction.

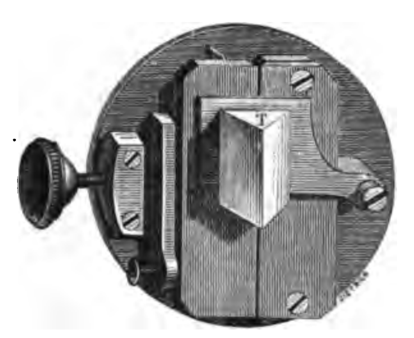


Fig. 168.

Plus le nombre des prismes est grand et plus le verre qui les compose est dispersif, plus est grande la distance qui sépare deux raies déterminées d'un spectre, et, par conséquent, plus l'instrument offre de précision. C'est ainsi que le spectre de la vapeur de sodium paraît ne se composer que d'une seule raie avec une faible dispersion, tandis qu'avec une grande dispersion on voit que ce spectre est formé de deux raies très voisines (planche 1 n° 3). Mais plus la dispersion augmente plus la clarté d'un spectre continu, ou a peu près, comme le spectre solaire, diminue, la lumière qui pénètre par la fente s'étalant sur une plus grande surface.

Chacune des pièces de l'appareil est mobile, et, les réglages effectués, elles peuvent être immobilisées avec des vis de pression. En particulier, la lunette astronomique a besoin d'être déplacée pour voir successivement les diverses parties du

spectre quand il y a plusieurs prismes, car alors la dispersion est trop forte pour que tout le spectre soit dans le champ.

Un écran cylindrique, représenté à part en K (fig. 167), percé des ouvertures convenables, entoure les prismes pour arrêter les rayons qui n'ont pas traversé le collimateur.

2° Spectroscope a vision directe. — Amici a imaginé de compenser la déviation que présentent les rayons moyens qui ont traversé un prisme de flint par un prisme de crown, ce qui laisse subsister la dispersion.

La disposition représentée (fig. 169), employée par M. Janssen,



Fig. 169.

donne de très bons résultats : trois prismes de crown C, C, C', d'angle considérable sont séparés par deux prismes de flint FF' de sens inverse et de même angle. On conçoit que, le flint étant plus réfringent que le crown, la déviation que donneraient pour les rayons moyens du spectre les trois prismes de crown soit compensée par les deux prismes de flint : ces rayons sortent parallèlement à leur direction d'entrée. Mais comme le pouvoir dispersif du flint est plus grand que celui du crown, cette compensation n'a plus lieu pour les autres rayons : le violet est dévié vers la base du prisme de flint, le rouge vers la base du prisme de crown.

En employant ce prisme, on forme des spectroscopes (fig. 170) dans lesquels les axes du collimateur à fente G et de la lunette L sont dans le prolongement l'un de l'autre, le collimateur à graduation M étant seul sur le côté.

Ces spectroscopes dits *à vision directe* sont très commodes, et sont employés, en particulier, pour l'étude de la lumière des

astres, s'adaptant facilement aux lunettes astronomiques ou aux télescopes (1).



FIG. 170.

14. MESURE DE LA DISTANCE FOCALE D'UNE LENTILLE. — Le procédé le plus simple, pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente, consiste à chercher à quelle distance il

(1) Nous devons encore signaler deux remarquables instruments, qui donnent une très grande dispersion.

Le premier est un spectroscope à vision directe de M. Thollon, qui est fondé sur l'emploi de plusieurs *couples* de prismes ; chaque couple est constitué par deux prismes de même angle faisant entre eux un angle tel que le rayon de la couleur qui se trouve au milieu du champ tombe normalement à la face d'entrée du premier prisme et sorte normalement à la face de sortie du dernier. Dans ces conditions la différence de déviation de deux rayons de réfrangibilité voisine est proportionnelle à leur différence d'indice, quelle que soit la partie du spectre considérée, ce qui n'a pas lieu avec le

faut la placer d'un écran blanc perpendiculaire à son axe principal, pour obtenir sur celui-ci une image réelle nette d'objets lointains. La mesure de la distance qui sépare alors l'écran de la lentille donne la distance focale de celle-ci, si elle peut être considérée comme infiniment mince, et si l'objet est assez loin pour pouvoir être considéré comme à l'infini (1).

On donne une grande précision à cette méthode en faisant de la lentille étudiée l'objectif d'une lunette astronomique, et en se servant d'un oculaire positif au-devant duquel on place un réticule. On met d'abord au point nettement le réticule, puis, en enfonçant plus ou moins à la fois l'oculaire et le réticule, on met au point un objet très éloigné, de façon qu'en déplaçant l'œil devant l'oculaire l'image ne se déplace pas par rapport au réticule, ce qui indique que leur plan coïncide : le réticule se trouve alors dans le plan focal de la lentille objective.

Dans le cas d'une lentille un peu épaisse, telle que celles qui servent d'objectif aux grandes lunettes, et si l'on tient à beaucoup de précision, il faut d'après les courbures des lentilles qui constituent l'objectif (achromatique généralement) et l'indice de

spectroscope ordinaire, où deux rayons dans la partie violette, sont, pour une même différence d'indice, beaucoup plus écartés que dans la partie rouge.

Le second instrument est dû à M. Cornu ; c'est un spectroscope à grande dispersion qui pourtant ne contient qu'un seul prisme ; mais celui-ci est traversé quatre fois par les rayons lumineux ce qui produit le même effet que s'il y avait quatre prismes. En outre, c'est la même lunette qui sert à la fois de collimateur et de lunette astronomique pour voir le spectre.

Nous ne pouvons entrer ici dans le détail de ces instruments; nous renverrons pour la description de ces deux spectroscopes au *Journal de Physique* (Spectroscope de M. Thollon, 1re série, T. VII, p. 141 et T. VIII p. 73 ; Spectroscope de M. Cornu 2e série, T. II, p. 53).

(1) Si l'objet éloigné n'est pas assez loin pour qu'on puisse le considérer comme à l'infini, il suffit, pour avoir la distance focale f, de retrancher de la distance p' (presque égale à f) à laquelle se forme l'image nette une fraction a de cette distance égale au rapport très petit entre la distance p', et la distance de l'objet, qui n'a besoin d'être connue que d'une façon approximative. En désignant par φ et φ' les distances de l'objet et de l'image aux plans focaux correspondants, on a, en effet, $a = \frac{\varphi'}{f} = \frac{f}{\varphi}$, d'après la formule de Newton.

réfraction des verres employés, calculer la position des plans principaux par rapport aux faces, en se servant des formules indiquées plus haut (voir Chap. III §§ 14 et 23). La distance du foyer à la face postérieure donnée par l'expérience devra être augmentée de la distance de cette face au second plan principal pour avoir la véritable distance focale (1).

Les mêmes procédés sont évidemment applicables à un miroir concave.

Quand la lentille n'a qu'un petit diamètre, il est plus commode d'employer le focomètre de Silbermann.

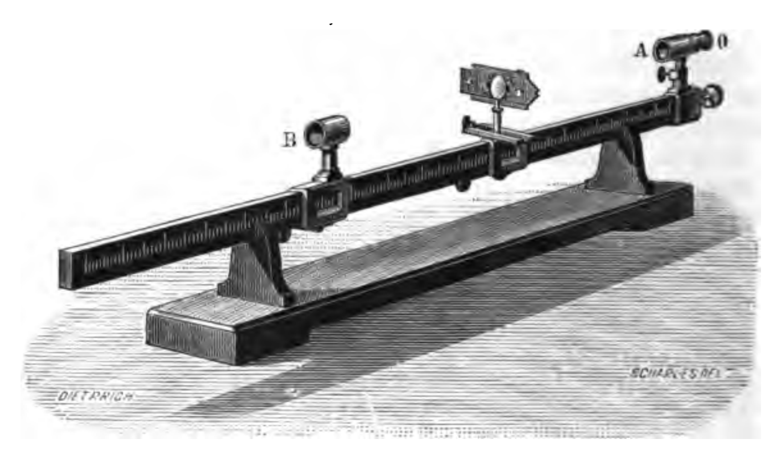


Fig. 171

Cet appareil consiste en deux demi-disques A et B (fig. 171) (représentés à part figure 172) formés d'une substance translu-

(1) Cette correction n'est pas inutile quand la lunette astronomique dont fait partie l'objectif sert à mesurer le diamètre apparent des astres en rendant le fil d'un réticule, mobile à l'aide d'une vis micrométrique, successivement tangent aux deux bords de l'image de l'astre. Il faut connaître la distance du réticule au second point nodal de l'objectif, c'est-à-dire la véritable distance focale, pour pouvoir conclure du déplacement du réticule l'angle que forment les axes secondaires aboutissant aux deux extrémités du diamètre de l'astre.

cide, d'une mince feuille d'ivoire par exemple, et placés chacun dans une bonnette, que supporte une règle graduée horizontale. Les demi-disques A et B occupent la moitié inférieure de chaque bonnette, en se terminant à un diamètre horizontal; ceux-ci sont à la même hauteur, les axes des deux bonnettes coïncidant. Les bords de ces diamètres présentent une graduation, et les traits de l'une des graduations sont à la même distance que ceux de l'autre, un demi-millimètre par exemple (fig. 172). On regarde la graduation A avec un oculaire positif O.

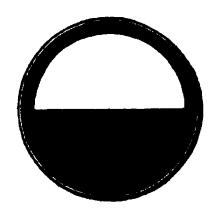


Fig. 172.

La lentille à étudier est placée sur un support entre les deux bonnettes et est orientée, élevée ou abaissée jusqu'à ce que son axe principal coïncide avec l'axe des bonnettes. On en est assuré quand on peut amener l'image fournie par la lentille du bord du demi-disque B à coïncider avec le bord du demi-disque A. L'image de B, étant renversée, est placée alors au-dessus de A dans le même plan : l'image de la graduation de B est juxtaposée ainsi à la graduation de A, et est vue avec la même netteté à travers l'oculaire O. On s'assure, du reste, que les plans des deux divisions coïncident bien en déplaçant un peu l'œil devant l'oculaire : les deux divisions ne doivent pas paraître se déplacer l'une par rapport à l'autre.

Ce réglage effectué, on fait varier alors la position des bonnettes sur la règle graduée jusqu'à ce que l'image des traits de la graduation B, mise parfaitement au point, soit à la même distance que ceux de la graduation A, ce dont il est facile de juger à cause de la juxtaposition. Au besoin, en donnant un petit déplacement latéral à la lentille, on arrive à faire coïncider exactement l'image d'uu trait de B avec un trait A ; il faut alors que les images des autres traits de B coïncident avec ceux de A.

Quand on a obtenu ce résultat, l'image de B, donnée par la lentille, est aussi grande que l'objet, puisque les traits de B sont à la même distance que ceux de A : par conséquent, B et son image sont à la même distance des plans principaux, cette distance étant, comme on le sait, le double de la distance focale.

En mesurant alors la distance l des deux demi-disques A et B,

donnée par la règle graduée, on a le quadruple de la distance focale f augmenté de la distance d des deux plans principaux de la lentille

$$l = 4f + d \quad \text{d'où :} \quad f = \frac{l - d}{4}$$

Rappelons que d, toujours très petit, est, pour une lentille de verre qui n'est pas trop épaisse, égal très sensiblement au tiers de son épaisseur (voir Chap. III, § 29). Ce terme correctif est ainsi connu avec une précision généralement bien suffisante.

Pour obtenir la distance focale f d'une lentille divergente A, un des procédés les plus simples consiste à accoler à celle-ci une lentille convergente B, dont la convergence est supérieure à la valeur absolue de la convergence de A, de façon que le système AB soit convergent. On mesure la distance focale F de ce système par une des deux méthodes précédentes, ainsi que la distance focale f' de B ; si les deux lentilles sont très minces et très rapprochées par rapport à leur distance focale, la convergence $\frac{1}{F}$ du système est égale à la différence des valeurs absolues $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f'}$ des convergences des deux lentilles, on a donc :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{f} \quad \text{d'où :} \quad f = \frac{Ff'}{F - f'}$$

Si la distance des plans principaux des lentilles ne peut pas être négligée vis-à-vis de f ou de f', il faut alors tenir compte de ces distances, ce qui complique un peu le calcul, mais peut souvent se faire sans difficulté ; par exemple, dans le cas des lentilles ayant une face plane ou ayant deux faces de même courbure, on sait à l'avance où sont placés les plans principaux (Chap. III, § 29).

Une méthode analogue est évidemment applicable à la mesure de la distance focale d'un miroir convexe. Seulement, en pla-

çant contre le miroir de distance focale f une lentille convergente de distance focale f', comme les rayons traversent celle-ci avant et après leur réflexion sur le miroir, la convergence $\frac{1}{F}$ du système est donnée par :

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{f'} - \frac{1}{f} \qquad \text{d'où :} \qquad f = \frac{Ff'}{2F - f'}$$

On peut encore, dans le cas d'une lentille divergente, appliquer le procédé général indiqué § 16.

15. Mesure des éléments d'un système convergent. — Méthode de M. Cornu. — La position des foyers et des plans principaux d'un système convergent, dont les faces extrêmes sont baignées par l'air, peut être déterminée très exactement par la méthode suivante due à M. Cornu.

On détermine : 1° — la position du second foyer en cherchant où se forme l'image d'un objet situé à l'infini, et l'on détermine sa distance d_2 à la face extrême du système A_2, située de son côté; 2° — en retournant bout pour bout le système, on prend l'autre foyer comme second foyer, et l'on détermine de même sa distance d_1 à la face extrême A_1 située de son côté; 3° — on détermine la distance φ d'un objet au premier foyer de position connue et la distance φ' de son image au second foyer. La relation $\varphi\varphi' = f^2$ fait connaître la distance focale f du système.

Si le système donne une image renversée d'un objet lointain, la distance focale est positive; la valeur $d_2 - f$ représente alors la distance du second plan principal à la face A_2; quand $d_2 - f$ est positif, le second plan principal est en arrière de cette face; quand $d_2 - f$ est négatif, il est en avant. De même la valeur $d_1 - f$ fait connaître la distance du premier plan principal à la face A_1.

Si, au contraire, le système donne une image droite des objets lointains (l'oculaire terrestre, par exemple), la distance focale est négative, et les distances des plans principaux aux faces extrêmes sont respectivement $d_2 + f_1$ et $d_1 + f_1$, en appelant f_1 la valeur absolue de la distance focale.

Pour relever avec précision la position des images données par le système qu'on veut étudier, on vise celles-ci avec un microscope pourvu d'un oculaire positif et d'un réticule. Ce microscope, peu grossissant, vise à une distance assez grande (à 2 ou 3 centimètres de l'objectif); son axe doit coïncider avec celui du système. Celui-ci est porté, ainsi que le microscope, par un banc en fonte raboté, horizontal, présentant une graduation comme la règle graduée du focomètre de Silbermann. On dispose le système de façon que son axe optique soit parallèle à la règle graduée.

On se sert comme objet des faces mêmes du système; à l'endroit où les faces A_1 et A_2 sont rencontrées par l'axe principal, on fait avec un peu d'encre de Chine délayée dans de l'eau gommée un trait ou une petite tache, sur chacune de ces faces : ce seront les objets.

On commence par viser avec le microscope l'image donnée par le système d'un objet à l'infini ; puis on déplace le microscope jusqu'à viser nettement la tache faite sur la face A_2. La quantité dont il a fallu déplacer le microscope donne d_2. On déplace de nouveau le microscope jusqu'à viser l'image de la tache de A_1 donnée par le système ; désignons par p_1 la quantité dont s'est avancé le microscope pour passer de la première position (foyer) à la troisième (image).

On retourne alors bout pour bout le système optique et l'on mesure de même la distance d_1 de l'autre foyer à la face A_1 et la distance p_2 de ce foyer à l'image de la tache faite sur A_2.

Dans le premier cas, quand A_1 sert d'objet, sa distance au premier foyer étant d_1, et celle de son image au second foyer p_1, on a :

$$(1) \qquad d_1 p_1 = f^2$$

Dans le second cas, quand A_2 sert d'objet, sa distance au foyer correspondant étant d_2 et celle de son image à l'autre foyer p_2, on a :

$$(2) \qquad d_2 p_2 = f^2$$

Les relations (1) et (2) devant donner les mêmes valeurs pour f, on a ainsi un contrôle.

Si le système optique étudié n'est pas suffisamment achromatique, il faut opérer en lumière monochromatique, soit en éclairant le système avec la flamme d'un bec de Bunsen dans laquelle on a placé un morceau de chlorure de sodium, soit, plus simplement, en éclairant avec la lumière blanche, mais en plaçant au-devant de l'œil un verre rouge.

Si le système présente des aberrations de sphéricité trop importantes, il faut d'abord les corriger en réduisant l'ouverture des lentilles par des diaphragmes.

16. APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE A UN SYSTÈME DIVERGENT. — Quand le système optique est divergent, par définition, l'image qu'il donne d'un objet situé à l'infini se forme en avant de la dernière face A_2 du système. Si l'on veut appliquer encore la méthode précédente, en cherchant à viser avec le microscope cette image, on peut se trouver arrêté par la première face du système, qui ne permettra pas au microscope de s'approcher assez de l'image. Il faudra se servir alors d'un microscope à grande distance focale objective, autrement dit d'une lunette astronomique. Il n'y a rien d'autre à changer à la méthode, et les formules du paragraphe précédent sont applicables à condition de prendre pour d_1 et d_2 ainsi que pour p_1 et p_2 les valeurs absolues des distances affectées du signe —.

Nous ferons remarquer seulement que plus la distance de l'objet visé par la lunette à son objectif est grande, plus est grande aussi la latitude du déplacement qu'on peut donner à l'objet par rapport à la lunette, sans cesser de le voir nettement. La précision de la méthode sera donc d'autant moindre que la lunette employée visera plus loin; et non seulement la précision absolue sera moindre, mais même la précision relative. Ainsi, avec un microscope, pourvu d'un oculaire positif convergent, et qui vise à 1 centimètre, on ne commet pas une erreur de $\frac{1}{500}$ sur cette distance, tandis qu'avec une lunette possédant le même oculaire et visant à 20 centimètres,

on peut commettre une erreur de $\frac{1}{25}$, si dans les deux cas la distance de l'objectif à l'image réelle qu'il fournit est 20 centimètres [1].

On peut remédier en partie à ce défaut en prenant une longue lunette, de façon que la distance de l'oculaire à l'objectif reste supérieure à la distance de l'objet à l'objectif. En outre, on doit la munir d'un objectif d'un diamètre assez grand pour que le cône des rayons, qui ont traversé celui-ci et qui viennent former l'image d'un point, ne soit pas trop aigu. A propos du microscope, nous avons vu, en effet, que plus ce cône est de

(1) On a, en effet, en employant les notations habituelles $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$; d'où, pour la variation dp' qu'éprouve la position de l'image réelle fournie par l'objectif par suite d'une variation dp de la position de l'objet

$$-\frac{dp}{p^2}-\frac{dp'}{p'^2}=0$$

et, par conséquent :

$$\frac{dp}{p}=-\frac{p}{p'}\frac{dp'}{p'} \tag{1}$$

Avec un autre objectif donnant l'image réelle à la même distance p', et visant à la distance p_1 on a de même

$$\frac{dp_1}{p_1}=-\frac{p_1}{p'}\frac{dp'}{p'} \tag{2}$$

On tire de (1) et de (2) $$\frac{\left(\frac{dp_1}{p_1}\right)}{\left(\frac{dp}{p}\right)}=\frac{p_1}{p}$$

Ce qui montre que les variations relatives $\frac{dp_1}{p_1}$ et $\frac{dp}{p}$ de la position de l'objet correspondant à la même variation dp' de position d'une image, placée dans les deux cas à la même distance p', sont proportionnelles aux distances p_1 et p de l'objet au premier plan principal de l'objectif.

petit angle, plus l'instrument a un grand pouvoir pénétrant, ce qu'on doit précisément éviter ici:

17. MESURE DU GROSSISSEMENT D'UN OBJECTIF DE MICROSCOPE. — Il est très facile de mesurer le grossissement d'un microscope solaire. On prend comme objet un *micromètre objectif*, c'est-à-dire une plaque de verre sur laquelle sont tracées au diamant des divisions très rapprochées, de distance connue, des centièmes de millimètre, par exemple. Après avoir mis au point sur l'écran, on mesure la distance i des images de deux traits limitant une division de longueur connue o : le rapport $\frac{i}{o}$ est, par définition, le grossissement g (1).

Dans le cas d'un objectif de microscope composé, pour avoir son grossissement dans des conditions données, on met au point le micromètre objectif; puis on remplace l'oculaire d'Huyghens par un oculaire de Ramsden portant, à distance convenable pour être vue nettement par l'observateur, une division sur verre dont les traits sont à distance connue, par exemple à un dixième de millimètre les uns des autres. Sans toucher à la position de l'objectif du microscope, on déplace le système oculaire jusqu'à voir très nettement l'image du micromètre objectif, et, en tournant convenablement le système oculaire, on rend les traits des deux graduations parallèles; on compte alors combien l'image i d'une division o du micromètre objectif contient de divisions et de fractions de division du micromètre oculaire, ce qui fait connaître i et, par conséquent, le grossissement de l'objectif $\frac{i}{o}$.

(1) La mesure de la distance l de l'écran à l'objectif fait connaître, d'une façon très précise, la distance focale f de celui-ci, en vertu de la relation (Chap. VII, § 5) :

$$g = \frac{l}{f} - 1$$

Ce procédé de mesure de la distance focale est applicable, bien entendu, à toute espèce d'objectif, pourvu que la distance des plans principaux aux faces de l'objectif soit négligeable vis-à-vis de la distance l.

Il serait encore plus précis de se servir d'un oculaire à réticule mobile à l'aide d'une vis micrométrique.

18. UNITÉ DE CONVERGENCE. — DIOPTRIE. — La convergence d'une lentille, d'un système dioptrique centré ou d'un miroir est, par définition, l'inverse de sa distance focale. L'unité de convergence est la convergence d'une lentille ayant pour distance focale l'unité de longueur employée.

On a adopté aujourd'hui comme unité de convergence, en la désignant sous le nom de *dioptrie*, la convergence d'une lentille ayant un mètre de distance focale. Par conséquent, en exprimant la distance focale d'un système en mètres, l'inverse de ce nombre représente sa convergence en dioptries. Par exemple, si la distance focale est de 5 centimètres, la convergence vaut $\frac{1}{0,05} = 20$ dioptries.

Rappelons ici que si le système est divergent, sa convergence est négative. Rappelons aussi que si plusieurs lentilles très minces sont placées l'une contre l'autre, la convergence du système égale la somme algébrique des convergences des lentilles.

Ainsi, un objectif achromatique formé d'une lentille convergente de 5 dioptries et d'une lentille divergente de — 3 dioptries a une convergence de 2 dioptries.

Un œil myope dont le punctum remotum est à 20 centimètres équivaut à un œil normal devant lequel on aurait placé une lentille convergente de 20 centimètres ou de $\frac{1}{0,2} = 5$ dioptries; cet œil myope presente donc un excès de convergence de 5 dioptries, qu'on fera disparaître en mettant devant une lentille divergente de — 5 dioptries. Les verres des lorgnons (convergents ou divergents) sont numérotés maintenant en dioptries.

Ces exemples suffisent pour faire comprendre l'utilité de cette unité.

19. MESURE DE LA PUISSANCE ET DU GROSSISSEMENT D'UN OCULAIRE. — Nous avons vu que la puissance d'un oculaire est égale à l'inverse de sa distance focale, c'est-à-dire égale à sa convergence quand l'œil est disposé pour voir à l'infini, quelle

que soit du reste la distance de l'œil à l'oculaire, ou encore quand le second foyer de l'oculaire convergent se confond avec le point nodal de l'œil, quelle que soit la distance pour laquelle celui-ci est accommodé. La puissance est donc une grandeur de même nature que la convergence, et qui s'évalue en dioptries. Du reste, dans les conditions habituelles de l'usage des oculaires, l'une ou l'autre des conditions que nous venons d'indiquer se trouve remplie, ou à peu près, ce qui fait qu'on prend comme *valeur nominale* de la puissance d'un oculaire sa convergence même. Il résulte de là que la mesure de la distance focale d'un oculaire par l'un des procédés indiqués plus haut (§§ 14, 15 et 16) fait connaître très exactement sa puissance nominale.

Mais il existe aussi d'autres méthodes, fondées sur la définition même de la puissance, qui donnent parfois plus commodément, quoiqu'en général avec un peu moins de précision, la valeur de cette grandeur ; ces méthodes fournissent, par conséquent, un nouveau moyen de mesurer la distance focale ; nous allons les indiquer.

Supposons d'abord que l'oculaire soit convergent et positif. On regarde à travers l'oculaire une division sur verre en millimètres, dixièmes ou centièmes de millimètre suivant sa puissance, et l'on reçoit dans l'œil en même temps les rayons provenant d'une mire, que nous supposerons divisée en longueurs connues, placée à une très grande distance (50 à 60 mètres au moins). Pour recevoir dans l'œil même qui regarde à travers l'oculaire les rayons venant de la mire, on se sert d'une *chambre claire* (1).

(1) La *chambre claire* été inventée par Wollaston en 1812.

Il existe beaucoup de modèles de chambre claire; celui que représente la figure 173 a été construit par M. Nachet pour pouvoir dessiner les objets vus au microscope. Cette chambre claire convient très bien pour la mesure de la puissance.

Elle se compose d'un parallélipipède en verre ABCD dont les bases AB et CD sont inclinées à 45° sur les faces AD et BC. Les rayons ST S'T' venant de la mire (ou de la pointe du crayon dans le cas d'un dessin) entrent par la face AD, subissent la réflexion totale, d'abord sur la face AB, puis sur la face DC et pénètrent ensuite dans l'œil. Un petit cylindre de verre H collé sur la face CD permet aux rayons PQR PQ'R', qui sortent de

L'œil regardant la mire lointaine s'accommode pour l'infini ; en faisant varier la distance de la graduation sur verre, on la met au point et, en la faisant tourner convenablement, on rend ses traits parallèles à ceux de la mire : les images de la graduation et de la mire semblent superposées. On compte alors le nombre de divisions de la mire qui sont contenues dans une division de la graduation sur verre vue à travers l'oculaire ; on obtient ainsi la longueur L qui à la distance D de la mire à l'œil est vue sous le même angle qu'une division de longueur l vue à travers l'oculaire. Or, si P est la puissance cherchée, cet angle est Pl [1] ; on a donc :

$$(1) \qquad Pl = \frac{L}{D} \qquad \text{d'où :} \quad P = \frac{L}{l}\frac{1}{D}$$

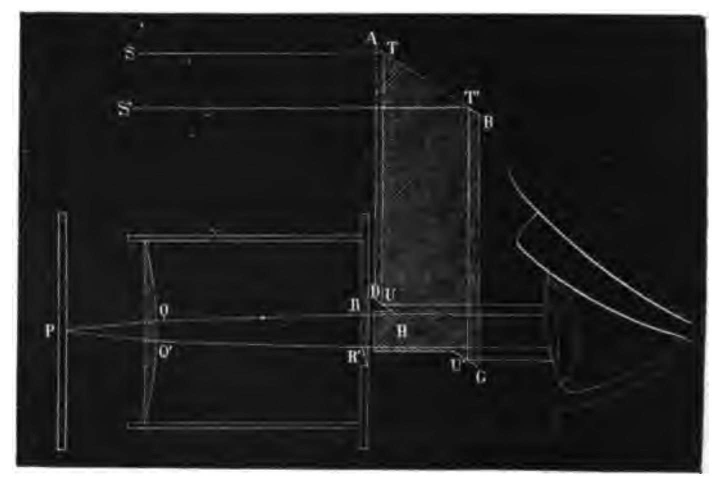


Fig. 173.

l'oculaire, d'arriver sans déviation jusqu'à l'œil. De cette façon les images rétiniennes données par la mire et par l'objet vu à travers l'oculaire sont superposées.

Dans le cas d'un dessin à faire, l'image donnée par le microscope semble se projeter sur la feuille de papier qui envoie les rayons ST S'T', et le crayon peut en suivre les contours.

L et l doivent être évalués avec la même unité de longueur, et, en exprimant la distance D en mètres, la puissance P sera donnée en dioptries par la formule (1).

Comme il est souvent difficile de se procurer une mire lointaine, on remplace avantageusement celle-ci par un collimateur qui porte, au lieu de fente, une division en millimètres tracée sur verre, pour pouvoir être éclairée par derrière. On met cette graduation exactement dans le plan focal de la lentille du collimateur, en opérant comme nous l'avons indiqué pour la fente, à propos du goniomètre de Babinet (§ 2). La graduation vue à travers la lentille équivaut à une mire placée à l'infini : chaque division est vue sous un angle qui est indépendant de la distance de l'œil au collimateur. Cet angle est évidemment celui des axes secondaires aboutissant aux deux extrémités de la division ; par conséquent, si λ est la longueur d'une division (un millimètre) et φ la distance, facile à mesurer, de la division à la lentille (plus rigoureusement à son premier plan principal), la valeur de cet angle est $\frac{\lambda}{\varphi}$. Si une division vue à travers l'oculaire couvre n divisions du collimateur, on a :

$$Pl = \frac{n\lambda}{\varphi} \quad \text{d'où :} \quad P = n \frac{\lambda}{l} \frac{1}{\varphi}$$

Cette méthode est applicable à tous les oculaires positifs ; en particulier, elle est employée pour mesurer la puissance des microscopes composés.

Si l'oculaire est convergent et négatif, comme celui d'Huyghens, il devient positif si l'on regarde au travers après l'avoir retourné ; on pourra prendre, par la méthode précédente, sa puissance nominale comme oculaire positif, qui est évidemment la même que sa puissance nominale comme oculaire négatif, puisque l'une et l'autre sont égales à l'inverse de la distance focale.

(1) En confondant ainsi la tangente avec l'angle, on ne commet qu'une erreur de $\frac{1}{1250}$ pour un millimètre placé sur l'axe d'un oculaire de 100 dioptries à travers lequel on le regarde.

On peut encore le prendre comme oculaire d'un microscope composé; mesurer la puissance P de celui-ci, le grossissement g de l'objectif, et, d'après la formule

$$P = pg$$

avoir la puissance p de l'oculaire.

Enfin, si l'oculaire est divergent, on peut obtenir sa puissance nominale en l'associant à un objectif pour en faire une lunette de Galilée. On mesure 1° — le grossissement G de la lunette mise au point pour voir un objet situé à l'infini avec un œil accommodé pour la vision à l'infini, par la méthode indiquée plus loin (§ 20); 2° — la distance focale F de l'objectif (§ 14) : la formule $G = PF$ donne la puissance P de l'oculaire.

Rappelons que, quand on connaît la puissance d'un oculaire, il suffit de la multiplier par la distance maxima de vision distincte pour l'œil de l'opérateur, pour avoir le grossissement. Si la puissance est exprimée en dioptries (l'inverse d'une longueur exprimée en mètres), il faut exprimer en mètres la distance minima de vision distincte. Le grossissement d'un oculaire est du reste peu intéressant à connaître [1].

(1) On indique habituellement la méthode suivante pour mesurer directement le grossissement d'un microscope ou d'un oculaire quelconque. On adapte au microscope la chambre claire, on place sur le porte-objet le micromètre objectif, et l'on dispose, au *minimum de vision distincte*, de façon à être vue par l'intermédiaire de la chambre claire, une règle divisée. L'image du micromètre objectif paraît couvrir celle de la règle ; on compte le nombre n de divisions de celle-ci couverte par l'image d'une division de longueur l du micromètre. Si L est la longueur d'une division de la règle, on a, en appelant P la puissance du microscope, et Δ la distance minima de vision distincte :

$$Pl = \frac{nL}{\Delta}$$

d'où, pour le grossissement G :

$$G = P\Delta = \frac{nL}{l}$$

20. MESURE DU GROSSISSEMENT D'UN TÉLESCOPE. — La mesure directe du grossissement d'un télescope dioptrique ou catoptrique se fait en regardant avec le même œil et simultanément une mire graduée lointaine 1° — à travers l'instrument, 2° — directement par l'intermédiaire d'une chambre claire (1).

Les deux images rétiniennes se superposant, on compte combien une division de la mire, vue à travers le télescope, couvre

La connaissance de L, de l et la mesure de n donnent aussi la valeur de G.

Cette méthode fournit bien évidemment le grossissement du microscope *quand on s'en sert avec la chambre claire*, ce qui peut être intéressant à connaître pour avoir le rapport entre les dimensions d'un dessin fait à la chambre claire et celles de l'objet microscopique ; mais elle ne donne pas le grossissement du microscope quand on s'en sert à la façon ordinaire sans chambre claire. L'œil, en effet, est, dans ce cas, plus rapproché de l'oculaire de l'épaisseur de la chambre, (un centimètre environ) ce qui augmente la puissance et, par conséquent, le grossissement, puisque *l'œil est accommodé pour la vision à distance finie*. En prenant un grossissement pour l'autre, l'erreur est faible si l'observateur a une vue longue; mais elle atteint $\frac{1}{10}$ pour un minimum de vision distincte de 10 centimètres, et $\frac{1}{5}$ pour un minimum de 5 centimètres. Or, ces degrés de myopie ne sont pas rares chez les micrographes.

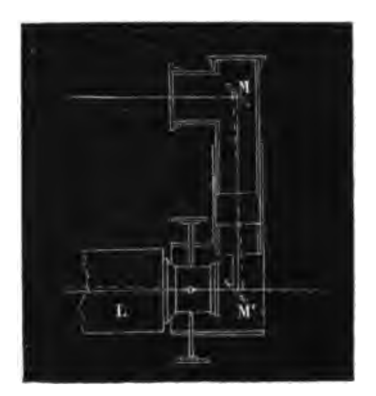


Fig. 174.

C'est pourquoi nous préférons la méthode indiquée dans le texte.

(1) La largeur des tubes de la plupart des lunettes empêche de se servir de la petite chambre claire décrite pour le microscope. Pouillet a employé, dans ce but, une chambre claire, identique en principe à la précédente, mais de plus grande dimension, formée par deux miroirs M et M' (fig. 174). Le miroir M' est désétamé sur une petite surface pour laisser passer les rayons qui sortent de la lunette. Dans le cas d'un télescope de Newton ou de Foucault, le miroir M' suffit seul évidemment.

de divisions de la mire vues à l'œil nu : ce nombre n représente le grossissement G. En effet, si α est l'angle sous lequel on voit une division à l'œil nu, à travers le télescope on la voit sous l'angle $G\alpha$; et, comme n divisions, à l'œil nu, sont vues sous l'angle $n\alpha$, on a $G\alpha = n\alpha$, d'où $G = n$.

A défaut d'une chambre claire, on peut regarder avec l'un des yeux dans le télescope et regarder la mire avec l'autre œil (*procédé de Galilée*) : il y a encore superposition dans la vision binoculaire des deux images. Mais ce procédé est plus fatigant, parce qu'il est difficile de maintenir assez immobiles les axes des deux yeux pour que les images ne se déplacent pas l'une par rapport à l'autre.

Il est toujours difficile de se procurer une mire éloignée ; un grillage de clôture à barreaux régulièrement espacés peut en tenir lieu parfois. Il est plus commode de se servir de deux collimateurs semblables à celui décrit au paragraphe précédent ; l'un d'eux est placé devant le télescope, et l'autre, de façon à être vu directement à travers la chambre claire. En appelant α et α' les angles connus sous lesquels l'œil nu voit une division à travers chacun des collimateurs, et n le nombre des divisions (d'angle α'), qui sont couvertes par une division (d'angle α) vue à travers le télescope, on a $G\alpha = n\alpha'$.

Ramsden a indiqué, pour évaluer le grossissement d'un télescope, une méthode fondée sur la mesure du disque oculaire. Nous avons vu (Chap. VII, § 17, 3°) que le rapport $\frac{D}{d}$ du diamètre D de l'objectif (lentille ou miroir) au diamètre d du disque oculaire est égal au grossissement. Du reste, si L est la longueur d'un objet placé sur l'objectif et l l'image de cet objet dans le disque oculaire, $\frac{L}{l}$ représente aussi le grossissement, puisque ce rapport est égal à $\frac{D}{d}$.

Pour mesurer exactement la dimension très petite l de l'image dans le disque oculaire, on se sert d'un petit instrument connu sous le nom de *dynamètre de Ramsden*. Il consiste en un oculaire de Ramsden, qui regarde une plaque translucide A sur

laquelle est gravée une division, en dixièmes de millimètre par exemple. En faisant coïncider la plaque A avec le disque oculaire, on voit nettement à travers le dynamètre ce disque et la graduation.

Pour faire l'expérience, on place sur l'objectif les deux pointes d'un compas, auxquelles on donne un écartement tel que leurs images soient distantes d'un nombre entier de divisions du dynamètre. On mesure ce nombre, ce qui donne *l*, ainsi que la distance L comprise entre les deux pointes du compas.

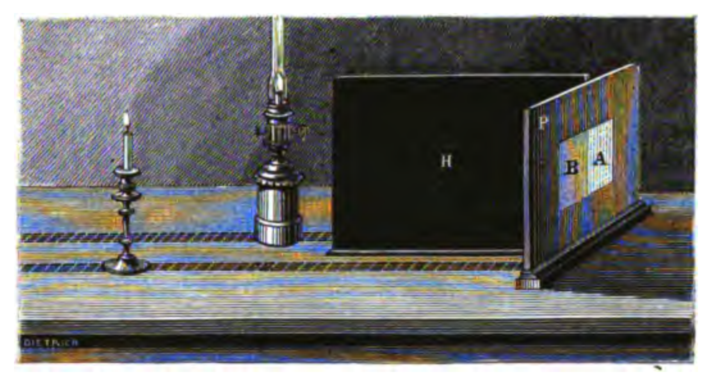


Fig. 175.

21. PHOTOMÉTRIE. — DÉFINITIONS. — On appelle *photométrie* la partie de l'optique qui s'occupe de la mesure des intensités lumineuses, et *photomètres* les appareils qui servent à faire ces mesures.

La comparaison des intensités de deux sources lumineuses se fait le plus souvent en comparant les éclairements qu'elles produisent sur un même écran. Pour rendre cette comparaison facile, on se sert de divers photomètres, par exemple du *photomètre de Bouguer* (1), le seul que nous décrirons pour le moment.

(1) Pierre Bouguer, né au Croisic, en 1698, est mort en 1758 ; son travail sur la photométrie a paru en 1729.

Cet appareil se compose d'un écran opaque P (fig. 175) percé d'une fenêtre AB couverte par une substance translucide (papier huilé, verre dépoli, etc.); une cloison H, perpendiculaire à l'écran P, sépare en deux parties A et B la fenêtre. De cette façon, deux sources lumineuses placées de part et d'autre de la cloison H éclairent l'une la partie A, l'autre la partie B de la fenêtre; en se mettant derrière, on peut comparer aisément les éclairements des deux parties A et B qui sont juxtaposées.

Supposons d'abord que la surface AB reçoive dans une direction normale, ou à peu près, les rayons lumineux envoyés par les deux sources. Si deux sources lumineuses placées à la même distance d de la fenêtre donnent sur A et sur B le même éclairement, on trouve que quand ces sources sont placées à une même distance de la fenêtre ayant une autre valeur quelconque d', les éclairements produits par l'une et par l'autre sont encore égaux, si toutefois les deux sources ont des dimensions linéaires négligeables vis-à-vis de d et de d'; on dit alors qu'elles ont *la même intensité*.

Lorsque n sources de même intensité sont placées côte à côte, sans se masquer les unes les autres, à la même distance d'un écran, l'éclairement produit sur celui-ci est, par définition, n fois plus grand que s'il n'y avait qu'une seule de ces sources.

Par conséquent, si, dans un cas, n sources de même intensité et, dans un autre cas, n' de ces sources éclairent le même écran, ces sources étant toujours placées à la même distance de celui-ci, les deux éclairements sont dans le rapport $\frac{n}{n'}$.

Quelle que soit l'obliquité des rayons lumineux qui tombent sur une surface, si, dans deux cas différents, les éclairements sont dans un rapport k, on dit que les *quantités de lumière reçues par unité de surface* sont dans ce rapport k.

Faisons choix d'une unité pour la quantité de lumière par unité de surface, et soit, dans un certain cas, l cette quantité de lumière par unité de surface; si l'éclairement est uniforme, la quantité de lumière qui tombe sur une portion d'étendue S de la surface éclairée est Sl. Si la surface n'est pas uniformément éclairée, on peut la décomposer en éléments d'aire σ assez petits, pour que la quantité de lumière qui tombe sur eux par unité de surface

ait la même valeur l dans toute l'étendue d'un élément d'aire σ ; la quantité q de lumière qui tombe sur toute la surface éclairée est donnée dans ce cas par

$$q = \sum \sigma l$$

22. VARIATION DE L'ÉCLAIREMENT AVEC LA DISTANCE ET AVEC L'OBLIQUITÉ. — Soit O une source lumineuse de dimensions linéaires négligeables vis-à-vis de sa distance aux surfaces éclairées ; considérons un cône d'angle infiniment petit ayant

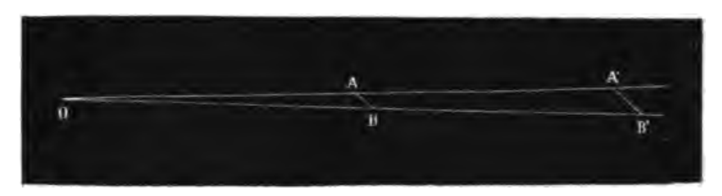


FIG. 176.

O pour sommet. En admettant que toutes les sections droites ou obliques de ce cône reçoivent du point O la même quantité de lumière, on trouve immédiatement les deux lois suivantes :

1° *Les éclairements d'une surface qui se déplace parallèlement à elle-même varient en raison inverse du carré de sa distance à la source lumineuse.*

En effet, soient AB et A'B' (fig 176) deux sections parallèles du cône, S et S' leur surface, l et l' les quantités de lumière qui tombent par unité de surface ; on a, d'après l'hypothèse faite plus haut :

$$Sl = S'l' \qquad \text{d'où :} \quad \frac{l}{l'} = \frac{S'}{S}$$

Or les éclairements E et E' sont respectivement proportionnels à l et l' et les surfaces S et S' sont proportionnelles aux car-

rés des distances D et D' des sections AB et A'B' à la source O d'où :

$$\frac{E}{E'} = \frac{l}{l'} = \frac{D'^2}{D^2}$$

Cette loi a été énoncée par Képler.

2° *L'éclairement d'une surface est proportionnel au cosinus de l'angle que forme sa normale avec la direction des rayons incidents.*

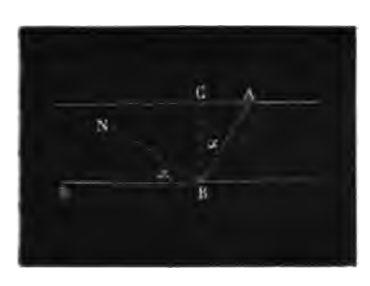


Fig. 177.

Menons, en effet, une section oblique BA et une section droite BC (fig. 177) du cône, d'ouverture infiniment petite, ayant O pour sommet ; soit α l'angle que fait avec la direction RB des rayons incidents la direction BN de la normale à AB. On a, en désignant par l et l' les quantités de lumière qui tombent par unité de surface sur les sections BC et BA d'aires S et S' :

$$Sl = S'l' \qquad \text{d'où :} \quad \frac{l}{l'} = \frac{S'}{S}$$

d'autre part, on a :

$$S = S' \cos\alpha$$

d'où :

$$l' = l \cos\alpha$$

et, comme les éclairements E et E' sont proportionnels à l et l' :

$$E' = E \cos\alpha$$

Les variations de l'éclairement produit par chaque point d'une source obéissant à ces deux lois, celles-ci s'étendent au cas où la source a une étendue finie, à condition qu'on puisse négliger les différences des distances de ses divers points à l'écran ou les différences d'obliquité.

Les deux lois que nous venons d'énoncer reposent sur l'hypothèse que la *quantité de lumière*, telle que nous l'avons définie plus haut, reste constante à l'intérieur du cône ayant la source pour sommet. Ce dernier point n'est pas évident *a priori*, et l'on conçoit qu'il soit indispensàble de soumettre ces deux lois au contrôle de l'expérience.

1° Vérification de la loi du carré de la distance. — L'expérience qui sert à faire la vérification de cette loi est fort simple; elle peut se faire avec le photomètre de Bouguer que nous avons déjà décrit.

On commence par se procurer plusieurs sources lumineuses de même intensité, par exemple plusieurs bougies semblables, et l'on juge de leur égalité d'intensité comme nous l'avons indiqué § 21.

En éclairant chacune des parties A et B du photomètre par une bougie différente, on peut voir immédiatement qu'en approchant ou en éloignant l'une des deux bongies, l'éclairement correspondant augmente ou diminue. Si l'on cherche alors combien il faut placer de bougies à une distancs de 2 mètres pour produire le même éclairement qu'une seule bougie à la distance de 1 mètre, les rayons tombant normalement aux surfaces éclairées, on trouve qu'il en faut placer 4.

Or, ces 4 bougies ramenées à la distance de 1 mètre de la fenêtre AB, donneraient un éclairement quatre fois plus grand qu'une seule bougie; par conséquent, puisque, éloignées à 2 mètres, elles donnent le même éclairement, il faut en conclure qu'en doublant la distance on réduit l'éclairement dans le rapport de 1 à 4 ou de $\frac{1^2}{2^2}$.

On trouverait de même qu'il faut placer 9 bougies à 3 mètres pour produire le même éclairement qu'une seule à 1 mètre, ce qui démontre qu'en triplant la distance l'éclairement est réduit

dans le rapport de $\frac{1}{9} = \frac{1^2}{3^2}$; et ainsi de suite : la loi énoncée plus haut se trouve donc démontrée.

La difficulté de se procurer plusieurs sources bien identiques rend cette démonstration un peu difficile. Le procédé suivant est plus commode.

On éclaire une petite ouverture O, de un ou deux centimètres carrés, en plaçant derrière et très près la flamme d'une lampe. On forme sur l'une des parties A de la fenêtre l'image réelle de cette ouverture O au moyen d'une lentille objective. Cette image, du reste, doit être assez grande pour couvrir toute la partie A de la fenêtre, et lui donner un éclairement uniforme. Au besoin, pour faire nettement la mise au point on tend un fil dans l'ouverture O, et l'on en rend bien nette l'image qui s'en forme sur la fenêtre, puis on enlève le fil. Cette opération faite, on déplace une bougie de façon à donner à l'autre partie B de la fenêtre un éclairement égal à celui de A. Après avoir mesuré la distance de la bougie à la fenêtre, on double cette distance; on constate alors qu'en couvrant les $\frac{3}{4}$ de l'objectif par un écran, ce qui réduit évidemment au quart l'éclairement toujours uniforme de A, les deux parties A et B ont le même éclairement. De même si l'on triple la distance primitive de la bougie à la fenêtre, il faudra couvrir les $\frac{8}{9}$ de l'objectif pour obtenir le même éclairement en A et B.

Cette démonstration n'exige que deux sources qui restent identiques à elles-mêmes pendant la durée de l'expérience.

2° Vérification de la loi de l'obliquité. — Cette vérification peut aussi se faire avec un photomètre de Bouguer dont la fenêtre a des dimensions négligeables vis-à-vis des distances des sources lumineuses. On place devant chaque moitié de la fenêtre deux sources S et S′ de façon que les rayons tombent normalement, et l'on fait varier la distance de l'une d'elles jusqu'à rendre les éclairements égaux ; soient, alors,

D et D' les distances des deux sources à l'écran. En laissant la source S' toujours à la même distance D', on la déplace de façon à faire tomber les rayons sur la fenêtre sous un angle d'incidence quelconque que nous désignerons par α, et qu'on mesure. L'éclairement devient plus faible, et, pour affaiblir autant l'éclairement de l'autre partie de la fenêtre, il faut reculer la source S, normalement à l'écran, jusqu'à une nouvelle distance D_1 ; on trouve que cette distance satisfait à la relation :

$$\left(\frac{D}{D_1}\right)^2 = \cos \alpha \qquad (1)$$

Or, l'éclairement de la partie de la fenêtre qui reçoit la lumière de S ayant varié dans le rapport $\left(\frac{D}{D_1}\right)^2$, l'éclairement de la partie qui reçoit la lumière de S' a, par l'obliquité des rayons, varié dans le même rapport, c'est-à-dire, d'après l'égalité (1), a varié dans le rapport de cos α à 1, ce qui est la vérification de la loi.

23. INTENSITÉ D'UNE SOURCE LUMINEUSE. — La valeur absolue de l'intensité d'une source lumineuse est *la quantité de lumière qui tombe normalement sur l'unité de surface placée à l'unité de distance de la source.* Pour que cette définition soit précise il faut, bien entendu, que la source ait des dimensions linéaires négligeables vis-à-vis de l'unité de longueur.

On voit, d'après cette définition, que si les unités de longueur et de quantité de lumière sont fixées, l'intensité d'une source a une valeur parfaitement déterminée. Réciproquement, si l'unité d'intensité est fixée, l'unité de quantité de lumière est déterminée.

Désignons par I l'intensité d'une source lumineuse. D'après la loi de Képler, la quantité de lumière qui tombe par unité d'aire, sur une surface qui reçoit normalement les rayons lumineux et qui est placée à une distance D de la source est $\frac{I}{D^2}$. D'après la

loi de l'obliquité, si la normale à la surface fait un angle α avec la direction des rayons incidents, la quantité de lumière l reçue par unité de surface est donnée par :

$$l = \frac{I}{D^2} \cos \alpha \qquad (1)$$

Cette formule résume les deux lois précédentes ainsi que la définition de l'intensité d'une source.

24. Unité d'intensité. — Il convient de choisir pour unité d'intensité celle d'une source qui reste autant que possible identique à elle-même.

Vers 1861, MM. Dumas et Regnault ont fait adopter en France, comme unité, *l'intensité d'une lampe Carcel brûlant 42 grammes d'huile de colza épurée à l'heure.* Dans les comparaisons photométriques, la lampe est placée sur le plateau d'une balance pour constater si la quantité d'huile réglementaire a été consommée.

En Angleterre, en Allemagne, on se sert, en général, de bougies de dimension et de composition bien déterminées.

Ces unités laissaient à désirer comme constance. M. Violle a fait adopter, au Congrès international des Electriciens, réuni à Paris en 1881, une unité d'intensité tout à fait invariable, que nous appellerons l'*unité absolue*; c'est l'intensité, *dans une direction normale, d'un centimètre carré de la surface d'un bain de platine à la température de fusion.*

Comme cette température est toujours la même (1700° environ) au moment de la solidification du platine, il en est de même de la quantité de lumière émise par unité de surface ainsi que de la composition de cette lumière.

Le platine est fondu dans un creuset en chaux F (fig. 178), au moyen de la flamme d'un chalumeau OH alimenté par de l'hydrogène et de l'oxygène. Quand le platine est fondu, on amène le creuset sous un écran en platine D percé d'une ouverture d'un centimètre carré et noirci sur ses deux faces. Cet écran est constamment refroidi par un courant d'eau circulant par les tubes AA'.

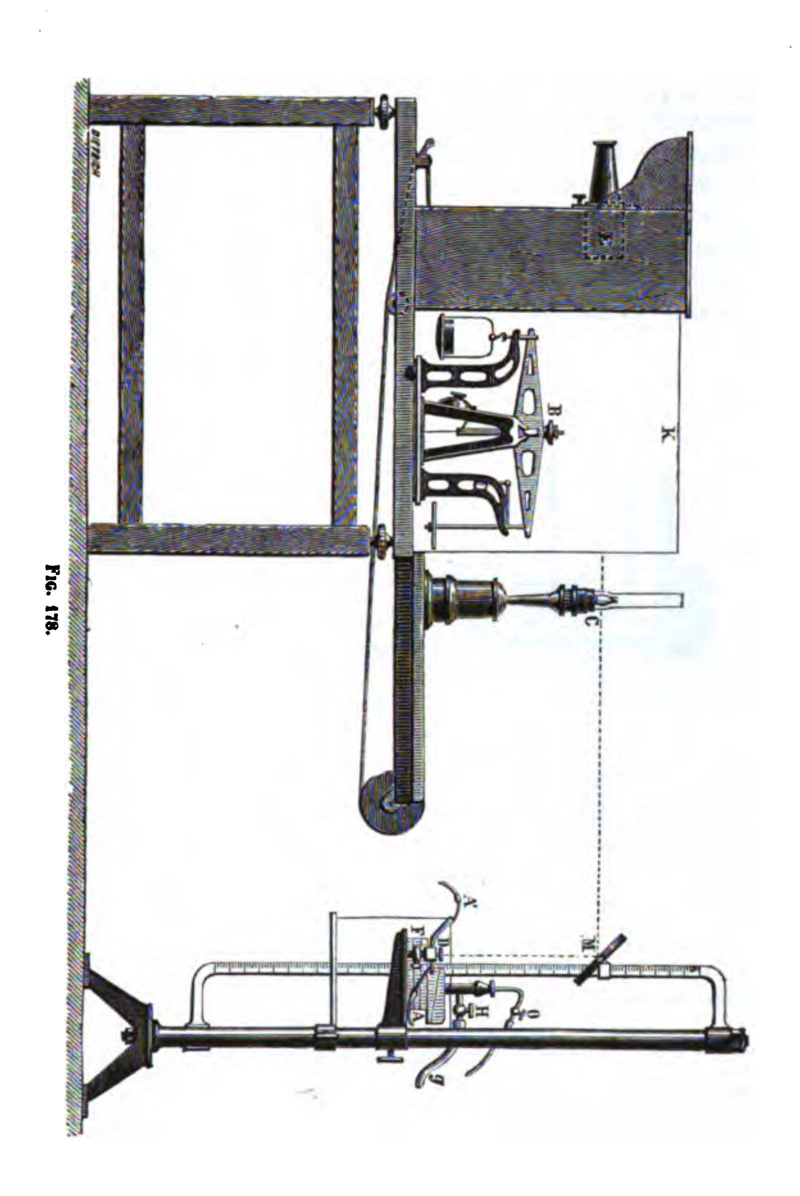


Fig. 178.

Un miroir M renvoie les rayons lumineux dans une direction horizontale, en diminuant très peu leur intensité et dans un rapport parfaitement connu. On saisit, pour faire la mesure photométrique, le moment où l'intensité reste constante, ce qui indique que la solidification commence. Dès que le platine est solidifié complètement, on peut le ramener rapidement à l'état de fusion, si l'on veut recommencer une nouvelle expérience.

Bien entendu, en limitant le faisceau par une ouverture de *n* centimètres carrés, le même appareil fournit une intensité de *n* unités absolues.

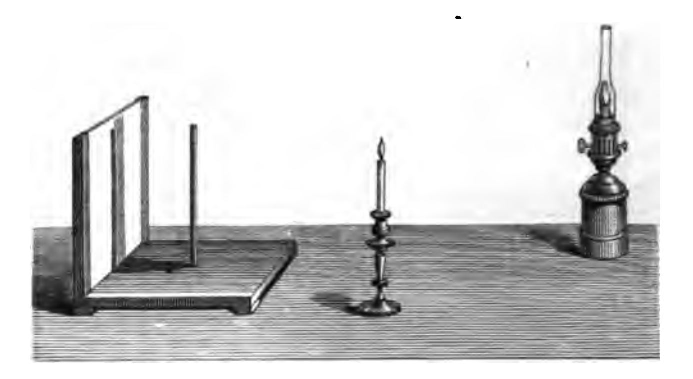


Fig. 179.

La lampe Carcel brûlant dans les conditions indiquées plus haut ayant été conservée comme étalon secondaire d'intensité lumineuse, M. Violle a déterminé son intensité en unités absolues. La figure 178 représente précisément la disposition adoptée pour cette comparaison, qui a été faite, à l'aide du photomètre de Foucault, par la méthode indiquée au paragraphe 25. La moyenne des expériences a donné pour l'intensité de la lampe Carcel réglementaire la valeur $\frac{1}{2,08} = 0,481$ unité absolue.

25. Mesure des intensités. — Photomètres. — Voyons maintenant comment on peut trouver le rapport des intensités lumineuses de deux sources, c'est-à-dire mesurer l'intensité de l'une, si celle de l'autre est prise comme unité.

Plusieurs méthodes photométriques reposent sur les propriétés de la lumière polarisée ; nous n'en parlerons pas ici, et nous nous bornerons à exposer les méthodes fondées, soit sur la loi de Képler, soit sur la diminution d'éclairement qu'un diaphragme placé contre un objectif fait éprouver à l'image réelle fournie par celui-ci.

1° Méthodes fondées sur la loi de Képler. — Supposons qu'une source d'intensité I, placée normalement à une distance D d'une surface y produise le même éclairement qu'une autre source d'intensité I' placée, normalement aussi, à une distance D' ; la formule (1) du paragraphe 23 donne la relation :

$$\frac{I}{D^2} = \frac{I'}{D'^2} \qquad \text{d'où:} \quad \frac{I}{I'} = \left(\frac{D}{D'}\right)^2$$

le rapport des intensités est égal au carré du rapport des distances auxquelles il faut placer les deux sources pour avoir le même éclairement.

Si l'intensité I' est prise comme unité, la valeur I de l'autre source est $\left(\frac{D}{D'}\right)^2$.

Les photomètres, qui servent à appliquer cette méthode de mesure, sont simplement des appareils destinés à constater l'égalité de l'éclairement produit par chacune des sources, et qui permettent de mesurer les distances de ces sources à la surface éclairée.

Un des plus simples et des premiers imaginés est le photomètre de Bouguer, décrit plus haut (§ 21, fig. 175).

Foucault a modifié légèrement le photomètre de Bouguer : la cloison H, formée par une feuille de tôle noircie, peut s'écarter plus ou moins de la fenêtre AB par le jeu d'un pignon et d'une crémaillère, de façon que les deux moitiés éclairées par les sources différentes soient exactement juxtaposées sans empiéter l'une sur l'autre; la comparaison des éclairements se fait bien plus facilement ainsi que lorsqu'un espace sombre existe entre les deux parties de la fenêtre. La substance translucide est formée

par une lame de verre amidonnée (1). On regarde cet écran diaphane à travers un cornet (E fig. 178) qui empêche les déplacements de l'œil.

Rumford s'est servi d'un photomètre encore plus simple que celui de Bouguer. Il consiste (fig. 179) en un écran blanc devant lequel on place une tige opaque et mate. Chacune des sources lumineuses donne sur l'écran une ombre de la tige; en déplaçant convenablement l'une des sources on rend ces ombres contiguës et de même intensité. Les deux sources produisent alors sur l'écran des éclairements égaux, puisque la partie de l'écran qui se trouve dans l'ombre portée par une des sources est éclairée par l'autre seulement. Quand on est arrivé à ce résultat, le carré du rapport des distances de chaque source à l'ombre qu'elle éclaire donne le rapport de leur intensité.

Bunsen a imaginé un photomètre qui, plus ou moins modifié, est très employé en Allemagne. Si sur une feuille de papier blanc ordinaire on fait une tache avec un corps gras, cette tache, étant plus translucide et moins diffusante que le reste de la feuille, apparaît en sombre sur fond clair quand la feuille est plus éclairée par devant que par derrière, et, au contraire, en brillant sur fond obscur dans le cas inverse. C'est sur cette propriété qu'est fondé le photomètre de Bunsen. Il se compose d'une feuille de papier ainsi tachée, derrière laquelle on place une source lumineuse constante. En approchant devant la feuille une source de lumière, la tache, qui apparaît d'abord brillante, finit par trancher en sombre sur le fond clair de la feuille, et, pour une certaine position de la source, la tache disparaît, n'étant ni plus sombre ni plus brillante que le fond. On note alors la distance de la source à la feuille, et l'on recommence l'expérience avec une autre source qu'on veut comparer à la première. Il est évident que les distances D et D' auxquelles les deux sources font disparaître la tache sont celles où elles produisent le même éclairement sur la feuille: $\left(\frac{D}{D'}\right)^2$ est donc le rapport des deux intensités.

(1) Pour amidonner la lame de verre on la laisse séjourner au fond d'un lait d'amidon; celui-ci se dépose uniformément sur la plaque, ce qui donne un écran translucide parfaitement homogène.

2° Méthodes fondées sur la diaphragmation d'un objectif. — Bouguer a découvert et utilisé pour la photométrie la propriété suivante : quand on forme avec une lentille convergente une image réelle d'une source lumineuse, et qu'on vient à limiter l'ouverture de cet objectif par un diaphragme placé contre lui, l'image n'est pas modifiée en grandeur et en position, mais son éclairement est proportionnel à la surface de l'ouverture du diaphragme, pourvu que cette ouverture reste toujours petite vis-à-vis de sa distance à la source. Cette dernière propriété est évidente, puisque la quantité de lumière qui donne lieu à l'image de chaque partie de l'objet est proportionnelle à la surface de la lentille rencontrée par les rayons incidents.

Nous avons déjà utilisé plus haut cette propriété pour démontrer expérimentalement la loi de Képler.

M. Cornu a indiqué plusieurs dispositions photométriques fondées sur ce principe (1).

Pour obtenir un diaphragme à ouverture variable à volonté et de surface connue, M. Cornu se sert de deux plaques métalliques, glissant l'une sur l'autre par l'effet d'un pignon commun à deux crémaillères CC' (fig. 180), et portant chacune une ouverture carrée AB, A'B'. Dans une de leurs positions relatives extrêmes, les deux carrés sont en coïncidence, et une ouverture carrée maxima livre passage à la lumière ; dans l'autre position extrême, l'ouverture de l'une des plaques est cachée par la partie pleine de l'autre, de sorte qu'aucune lumière ne peut passer ; dans les positions intermédiaires, les ouvertures se correspondent partiellement, et, comme elles sont taillées de façon que le mouvement relatif ait lieu suivant une diagonale, l'ouverture libre a toujours une forme carrée, quelle que soit sa dimension. La surface de l'ouverture est proportionnelle au carré de la diagonale ; celle-ci varie d'une quantité égale au déplacement relatif des deux lames métalliques, donné par une

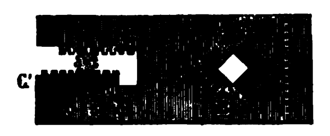


Fig. 180.

(1) Cornu *Journal de physique* 1re série, T. X., p. 189 (1881).

graduation que porte l'une d'elle. Comme le pignon est fixe, par sa rotation, l'une des lames s'avance autant que l'autre recule; il en résulte que le centre du carré reste toujours vis-à-vis du centre optique de la lentille, au-devant de laquelle on a placé ce diaphragme.

Voici maintenant la disposition photométrique qui a paru la plus convenable à M. Cornu.

Les axes principaux de deux objectifs achromatiques L_1 et L_2 (fig. 181) se coupent à angle droit, en un point A où se trouve l'arête rectiligne de la face antérieure d'une glace AA' inclinée à 45° sur chacun des axes. La face postérieure de cette glace est recouverte d'un noir mat pour ne pas réfléchir ni transmettre la lumière. L'un de ces objectifs L_2 a sa surface couverte par un diaphragme à ouverture variable, semblable à celui que nous venons de décrire.



FIG. 181.

On place sur l'axe principal de la lentille L_2 une source de lumière R, de façon que son image réelle se forme dans le plan AO_1. La glace AA' donne de la partie A*b* de l'image de R une image virtuelle A*b*' placée dans le plan AO_2. La source R, qui doit être bien constante, sert de terme de comparaison, pour trouver le rapport des intensités de deux autres sources quelconques S et S'.

On dispose l'une des sources à comparer S sur l'axe prin-

cipal de la lentille L_1, de façon que l'image réelle A*a* qu'en donne cette lentille se fasse dans le plan AO_2.

Un microscope à faible grossissement, dont l'objectif est en H et l'oculaire en J, et dont l'axe coïncide avec l'axe principal de la lentille L_1, sert à voir 1°— la partie A*a* de l'image réelle de S donnée par L_1, 2°— la partie A*b'* de l'image virtuelle fournie par la glace de l'image réelle A*b* de la source R.

En limitant par un diaphragme à ouverture circulaire CC', placé devant l'oculaire, le champ du microscope, on voit dans celui-ci deux demi-disques (figurés à part en K).

L'expérience consiste à faire varier l'ouverture du diaphragme placé devant L_2 jusqu'à rendre égaux les éclairements des deux demi-disques. Désignons par *s* la surface que possède alors l'ouverture du diaphragme de L_2.

On remplace ensuite la source S par la source S' devant la lentille L_1, en ayant soin de la placer exactement à la même distance de la lentille. On modifie alors l'ouverture du diaphragme de L_2 jusqu'à rendre encore égaux les éclairements des deux demi-disques vus à travers le microscope. Désignons par *s'* la surface que possède alors l'ouverture du diaphragme de L_2; en appelant I et I' les intensités des sources S et S', on a évidemment:

$$\frac{I}{I'} = \frac{s}{s'}$$

Par cette disposition, on compare les intensités de régions de la source n'ayant qu'une très faible étendue, à cause de la petitesse du champ du microscope qui ne laisse voir que l'image d'une très petite portion de celle-ci; de là le nom de *microphotomètre* que M. Cornu a donné à cet instrument. En déplaçant convenablement la source devant L_1 on peut comparer ainsi les intensités des diverses régions d'une même source.

26. IMPERFECTION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES. — SPECTROPHOTOMÈTRES. — Les méthodes précédentes, d'une application

facile quand les deux sources à comparer ont la même teinte, deviennent inapplicables quand les teintes sont trop différentes, comme, par exemple, dans la comparaison d'un bec de gaz avec une lampe à huile sans verre. Dans ce cas, on n'obtient jamais avec les sources des éclairements qui produisent le même effet sur l'œil.

Il y a même plus : comment pourrait-on définir, au point de vue de la physique expérimentale, l'égalité d'intensité de deux sources de couleurs différentes, l'une rouge et l'autre bleue, par exemple ? (1)

Il est donc inutile de chercher des photomètres applicables à des sources de couleurs différentes puisqu'il y a là une difficulté inhérente à la nature même de la question.

Le problème plus complexe de la photométrie de sources différemment colorées ne peut être résolu qu'en cherchant le rapport des intensités de ces sources pour les diverses couleurs simples du spectre.

(1) On sait que des caractères d'imprimerie qui peuvent être lus aisément à une vive lumière cessent d'être distincts quand la lumière qui les éclaire est convenablement affaiblie. On s'est fondé sur cette propriété pour définir l'égalité des éclairements produits par deux sources de couleurs différentes : quand on est arrivé en affaiblissant l'éclairement produit par l'une et l'autre source à la limite de visibilité des caractères, on dit que les éclairements produits par les deux sources sont égaux.

Faisons remarquer que cette définition ne présente rien de net au point de vue physique ; c'est une définition physiologique, et la preuve en est que le rapport des intensités de deux sources déterminées, de couleurs différentes, trouvé ainsi par plusieurs observateurs, n'est pas le même : l'état physiologique de l'œil joue un rôle important dans cette appréciation.

D'autre part, il est plus que probable aujourd'hui que la lumière est le résultat d'un mouvement vibratoire. Dans cet ordre d'idées, deux sources de même couleur qui ont des intensités égales, d'après la définition expérimentale donnée plus haut (§ 23), sont telles que, dans le même temps, la même quantité d'énergie vibratoire tombe sur une même surface éclairée successivement par ces deux sources placées à la même distance. En généralisant, on peut évidemment définir l'égalité d'intensité de deux sources de couleurs différentes par l'égalité d'énergie vibratoire reçue dans le même temps. Mais, on le voit, ce n'est pas avec l'œil qu'on pourra mesurer les intensités lumineuses, de couleurs différentes, définies ainsi.

Avec les photomètres décrits plus haut, on peut avoir une solution approchée, mais le plus souvent suffisante pour la pratique, en plaçant devant l'œil qui juge de l'égalité des éclairements, un verre coloré de l'une des couleurs principales du spectre. Ce verre ne laissant arriver à l'œil de l'observateur que cette couleur, ou a peu près, c'est pour celle-ci qu'on obtient la mesure des intensités. En répétant l'expérience avec un verre coloré différemment, on obtient le rapport des intensités pour une autre couleur. En pratique, il suffit le plus souvent de prendre le rapport des intensités pour le rouge et pour le bleu. Ces deux rapports peuvent être très différents parfois, par exemple, quand on compare la lumière de l'arc voltaïque à la lumière d'une bougie : pour le bleu, le rapport entre l'intensité de la lumière électrique et celle de la bougie est bien plus grand que pour le rouge.

Une solution complète de la photométrie colorée est donnée par l'emploi des *spectrophotomètres*. On désigne ainsi des appareils composés d'un spectroscope qui analyse la lumière étudiée, et d'une disposition photométrique, qui permet de comparer les intensités pour chaque couleur simple.

M. Govi (1), en 1860, a le premier donné la description d'un spectrophotomètre : un même prisme donnait un spectre de chacune des deux sources à comparer; ces spectres étaient reçus sur une plaque de verre amidonnée et étaient placés l'un au-dessus de l'autre.

On peut modifier ainsi qu'il suit la disposition de M. Govi et faire d'un spectroscope ordinaire un excellent spectrophotomètre.

Sur la fente du collimateur d'un spectroscope, on dispose un petit prisme à réflexion totale T (fig. 168), qui renvoie sur la moitié supérieure de la fente la lumière d'une source R; la moitié inférieure est éclairée directement par une autre source S. On obtient ainsi dans le plan focal de la lunette astronomique un spectre de chacune des moitiés de la fente, le spectre inférieur étant produit par la source R, le spectre supérieur

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* t. L, p. 156.

par la source S. Ces deux spectres sont placés l'un au-dessus de l'autre, et, en rendant bien perpendiculaire à la fente la base du prisme à réflexion totale T, ils sont exactement juxtaposés, sans interposition de ligne noire. Ces spectres sont regardés, à la façon ordinaire, par l'oculaire.

Pour rendre la comparaison des diverses régions facile, il est indispensable de placer, à l'endroit où se forment les spectres réels, un diaphragme percé d'une ouverture assez petite pour ne laisser arriver à l'œil qu'une région du double spectre ayant sensiblement la même teinte. Il ne faut pas pourtant que l'ouverture du diaphragme soit trop étroite, linéaire par exemple, car l'œil apprécie mal la différence d'intensité de deux surfaces trop petites. Si cette ouverture est circulaire, la ligne de séparation des deux spectres doit tomber suivant son diamètre horizontal; on voit alors deux demi-disques de même couleur correspondant à chacune des sources. Afin de pouvoir donner au diaphragme une ouverture suffisamment large, tout en n'admettant que des rayons ayant à peu près la même teinte, il faut que le spectroscope soit à grande dispersion. L'affaiblissement d'intensité, qui résulte d'une grande dispersion, est compensé en donnant à la fente une largeur un peu plus grande que pour l'observation des raies du spectre. Du reste, on juge mieux de l'égalité d'intensité de deux surfaces contiguës dans le cas d'une intensité faible. Bien entendu, plus l'oculaire employé sera puissant, plus on pourra donner une faible dimension à l'ouverture du diaphragme, tout en ayant une image rétinienne de dimension convenable pour la comparaison. On amène successivement les diverses régions du double spectre à tomber sur l'ouverture du diaphragme en déplaçant la lunette astronomique.

L'égalité d'intensité des deux surfaces vues à travers l'oculaire peut s'obtenir en écartant plus ou moins de la fente l'une des deux sources.

Il convient, du reste, d'éclairer successivement la partie inférieure de la fente avec les deux sources S et S' que l'on veut comparer, et de ne se servir de la source R qui éclaire la partie supérieure de la fente, et qui doit être d'intensité bien constante, que comme terme de comparaison. On évite ainsi plusieurs

causes d'erreur, en particulier, celle qui peut provenir d'une inégale sensibilité de la région inférieure et de la région supérieure de la rétine.

L'expérience se fait alors de la manière suivante. On dispose d'abord devant la fente la source S; l'égalité des éclairements des deux demi-disques obtenue, on mesure la distance D de cette source à la fente. On substitue ensuite à S la source S' que l'on veut lui comparer; sans toucher à la position de R, on fait varier la distance de S' à la fente jusqu'à obtenir de nouveau l'égalité d'éclairement des deux demi-disques, et l'on mesure la distance D' de S' à la fente. Les éclairements des demi-disques supérieurs produits successivement par S et par S' étant égaux, il faut que l'éclairement de la partie inférieure de la fente soit le même dans les deux cas pour la couleur considérée; d'où la relation :

$$\frac{I}{D^2} = \frac{I'}{D'^2}$$

en désignant par I et par I' les intensités des sources S et S' pour cette couleur.

26. CHROMATOSCOPE. — Au problème de la décomposition d'une couleur composée en couleurs simples, que résout le spectroscope, et à celui de la mesure des intensités de chacune des couleurs simples émises par une source lumineuse, par rapport à l'intensité de ces mêmes couleurs dans le spectre de la lumière blanche, que résout le spectrophotomètre, se rattache un problème inverse : mélanger en teintes plates des couleurs simples prises en proportions déterminées par une loi quelconque, voir l'effet que produit cette teinte sur l'œil, et la comparer à une autre teinte obtenue par un procédé quelconque.

Pour des recherches, que nous n'exposerons pas ici, parce qu'elles se rattachent à l'optique supérieure, M. Pellat a fait construire un appareil, appelé *chromatoscope*, qui résout complètement ce dernier problème.

Le principe de cet appareil est le même que celui de la disposition expérimentale par laquelle Newton a mélangé avec une

lentille les diverses couleurs du spectre (Chap. V § 5); mais quelques précautions particulières ont été prises, pour qu'en interceptant par un écran une fraction quelconque du spectre, les couleurs conservées se mélangent exactement en donnant une teinte plate. En outre, au lieu de projeter les rayons lumineux sur un écran, ce qui exige l'emploi d'une source lumineuse intense, en se servant du chromatoscope, on les reçoit directement dans l'œil, ce qui permet d'opérer avec la lumière d'une lampe ou même d'une bougie.

Le chromatoscope se compose d'abord des pièces qui servent à obtenir un spectre réel pur, et qui sont identiques à celles d'un spectroscope ordinaire, savoir : 1° — un collimateur à fente FA (fig. 182 et 183); 2° — un ou mieux deux prismes P en flint,



Fig. 182.

qui sont recouverts par un écran G percé des ouvertures convenables; 3° — un objectif B qui donne un spectre réel V′ de la source qui éclaire la fente du collimateur. Ce spectre V′ vient se former nettement dans le plan H un peu en avant de l'objectif C d'une lunette astronomique L pourvue d'un oculaire de Ramsdem O.

L'objectif A du collimateur et l'ensemble des prismes donnent de la fente une image virtuelle infiniment grande et située à l'infini; mais cette image occupe une position différente pour chacune des couleurs qu'émet la source lumineuse. Autrement

dit, au sortir des prismes la direction des rayons est exactement la même que s'il y avait devant l'objectif B un spectre V infiniment grand, situé à l'infini, dont le violet serait du côté du sommet du prisme, le rouge du côté de la base : c'est un spectre virtuel. Or, après avoir traversé la dernière surface du prisme, les rayons violets sont, au contraire, déviés du côté de la base du prisme, les rayons rouges du côté du sommet; par conséquent, les faisceaux des diverses couleurs qui semblent émaner du spectre virtuel V s'entrecroisent suivant une certaine sur-

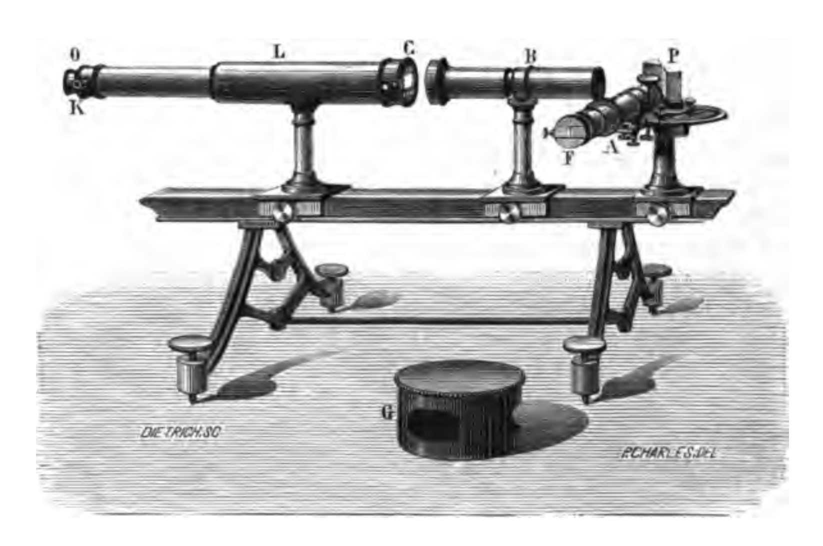


Fig. 183.

face U plane ou à peu près, et on peut les considérer comme provenant de cette surface U.

Si l'on forme une image réelle de U, cette image sera blanche, puisqu'en chaque point des rayons de toutes couleurs se couperont. Or, cette surface U est dans le voisinage des prismes, et l'objectif B en est placé assez près pour en donner une image virtuelle; cette image est mise au point avec la lu-

nette astronomique L. L'ensemble des objectifs B et C donne donc de U une image réelle U′ se formant dans le plan I, qui sera parfaitement blanche si aucune couleur n'est interceptée. C'est cette image blanche qui est regardée avec l'oculaire : l'oculaire et l'œil en donnent une nouvelle image réelle blanche sur la rétine.

Mais si l'on intercepte par un écran placé en H une portion du spectre V′ qui s'y trouve, et qui est l'image réelle du spectre virtuel V, il est évident que c'est comme si l'on supprimait la portion correspondante de ce spectre, et la surface U′ deviendra colorée.

La teinte de U′ doit être parfaitement plate, ce qui indique que le mélange des couleurs du spectre qui sont conservées est parfait; il faut pour cela que la fente du collimateur soit éclairée par une source S vue de chacun des points de la fente sous un angle assez grand, pour que chaque partie de l'objectif du collimateur soit également éclairée par un même point de la fente. En plaçant assez près de celle-ci la flamme d'une lampe, on réalise convenablement ces conditions. Alors un point du spectre virtuel V éclaire autant chaque partie de la surface de U : un point du spectre V′, image réelle de V, éclaire autant chaque partie de la surface U′, image réelle de U. Par conséquent, si l'on vient à intercepter une fraction quelconque du spectre V′, on diminue dans un même rapport l'intensité lumineuse d'une couleur simple dans chaque partie de U′ : la teinte colorée est plate. En outre, comme la fente du collimateur est à bords bien parallèles et est éclairée par une flamme ayant sensiblement le même éclat dans toute la portion qui éclaire la fente, des parties de même longueur prises à différentes hauteurs dans la fente émettent autant de lumière. Il en résulte que, si l'on supprime une portion de la hauteur totale d'une couleur du spectre V′, de façon à ne laisser découverte que la fraction n de la hauteur primitive, on réduit dans le rapport de 1 à n l'intensité lumineuse de cette couleur pour la surface U′.

Dans le plan H, où se trouve le spectre V′, il existe une glissière, qui sert à mettre en place les écrans. Ceux-ci sont formés par une lame de verre (fig. 184) qui est recouverte d'un vernis

opaque dans la région qui correspond à la partie du spectre qu'on veut supprimer. Ainsi, sur la figure 184, pour la couleur du spectre V' qui tombe suivant CABD, l'intensité lumineuse se trouve réduite par l'écran dans le rapport $\frac{AB}{CD}$.

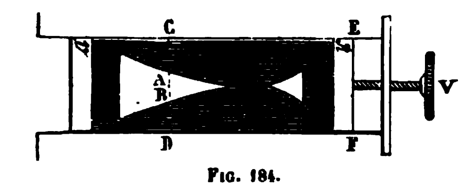


Fig. 184.

Par conséquent, les courbes qui limitent la partie opaque de l'écran doivent être construites d'après la position qu'occupent les raies du spectre solaire (quand on éclaire la fente avec les rayons du Soleil), et d'après la loi qui donne la fraction de chaque couleur qui doit être prise.

Pour pouvoir comparer la teinte ainsi obtenue à une couleur simple ou composée produite d'une autre manière, la face d'un prisme à réflexion totale R (fig. 182) par où sortent les rayons réfléchis, couvre la moitié de l'ouverture du diaphragme, qui se trouve dans le plan I où se forme l'image U'. Une ouverture latérale du tube de la lunette K (fig. 183) permet aux rayons de la source colorée de pénétrer dans l'instrument et de subir la réflexion totale sur la face hypoténuse du prisme R. On voit ainsi à travers l'oculaire, dans une des moitiés de l'ouverture du diaphragme, la teinte donnée par le chromatoscope et, dans l'autre moitié, la teinte qu'on veut lui comparer; ces deux teintes étant juxtaposées, l'œil saisit la moindre différence qui existe dans leur nuance ou dans leur intensité.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TOME DEUXIÈME

PREMIÈRE PARTIE

COMPLÉMENT AU LIVRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE

CINÉMATIQUE

		Pages
1.	Mouvement	1
2.	Trajectoire	1
3.	Espace parcouru	2
4.	Mouvement uniforme	2
5.	Direction de la vitesse	4
6.	Valeur de la vitesse dans un mouvement varié	5
7.	Sens de la vitesse	8
8.	Représentation graphique des vitesses	9
9.	Mouvement de translation	10
10.	Mouvement de rotation. — Vitesse angulaire	11
11.	Mouvement relatif	14
12.	Composition des mouvements. — Composition des vitesses.	14
13.	Mouvement uniformément varié	19
14.	Accélération dans un mouvement quelconque	25
15.	Accélération tangentielle. — Accélération centripète	26

Pages
16. Composition des accélérations 30
17. Projection d'un mouvement sur un axe. 32

DYNAMIQUE

1. Premier principe. — Inertie de la matière 37
2. Force. 39
3. Mesure des forces. 39
4. Équilibre des forces. 42
5. Dynamomètre. 42
6. Représentation graphique des forces 44
7. Mouvement qui succède à un mouvement varié quand la force a cessé d'agir. 45
8. Deuxième principe 45
9. Mouvement produit par une force constante. 47
10. Action d'une force constante agissant sur un mobile animé d'une vitesse de direction quelconque. 49
11. Accélération produite par une force quelconque 52
12. Troisième principe 53
13. Proportionnalité des forces aux accélérations 54
14. Remarque sur les lois précédentes 57
15. Masse 58
16. Résultante de plusieurs forces 60
17. Composition de deux forces ayant même point d'application 60
18. Composition de plusieurs forces ayant même point d'application 63
19. Décomposition d'une force. 65
20. Condition d'équilibre de plusieurs forces ayant même point d'application 65
21. Projection d'une force sur un plan 66
22. Projection d'une force sur un axe 68
23. Mouvement d'un point matériel dans l'espace 71
24. Force tangentielle. — Force centripète 74
25. Force centrifuge 77
26. Déplacement d'une force suivant sa direction 81
27. Composition de deux forces parallèles 82
28. Composition de plusieurs forces parallèles. — Centre des forces parallèles 87
29. Composition des forces situées dans un même plan 88

Pages
30. Moment d'une force par rapport à un point 89
31. Moment d'un couple 90
32. Théorème des moments 91
33. Propriétés des couples. 93
34. Représentation et composition des couples 95
35. Composition de forces quelconques. 98
36. Théorème des projections sur un axe. 99
37. Moment par rapport à un axe 101
38. Moment par rapport à un plan 104
39. Détermination du centre des forces parallèles 106
40. Centre de gravité 108
41. Quatrième principe. — L'action égale la réaction 109
42. Mouvement du centre de gravité d'un système. 111
43. Cinquième principe.— La force ne dépend que de la distance entre les parties agissantes 113

SUPPLÉMENT AU LIVRE PREMIER

INSTRUMENTS DE MESURE

1. Mètre-étalon 118
2. Vis micrométrique. 119
3. Machine à diviser 121
4. Sphéromètre 130
5. Micromètre oculaire. 133
6. Emploi combiné d'une règle graduée et de microscopes à micromètres 136
7. Vernier 138
8. Cathétomètre 143

SUPPLÉMENT AU LIVRE III

CAPILLARITÉ

1. Phénomènes capillaires. 157
2. Attraction moléculaire. 158

Pa

3. Théories des phénomènes capillaires 161
4. Tension superficielle. 162
5. Valeur de la tension superficielle. 168
6. Mesure de la valeur de la tension superficielle. 172
7. Variation de la force élastique en traversant une surface de séparation courbe. — Formule de Laplace 174
8. Expérience de Plateau. 178
9. Équilibre de trois fluides au contact 183
10. Angle de raccordement 184
11. Equation de la surface libre d'un liquide 186
12. Forme de la surface libre d'un liquide qui baigne une paroi plane. 189
13. Application des formules précédentes à la mesure de l'angle de raccordement et de la valeur de la tension superficielle du mercure. 195
14. Ascension ou dépression d'un liquide entre deux lames . . 195
15. Ascension ou dépression des liquides dans les tubes capillaires 202
16. Vérifications expérimentales 206
17. Détermination de la valeur de la tension superficielle par les tubes capillaires 213
18. Influence de la température sur l'ascension des liquides dans les tubes capillaires. 213
19. Mouvement d'une goutte de liquide dans un tube conique. . 217
20. Attraction ou répulsion produites par les phénomènes capillaires 218
21. Pression nécessaire pour faire écouler un liquide par un orifice étroit. — Formation des gouttes 222
22. Corps poreux. 224
23. Retard au déplacement des ménisques 225
24. Influence des phénomènes capillaires sur la profondeur à laquelle s'enfoncent les corps flottants 227
25. Travail des forces capillaires dans la déformation d'une masse liquide. 229

DEUXIÈME PARTIE

LIVRE V

OPTIQUE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

1. Sensation lumineuse. — Lumière. 233
2. Source lumineuse 234
3. Corps opaques, corps translucides, corps transparents. . . 234
4. Propagation de la lumière. — Rayon lumineux 235
5. Ombre 236
6. Pénombre 238
7. Images fournies par les petites ouvertures 239

CHAPITRE II

RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

1. Réflexion et diffusion 244
2. Lois géométriques de la réflexion 245
3. Réflexion à la surface d'un miroir plan 249
4. Objet virtuel 252
5. Réflexions successives sur deux miroirs plans parallèles . 254
6. Réflexions successives sur deux miroirs plans faisant entre eux un certain angle 257
7. Miroirs sphériques 260
8. Théorie de la réflexion à la surface d'un miroir sphérique concave 261
9. Foyer. — Plan focal. 266

Pages
10. Image d'un objet placé entre le centre du miroir et le plan focal 268
11. Discussion 270
12. Vérification expérimentale. 272
13. Objet placé entre le plan focal et le miroir 273
14. Objet virtuel 278
15. Formule générale 279
16. Construction de l'image 280
17. Miroir convexe. — Objet réel 283
18. Objet virtuel 286
19. Construction géométrique 289
20. Formule générale des miroirs sphériques 290
21. Formule de Newton 292

CHAPITRE III

RÉFRACTION

1. Transmission de la lumière par diffusion et par réfraction . 294
2. Lois géométriques de la réfraction 295
3. Construction géométrique 297
4. Démonstration expérimentale 300
5. Loi des indices de réfraction. 303
6. Réfraction de la lumière à travers une série de milieux séparés par des plans parallèles 306
7. Prisme 308
8. Discussion des formules du prisme. — Minimum de déviation 312
9. Conditions d'émergence 317
10. Réfraction à travers une surface sphérique 320
11. L'image est semblable à l'objet. 324
12. Réfraction à travers plusieurs surfaces sphériques centrées 324
13. Lentilles sphériques. — Définitions. 327
14. Centre optique. — Points nodaux 330
15. Lentilles infiniment minces 334
16. Lentilles convergentes infiniment minces. 335
17. Lentilles divergentes infiniment minces. 340
18. Formules générales des lentilles infiniment minces 345
19. Point nodal. 345
20. Lentille infiniment mince placée dans l'air 347

Pages
21. Valeur de la distance focale 350
22. Lentilles épaisses. 352
23. Plans principaux 353
24. Distance et grandeur de l'image 357
25. Formule de Newton 359
26. Points nodaux. 360
27. Proportionnalité des distances focales aux indices de réfraction 362
28. Système dioptrique dont les milieux extrêmes ont le même indice 365
29. Position des plans principaux dans une lentille épaisse . . 366

CHAPITRE IV

CAUSTIQUES. — ABERRATIONS DE SPHÉRICITÉ. — APLANÉTISME

1. Théorème de Gergonne 370
2. Caustiques 375
3. Lignes focales. 378
4. Aberrations de sphéricité 389
5. Aplanétisme 393
6. Courbure de l'image d'un objet plan 399

CHAPITRE V

DISPERSION. — ACHROMATISME

1. Spectre lumineux. 402
2. Explication de Newton. 402
3. Les couleurs du spectre sont simples. 403
4. Les diverses couleurs du spectre ont des indices de réfraction différents 404
5. La superposition des diverses couleurs du spectre reproduit la lumière blanche 404
6. Couleurs complémentaires. 409
7. De la coloration des objets. — Diffusion 409
8. Pouvoir dispersif. 410

Pages
9. Spectre pur 411
10. Spectre virtuel 414
11. Irisation des images vues à travers un prisme ou une lentille 415
12. Achromatisme des prismes. 416
13. Achromatisme des lentilles. 420
14. Achromatisme des images données par réflexion sur la base d'un prisme isocèle 426

CHAPITRE VI

VISION

1. Description de l'œil 428
2. Formation des images sur la rétine. 431
3. Angle visuel 433
4. Accommodation. 434
5. Limite de vision distincte 437
6. Emmétropie. — Myopie. — Hypermétropie 437
7. Presbytie. 440
8. Champ de l'œil 441
9. Aberrations de l'œil. 442
10. Vision binoculaire. 444
11. Du relief 445

CHAPITRE VII

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

1. Porte-lumière. — Héliostat 450
2. Objectifs 453
3. Chambre noire 455
4. Appareils de projection 456
5. Microscope solaire 459
6. Oculaires. 462
7. Puissance d'un oculaire. — Grossissement 463
8. Mise au point d'un oculaire convergent. 466
9. Achromatisme des oculaires positifs 468
10. Loupe 470
11. Doublet de Wollaston. — Loupe montée 471

Pages
12. Oculaire de Ramsden 474
13. Oculaire d'Huyghens 477
14. Microscope composé 479
15. Historique du microscope 495
16. Télescope 496
17. Lunette astronomique 498
18. Lunette terrestre 513
19. Télescope de Newton. — Télescope de Foucault 518
20. Emploi du télescope pour la photographie sidérale 523
21. Lunette de Galilée 523
22. Historique des télescopes 533

CHAPITRE VIII

MESURES OPTIQUES

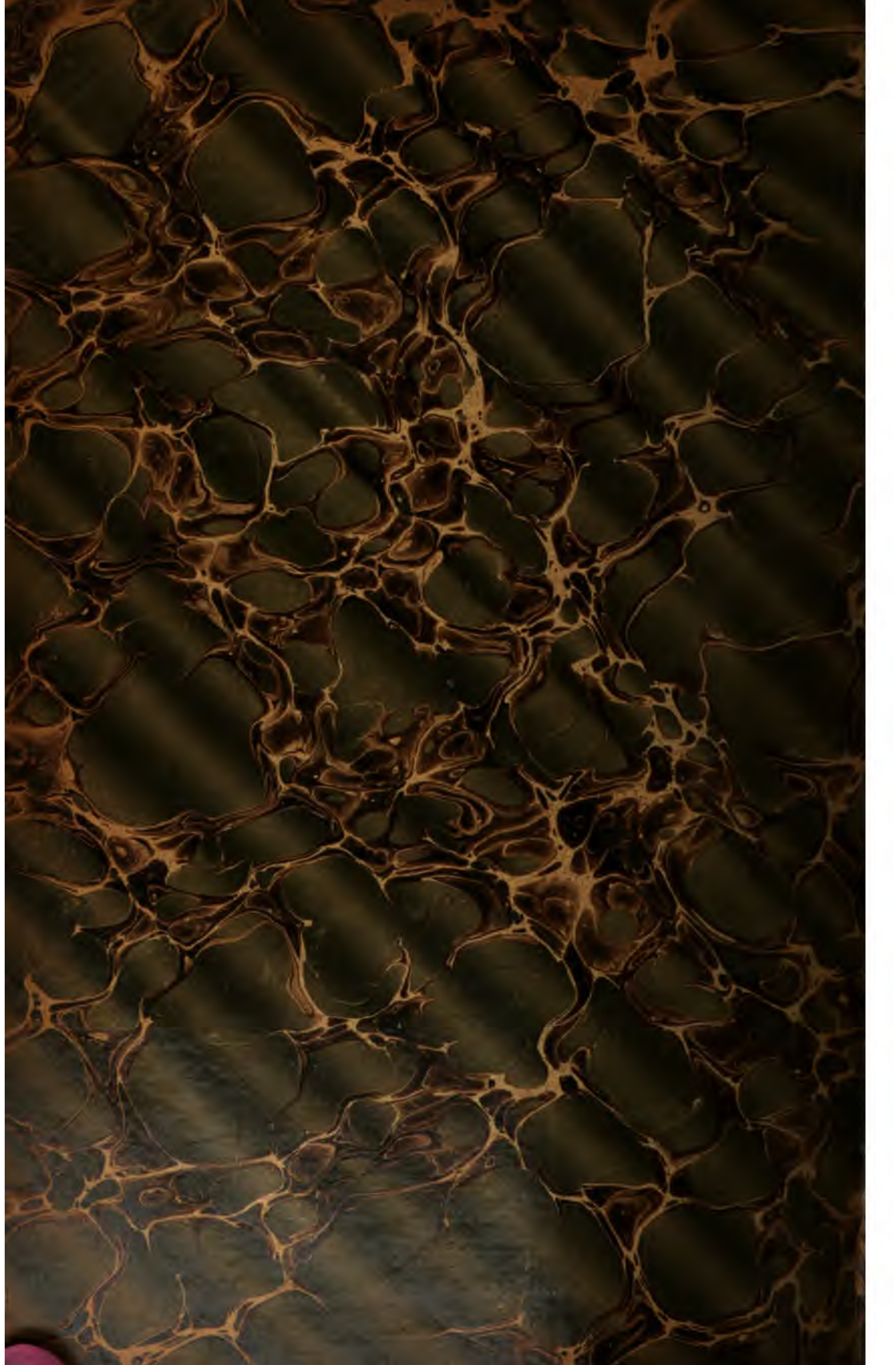
1. Mesure des indices de réfraction, — Méthode de Descartes. 539
2. Méthode du minimum de déviation 541
3. Vérification des formules du prisme 548
4. Indice de réfraction des gaz 549
5. Expériences de Biot et Arago 549
6. Expériences de Dulong 555
7. Indice de réfraction des vapeurs. — Recherches de M. Le Roux 557
8. Méthode du duc de Chaulnes 558
9. Méthode fondée sur la réflexion totale 561
10. Résultats 564
11. Loi de Gladstone 569
12. Diasporamètre 572
13. Spectroscope 577
14. Mesure de la distance focale d'une lentille 582
15. Mesure des éléments d'un système convergent. — Méthode de M. Cornu 587
16. Application de la méthode précédente à un système divergent 589
17. Mesure du grossissement d'un objectif de microscope . . . 591
18. Unité de convergence. — Dioptrie 592
19. Mesure de la puissance et du grossissement d'un oculaire. 592
20. Mesure du grossissement d'un télescope 597
21. Photométrie. — Définitions 599

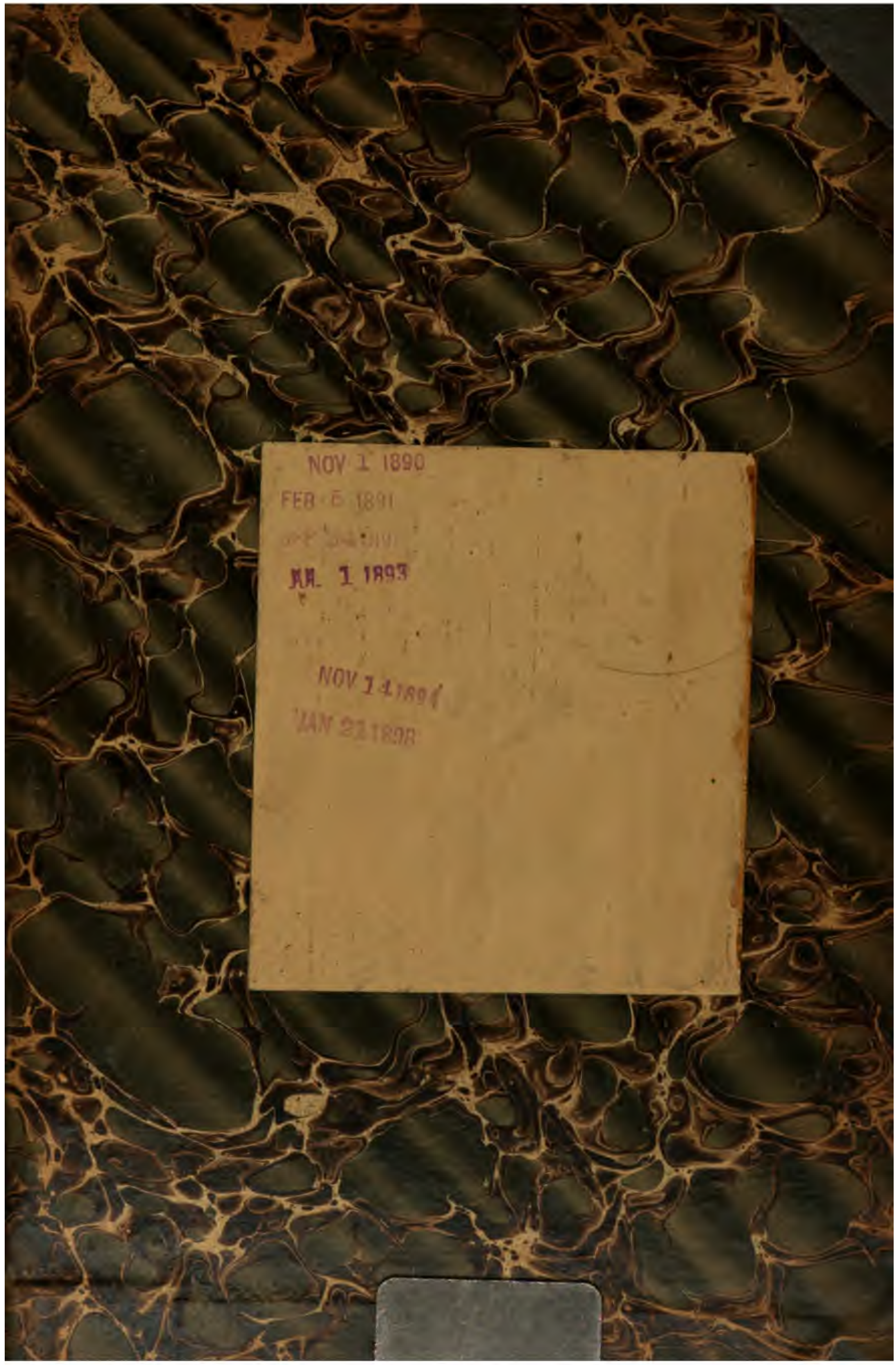
Pages

22. Variation de l'éclairement avec la distance et avec l'obliquité 601
23. Intensité d'une source lumineuse 605
24. Unité d'intensité 606
25. Mesure des intensités. — Photomètres 608
26. Imperfections des méthodes précédentes. — Spectrophotomètres 613
27. Chromatoscope 617

TABLE DES MATIÈRES 623

Paris, Imp. PAUL DUPONT, 41, rue Jean-Jacques-Rousseau. — 102.7.85




NOV 1 1890
FEB 5 1891
NOV 14 1894
JAN 21 1898